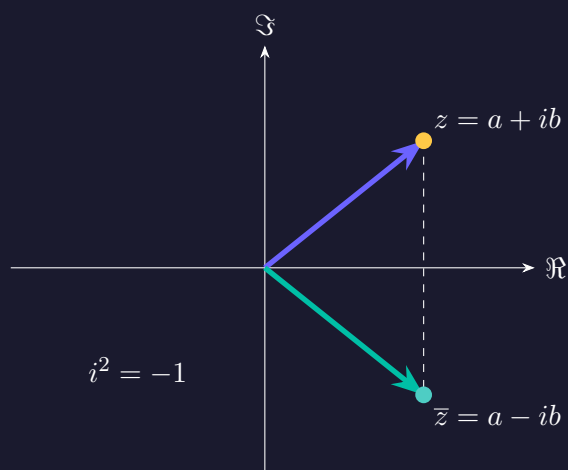


FICHE 01

Nombres complexes

Calcul et équations

Forme algébrique ■ Conjugaison ■ Polynômes



Terminale — Option Mathématiques expertes — Programme officiel

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	❓ Pourquoi ce chapitre ?	3
1.1	Le problème fondamental : une équation qui bloque	3
2	🧠 L'idée avant la formule	3
2.1	Deux coordonnées dans un seul objet	3
2.2	Pourquoi la règle de multiplication est naturelle	3
2.3	Le conjugué prépare la division	4
3	🎓 Le cours formel	4
3.1	Construire et reconnaître un nombre complexe	4
3.2	Addition, produit et puissances	5
3.3	Conjugaison et inverse	6
3.4	Binôme de Newton dans le corps des complexes	8
3.5	Résoudre des équations avec le conjugué	9
3.6	Équations du second degré et factorisation	10
3.7	Méthodes de contrôle et prolongement	12
4	🧰 Boîte à outils — choisir puis justifier	13
4.1	Une équation linéaire qui mélange deux écritures	13
4.2	Une équation de degré quatre qui se ramène au degré deux	13
4.3	Racine répétée et coefficients réels	14
4.4	Un fil de décision à retenir	14
5	✎ Exercices progressifs	15
6	🔑 Problème — Pour aller plus loin	17
7	Indices des exercices	18
8	✔ Corrigés détaillés	20
9	Corrigé du problème	24
10	Faire le point par une variante autonome	25
11	Fiche-mémoire	26
12	Indices des pauses et des preuves	27
13	Explications des pauses et des preuves	30

1 ? Pourquoi ce chapitre ?

1.1 Le problème fondamental : une équation qui bloque

Dans les réels, $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution, car un carré est positif ou nul. Cela ne rend pas l'équation absurde : cela indique que les réels ne suffisent pas. Tu as déjà rencontré ce changement de cadre : $x + 3 = 1$ conduit aux nombres négatifs, puis $3x = 1$ aux fractions. Ici, nous allons agrandir l'ensemble de nombres en conservant des règles de calcul cohérentes.

Intuition | Ce que tu vas gagner

Une seule idée, $i^2 = -1$, permettra de résoudre toutes les équations du second degré à coefficients réels. Elle fera aussi apparaître une nouvelle manière de représenter le plan. Le but n'est pas de collectionner des symboles : tu vas apprendre à choisir une écriture, justifier une opération et contrôler une solution.

Prérequis. Développer $(a + b)^2$, factoriser une différence de carrés, résoudre un système de deux équations et utiliser les coefficients binomiaux. Par exemple, $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ et $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$.

Statut des résultats. Les opérations, le binôme et les équations polynomiales à coefficients réels constituent le socle. La résolution du second degré à coefficients complexes et le problème sur les entiers de Gauss sont des prolongements expliqués.

Méthode | Comment travailler cette fiche

Commence par l'idée avant la formule, puis travaille une notion à la fois. Dans le cours, reformule la définition avec tes mots et refais l'exemple sans regarder la dernière ligne. Les pauses te proposent une question, deux indices graduels et une explication ; tu peux chercher avec une aide sans renoncer au raisonnement.

Après le cours, la boîte à outils relie plusieurs notions dans des méthodes commentées. Les exercices passent des bases aux questions d'initiative. Si tu bloques, prends d'abord un indice ; après le corrigé, explique pourquoi la méthode convient et refais une variante. Le problème final construit un approfondissement à partir du cours, puis une dernière activité te permet de faire le point.

2 L'idée avant la formule

2.1 Deux coordonnées dans un seul objet

Pense à $a + ib$ comme à un couple de réels (a, b) . La première coordonnée est la partie réelle, la seconde la partie imaginaire. Ainsi $3 - 2i$ contient les informations 3 et -2 . La partie imaginaire est le réel -2 , et non le terme $-2i$. L'égalité de deux complexes exigera l'égalité des deux coordonnées : une seule équation complexe peut donc fournir deux équations réelles.

2.2 Pourquoi la règle de multiplication est naturelle

Additionner les couples coordonnée par coordonnée est immédiat. Pour multiplier, garde la distributivité, puis remplace i^2 par -1 . Par exemple $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$. La règle nouvelle intervient à un endroit précis ; les autres étapes sont celles du calcul littéral que tu connais.

2.3 Le conjugué prépare la division

Le produit $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ est réel. Les termes imaginaires se compensent. Cette observation expliquera la division, sans inventer un « dénominateur imaginaire interdit » : multiplier numérateur et dénominateur par le même complexe non nul conserve simplement le quotient.

Attention | Une extension n'autorise pas tous les réflexes

Nous conserverons addition, multiplication et produit nul, mais pas un ordre compatible avec toutes les propriétés usuelles des réels. Écrire $i > 0$ ou « discriminant complexe positif » n'a pas de sens dans ce cours. Pour commencer, reviens toujours aux deux coordonnées réelles.

3 Le cours formel

3.1 Construire et reconnaître un nombre complexe

Définition | Forme algébrique

Tout nombre complexe s'écrit de manière unique $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On note $\operatorname{Re}(z) = a$ et $\operatorname{Im}(z) = b$. L'ensemble des complexes est noté $\mathbb{C}$. Un réel est un complexe dont la partie imaginaire est nulle ; un imaginaire pur a une partie réelle nulle.

L'unicité donne $a + ib = c + id$ si et seulement si $a = c$ et $b = d$. En particulier, $a + ib = 0$ impose deux conditions. Le nombre 0 est à la fois réel et imaginaire pur.

Exemple | Lire correctement une écriture

Pour $z = 3 - 2i$, écrivons $z = 3 + i(-2)$: le réel devant i est -2 . Ainsi $\operatorname{Re}(z) = 3$ et $\operatorname{Im}(z) = -2$. La partie imaginaire est un réel ; le terme imaginaire complet est $-2i$.
Pour $w = i(4 - i)$, la parenthèse empêche cette lecture directe. Distribuons : $i \times 4 + i \times (-i) = 4i - i^2$. Comme $i^2 = -1$, $-i^2 = -(-1) = 1$. Donc $w = 1 + 4i$ et ses deux parties sont 1 et 4. Le double signe moins est la raison de l'apparition du $+1$.

Attention | L'ordre réel ne s'étend pas au calcul complexe

On ne compare pas les complexes avec $<$ ou $>$. Les expressions « z positif » et « $\sqrt{-1} = i$ par les règles usuelles des racines réelles » ne constituent pas des règles de calcul dans $\mathbb{C}$. On part de $i^2 = -1$.

À toi d'essayer : Identifier deux parties

Trouve les réels x, y tels que $(2x - 1) + i(y + 3) = 5 - 2i$.

Pour démarrer. Lis les deux coefficients réels de chaque côté, puis écris deux petites équations.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 27 Explication, p. 30

À toi d'essayer : Séparer les deux informations

Quels réels x et y vérifient $x + 2 + i(y - 3) = 5 - 4i$? Explique pourquoi une seule égalité fournit deux conditions.

Pour démarrer. Identifie ce qui reste sans i , puis le réel qui multiplie i .

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 27 Explication, p. 30

3.2 Addition, produit et puissances**✓ Propriété | Les règles de calcul**

Pour $z = a + ib$ et $w = c + id$,

$$z + w = (a + c) + i(b + d), \quad zw = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

L'addition et la multiplication sont commutatives et associatives, et le produit se distribue sur la somme. L'opposé de $a + ib$ est $-a - ib$.

** Démonstration | Pourquoi le produit prend cette forme**

Ce que nous cherchons. Réécrire le produit sous la forme « un réel + i fois un réel ». Ici a, b, c, d sont réels. Il faut donc faire disparaître i^2 , puis rassembler ce qui contient i .

1. Distribuer le premier facteur. La règle $u(v + w) = uv + uw$ signifie qu'on multiplie chaque terme de la parenthèse. En l'appliquant deux fois,

$$\begin{aligned} (a + ib)(c + id) &= a(c + id) + ib(c + id) \\ &= a \times c + a \times id + ib \times c + ib \times id \\ &= ac + iad + ibc + i^2bd. \end{aligned}$$

Il y a quatre produits : a rencontre c et id , puis ib rencontre c et id . Dans le dernier, $(ib)(id) = i \times i \times b \times d = i^2bd$: aucun terme ne doit être oublié.

2. Utiliser la règle nouvelle. Comme $i^2 = -1$, le dernier terme devient $(-1)bd = -bd$. Ainsi le produit vaut $ac + iad + ibc - bd$.

3. Regrouper et factoriser. Les termes sans i sont $ac - bd$. Dans les deux autres, i est un facteur commun : $iad + ibc = i(ad + bc)$. Finalement,

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Comme $ac - bd$ et $ad + bc$ sont réels, c'est bien la forme algébrique attendue. Le signe moins devant bd vient de $i^2 = -1$, pas d'une règle de signes ajoutée arbitrairement.

Un contrôle simple. Si $a = c = 0$ et $b = d = 1$, on multiplie i par i . La formule donne $0 - 1 + i(0 + 0) = -1$, exactement i^2 .

💡 Exemple | Calcul complet

Un produit. Chacun des deux termes du premier facteur multiplie les deux termes du second :

$$\begin{aligned}(2 - 3i)(1 + 4i) &= 2 \times 1 + 2 \times 4i - 3i \times 1 - 3i \times 4i \\ &= 2 + 8i - 3i - 12i^2 \\ &= 2 + 8i - 3i + 12 = 14 + 5i.\end{aligned}$$

Le dernier terme devient $+12$ parce que $-12(-1) = 12$; les termes imaginaires donnent $(8 - 3)i = 5i$.

Un carré. Un carré est le produit de deux facteurs identiques. L'identité $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$, avec $u = 2$ et $v = -3i$, donne $4 + 2 \times 2 \times (-3i) + (-3i)^2 = 4 - 12i + 9i^2 = -5 - 12i$. Le coefficient 9 est positif mais $9i^2 = -9$; il ne faut pas confondre le carré du coefficient et le carré du terme entier.

Les premières puissances se calculent une par une : $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ par définition ; puis $i^3 = i^2i = (-1)i = -i$ et $i^4 = i^2i^2 = (-1)(-1) = 1$. Après quatre facteurs, on est donc revenu à 1. Pour $n = 4q + r$ avec $0 \leq r < 4$, les règles des puissances donnent $i^n = (i^4)^q i^r = 1^q i^r = i^r$. La division euclidienne indique ainsi lequel des quatre restes utiliser. Pour les exposants négatifs, $i(-i) = -i^2 = 1$, donc $i^{-1} = -i$; la même réduction reste valable puisque $i \neq 0$.

À toi d'essayer : Le signe qui change tout

Un élève écrit $(2 - i)^2 = 4 + 1 = 5$. Repère les deux erreurs puis refais le calcul.

Pour démarrer. Écris le carré comme $(2 - i)(2 - i)$ et compte les quatre produits.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 27 Explication, p. 30

3.3 Conjugaison et inverse

📖 Définition | Le conjugué

Si $z = a + ib$, on définit $\bar{z} = a - ib$. Alors $\overline{\bar{z}} = z$, $z + \bar{z} = 2a$ et $z - \bar{z} = 2ib$. Un complexe est réel si et seulement si $z = \bar{z}$; il est imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$.

★ Théorème | Compatibilité avec les opérations

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \quad z\bar{z} = a^2 + b^2.$$

Si $z \neq 0$, alors $a^2 + b^2 > 0$ et

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2}.$$

Ainsi tout complexe non nul possède un inverse.

 Démonstration | Produit, inverse et puissances

1. Conjuguer un produit. Le calcul précédent donne $zw = (ac - bd) + i(ad + bc)$. Conjuguer conserve sa partie réelle et change le signe de sa partie imaginaire :

$$\overline{zw} = (ac - bd) - i(ad + bc).$$

Calculons maintenant l'autre expression, sans supposer la propriété :

$$\begin{aligned}(a - ib)(c - id) &= ac - iad - ibc + (-i)^2 bd \\ &= ac - iad - ibc - bd \\ &= (ac - bd) - i(ad + bc).\end{aligned}$$

Nous avons utilisé $(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = -1$. Les deux expressions sont identiques, donc $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$.

2. Construire l'inverse avant de l'utiliser. Pour $z = a + ib$,

$$z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - iab + iab - i^2 b^2 = a^2 + b^2.$$

Si $z \neq 0$, a et b ne sont pas tous deux nuls. Leurs carrés sont positifs ou nuls et au moins un est strictement positif : $a^2 + b^2 > 0$. On peut donc diviser par ce réel. Le nombre $v = (a - ib)/(a^2 + b^2)$ vérifie $zv = (a^2 + b^2)/(a^2 + b^2) = 1$: c'est l'inverse de z .

3. Conjuguer cet inverse. L'égalité $zz^{-1} = 1$, conjuguée avec la propriété déjà prouvée, donne $\overline{z}\overline{z^{-1}} = 1$. Cela signifie précisément que $\overline{z^{-1}}$ est l'inverse de $\overline{z}$, donc $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$.

4. Justifier toutes les puissances. Au rang $n = 0$, les deux côtés de $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ valent 1. Supposons la propriété vraie au rang n . Alors

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n z} = \overline{z^n} \overline{z} = (\overline{z})^n \overline{z} = (\overline{z})^{n+1}.$$

Chaque égalité utilise, dans l'ordre, la définition d'une puissance, la propriété du produit, l'hypothèse de récurrence et à nouveau la définition d'une puissance. La propriété est donc vraie pour tout $n \geq 0$. Si $n = -m < 0$ et $z \neq 0$, on écrit $z^{-m} = (z^{-1})^m$, puis on applique les résultats sur l'inverse et les puissances positives.

 Méthode | Mettre un quotient sous forme algébrique

Vérifie que le dénominateur est non nul. Multiplie son numérateur et son dénominateur par le conjugué du dénominateur. Développe seulement ensuite, et sépare les parties réelle et imaginaire.

 Exemple | Une division

But. Enlever le complexe du dénominateur pour lire les deux parties. Le nombre $1 - 2i$ est non nul puisque sa partie réelle vaut 1. Son conjugué $1 + 2i$ est également non nul, donc multiplier haut et bas par celui-ci ne change pas le quotient.

$$\frac{3 + i}{1 - 2i} = \frac{(3 + i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)}.$$

En haut : $3 + 6i + i + 2i^2 = 3 + 7i - 2 = 1 + 7i$. En bas : $1 + 2i - 2i - 4i^2 = 1 + 4 = 5$. Ainsi le résultat est $1/5 + (7/5)i$.

Contrôle effectué. Multiplions le résultat par le dénominateur initial : $(1 + 7i)(1 - 2i)/5 = (1 - 2i + 7i - 14i^2)/5 = (15 + 5i)/5 = 3 + i$. Nous retrouvons bien le numérateur.

⚠ Attention | Produit nul

Si $zw = 0$ et $z \neq 0$, multiplier par z^{-1} donne $w = 0$. La règle du produit nul reste donc valable dans $\mathbb{C}$. Elle ne dépend pas d'un argument de signe.

À toi d'essayer : Construire un inverse au lieu de le deviner

Trouve un complexe w tel que $(1 + 2i)w = 1$. Pourquoi peux-tu diviser par le nombre obtenu avec le conjugué ?

Pour démarrer. Commence par développer $(1 + 2i)(1 - 2i)$; le résultat indique par quoi diviser.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 27 Explication, p. 30

3.4 Binôme de Newton dans le corps des complexes

★ Théorème | Binôme

Pour $z, w \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(z + w)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} w^k.$$

Pour $n = 0$, le membre de droite est 1 ; pour $n = 1$, il est $z + w$.

Démonstration | Preuve par récurrence

Le rôle de la somme. Le symbole $\sum_{k=0}^n$ demande d'additionner les termes obtenus pour $k = 0, 1, \dots, n$. Nous allons montrer que la formule reste vraie quand on ajoute un facteur $z + w$.

Initialisation. Au rang 0, $(z + w)^0 = 1$ et la somme ne contient que $\binom{0}{0} z^0 w^0 = 1$. Les puissances d'exposant zéro désignent ici les produits vides, égaux à 1.

Hypothèse. Fixons un entier $n \geq 0$ et supposons $(z + w)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} w^k$. Nous pouvons remplacer uniquement cette puissance par la somme supposée égale.

Passage au rang suivant. Multiplier par $z + w$ produit deux sommes :

$$(z + w)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n+1-k} w^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} w^{k+1}.$$

Dans la deuxième somme, posons $j = k + 1$. Lorsque k va de 0 à n , j va de 1 à $n + 1$; $k = j - 1$ et $n - k = n + 1 - j$. Elle devient donc $\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} z^{n+1-j} w^j$.

Pour une puissance w^k avec $1 \leq k \leq n$, les deux sommes apportent le même monôme $z^{n+1-k} w^k$. Ses coefficients s'ajoutent : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$. Cette identité de Pascal compte les choix de k objets parmi $n + 1$ selon que le dernier objet est choisi ou non.

Le terme z^{n+1} apparaît seulement dans la première somme avec coefficient 1 ; w^{n+1} seulement dans la seconde, également avec coefficient 1. Nous obtenons exactement $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} z^{n+1-k} w^k$. L'initialisation et cette transmission prouvent la formule pour tout entier naturel.

💡 Exemple | Une puissance sans formule trigonométrique

Avec $n = 4$, les coefficients du binôme sont 1, 4, 6, 4, 1. Ainsi $(1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4$. Or $i^2 = -1$, $i^3 = i^2i = -i$ et $i^4 = (i^2)^2 = 1$. Le calcul devient $1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4$: les termes imaginaires se compensent.

Un second chemin vérifie le résultat. D'abord $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$. Puis $(1+i)^4 = ((1+i)^2)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$. La règle $(u^p)^q = u^{pq}$ autorise le regroupement des puissances. On choisit ici le carré intermédiaire parce qu'il n'a plus qu'un seul terme.

Une preuve à construire : Une somme toujours réelle

Montre que $z\bar{w} + \bar{z}w$ est réel pour tous complexes z, w .

Pour démarrer. Appelle la somme S et cherche à montrer $\bar{S} = S$.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 28 Explication, p. 31

À toi d'essayer : Retrouver un coefficient du binôme

Dans $(z+w)^4$, pourquoi le terme z^2w^2 possède-t-il le coefficient 6 ?

Pour démarrer. Numérote les quatre facteurs et liste les paires de positions où tu choisis w .

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 28 Explication, p. 31

3.5 Résoudre des équations avec le conjugué

L'équation $az = b$ se traite selon a . Si $a \neq 0$, elle admet l'unique solution b/a . Si $a = 0, b \neq 0$, elle n'a pas de solution ; si $a = b = 0$, tout complexe convient.

🔧 Méthode | Équation faisant intervenir z et $\bar{z}$

Pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Remplace $\bar{z}$ par $x - iy$, développe et identifie les parties réelle et imaginaire. Tu obtiens un système réel ; vérifie ensuite dans l'équation initiale.

💡 Exemple | Système associé

Écrivons $z = x + iy$ avec x, y réels. Alors $\bar{z} = x - iy$ et

$$2z + \bar{z} = 2(x + iy) + (x - iy) = 2x + 2iy + x - iy = 3x + iy.$$

L'égalité avec $6 + 3i$ exige à la fois $3x = 6$ et $y = 3$, car deux formes algébriques sont égales seulement si leurs deux parties coïncident. Diviser $3x = 6$ par 3 donne $x = 2$. Ainsi $z = 2 + 3i$.

Vérification dans l'équation de départ : $2(2 + 3i) + (2 - 3i) = 4 + 6i + 2 - 3i = 6 + 3i$. Toutes les opérations étaient réversibles ; la solution est unique.

Pour $z + \bar{z} = 3 + i$, le membre gauche vaut $2x + 0i$. L'identification demanderait $2x = 3$ et $0 = 1$. La deuxième condition est impossible : même si $x = 3/2$ satisfait la première, aucun complexe ne satisfait l'ensemble.

Une équation avec un dénominateur impose d'abord un domaine. Par exemple $\frac{z+1}{z-1} = i$ nécessite $z \neq 1$. Après produit en croix, $(1-i)z = -1-i$ donne $z = -i$, qui appartient au domaine.

Une nouvelle écriture, les mêmes exigences de raisonnement.

À toi d'essayer : Une inconnue peut rester libre

Résous $z - \bar{z} = 6i$. Pourquoi n'obtiens-tu pas un unique complexe ?

Pour démarrer. Pose $z = x + iy$, puis écris la soustraction avec les parenthèses.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 28 Explication, p. 31

3.6 Équations du second degré et factorisation

★ Théorème | Coefficients réels

Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta > 0$, les deux racines sont $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$; si $\Delta = 0$, l'unique racine est $-b/(2a)$. Si $\Delta < 0$, les deux racines complexes conjuguées sont

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Dans tous les cas, $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$, en répétant la racine si $\Delta = 0$.

Démonstration | Compléter le carré

Pourquoi un carré ? Nous savons résoudre $u^2 = d$; nous cherchons donc à transformer le trinôme en un carré suivi d'une constante. Puisque $a \neq 0$, multiplier l'équation par $4a$ est réversible :

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad 4a^2z^2 + 4abz + 4ac = 0.$$

Or $(2az + b)^2 = 4a^2z^2 + 4abz + b^2$. En remplaçant les deux premiers termes,

$$(2az + b)^2 - b^2 + 4ac = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad (2az + b)^2 = b^2 - 4ac = \Delta.$$

Posons $u = 2az + b$. Retrouver z à partir de u se fait par $z = (u - b)/(2a)$, car $2a \neq 0$.

Si $\Delta > 0$. Avec $d = \sqrt{\Delta}$, $u^2 = d^2$ équivaut à $(u - d)(u + d) = 0$. Un produit de complexes est nul si et seulement si un facteur est nul : $u = d$ ou $u = -d$, puis $z = (-b \pm d)/(2a)$.

Si $\Delta = 0$. $u^2 = 0$ impose $u = 0$ par la même règle. Il reste une seule valeur $z = -b/(2a)$.

Si $\Delta < 0$. Cette fois $d = \sqrt{-\Delta}$ est un réel strictement positif et $(id)^2 = -d^2 = \Delta$. Alors $u^2 - (id)^2 = (u - id)(u + id) = 0$. Ainsi $u = id$ ou $u = -id$ et $z = (-b \pm id)/(2a)$. Nous n'avons pas appliqué une racine carrée réelle à un nombre négatif.

Retrouver la factorisation. Dans chaque cas, les deux valeurs (éventuellement égales) ont pour somme $-b/a$ et produit c/a . Par distributivité, $a(z - z_1)(z - z_2) = az^2 - a(z_1 + z_2)z + az_1z_2 = az^2 + bz + c$. Le facteur a est indispensable pour retrouver le coefficient de z^2 .

Exemple | Contrôler somme et produit

Dans $z^2 - 4z + 13 = 0$, $a = 1$, $b = -4$ et $c = 13$. Donc $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 13 = 16 - 52 = -36$. Comme $\sqrt{-\Delta} = 6$, les racines sont $(4 + 6i)/2 = 2 + 3i$ et $(4 - 6i)/2 = 2 - 3i$.

Leur somme est $2 + 3i + 2 - 3i = 4$. Leur produit est $2^2 + 3^2 = 13$ par le produit de deux conjugués.

Pour contrôler la factorisation, posons $u = z - 2$: $(z - 2 - 3i)(z - 2 + 3i) = (u - 3i)(u + 3i) = u^2 - (3i)^2 = u^2 + 9$. En remplaçant u , $(z - 2)^2 + 9 = z^2 - 4z + 4 + 9 = z^2 - 4z + 13$.

✓ Propriété | Une racine fournit un facteur

Pour $n \geq 1$,

$$z^n - a^n = (z - a) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} a^k.$$

Si un polynôme P vérifie $P(a) = 0$, alors il existe un polynôme Q tel que $P(z) = (z - a)Q(z)$.

Démonstration | Deux preuves liées

1. Voir la compensation sur un cas. Pour $n = 3$,

$$(z - a)(z^2 + za + a^2) = z^3 + z^2a + za^2 - az^2 - a^2z - a^3 = z^3 - a^3.$$

Les termes z^2a et $-az^2$ s'annulent, tout comme za^2 et $-a^2z$, parce que la multiplication est commutative.

2. Écrire le même mécanisme pour tout n . Posons $S = \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} a^k$. Alors

$$zS = \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k} a^k, \quad aS = \sum_{j=1}^n z^{n-j} a^j.$$

La seconde écriture vient de $j = k + 1$. Pour les indices de 1 à $n - 1$, les deux sommes contiennent exactement les mêmes termes. Dans $zS - aS$, ceux-ci s'annulent ; il reste le terme d'indice 0 de la première, z^n , et l'opposé du terme d'indice n de la seconde, $-a^n$. D'où $(z - a)S = z^n - a^n$.

3. Appliquer cette identité au polynôme. Écrivons $P(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n$. Soustraire $P(a)$ annule les constantes et donne

$$P(z) - P(a) = \sum_{k=1}^n c_k(z^k - a^k).$$

Chaque parenthèse possède le facteur $z - a$ d'après ce que nous venons de prouver. On peut donc le mettre en facteur dans toute la somme : $P(z) - P(a) = (z - a)Q(z)$, où Q est une somme de polynômes. Si a est une racine, $P(a) = 0$ et cette égalité devient $P(z) = (z - a)Q(z)$. Si P a degré n et coefficient dominant non nul, le terme dominant de Q est c_nz^{n-1} : son degré est $n - 1$.

★ Théorème | Nombre de racines

Un polynôme non nul de degré n possède au plus n racines complexes distinctes.

Démonstration | Preuve par récurrence sur le degré

Ce que « au plus » signifie. Nous prouvons une borne : il peut y avoir moins de n racines distinctes. Nous ne cherchons pas à en fabriquer n .

Départ, degré 0. Un polynôme non nul de degré 0 est une constante $c \neq 0$. Quelle que soit la valeur de z , $P(z) = c$ ne vaut jamais zéro. Il a donc zéro racine.

Hypothèse de récurrence. Supposons que tout polynôme non nul de degré $n - 1$ a au plus $n - 1$ racines, et considérons P de degré $n \geq 1$.

S'il n'a aucune racine, la borne $0 \leq n$ est déjà satisfaite. Sinon choisissons une racine a . Le résultat précédent donne $P(z) = (z - a)Q(z)$ avec Q non nul de degré $n - 1$.

Prenons maintenant une autre racine $b \neq a$. Comme $P(b) = 0$, on a $(b - a)Q(b) = 0$. Le facteur $b - a$ est non nul ; son inverse permet donc de conclure $Q(b) = 0$. Ainsi toutes les racines de P autres que a sont parmi les racines de Q .

Par l'hypothèse, cette liste contient au plus $n - 1$ nombres distincts. En lui ajoutant éventuellement a , on compte au plus $1 + (n - 1) = n$ racines. La propriété se transmet au degré n et est donc établie à tous les degrés. On a exclu le polynôme nul parce que celui-ci s'annule pour tout complexe.

Cette borne ne concerne pas le polynôme nul. Elle ne dit pas, à elle seule, qu'un polynôme possède exactement n racines distinctes : $(z - 1)^3$ n'en a qu'une.

💡 Exemple | Degré trois avec une racine connue

Pour $P(z) = z^3 - z^2 + z - 1$, on évalue $P(1) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$: 1 est une racine. Pour faire apparaître $z - 1$, on écrit $z^3 - z^2 = z^2(z - 1)$ et $z - 1 = 1(z - 1)$. Donc $P(z) = (z^2 + 1)(z - 1)$. Un produit nul impose $z - 1 = 0$ ou $z^2 + 1 = 0$. La première branche donne $z = 1$. Dans la seconde, $z^2 + 1 = z^2 - i^2 = (z - i)(z + i)$, donc $z = i$ ou $z = -i$. Les solutions sont exactement 1, i , $-i$: la factorisation est une équivalence, donc aucune autre valeur n'a été perdue. La borne liée au degré 3 confirme le nombre maximal.

À toi d'essayer : Résoudre puis contrôler une factorisation

Résous $z^2 + 2z + 5 = 0$, puis retrouve le polynôme avec les racines.

Pour démarrer. Note $a = 1, b = 2, c = 5$ avant d'utiliser le discriminant.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 28](#) [Explication, p. 31](#)

3.7 Méthodes de contrôle et prolongement

Pourquoi une racine non réelle vient avec son conjugué. Écrivons $P(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ avec tous les c_k réels. La conjugaison conserve les sommes et les produits, et $\overline{c_k} = c_k$. Donc $\overline{P(z)} = \sum c_k \overline{z^k} = \sum c_k (\overline{z})^k = P(\overline{z})$. Si $P(r) = 0$, on en déduit $P(\overline{r}) = \overline{0} = 0$. Lorsque r n'est pas réel, r et $\overline{r}$ sont distincts.

D'où viennent les contrôles de Viète. Supposons $P(z) = a(z - r_1) \cdots (z - r_n)$, avec $a \neq 0$. Pour obtenir un terme en z^{n-1} en développant, on choisit z dans $n - 1$ facteurs et la constante $-r_k$ dans le dernier. Il y a un tel terme pour chaque k , donc le coefficient est $-a(r_1 + \cdots + r_n)$. Le comparer au coefficient c_{n-1} donne $\sum r_k = -c_{n-1}/a$.

Pour le terme constant, on doit choisir $-r_k$ dans chaque facteur. Le produit vaut $a(-1)^n r_1 \cdots r_n = c_0$, donc $\prod r_k = (-1)^n c_0/a$. Les racines sont comptées avec leurs répétitions. Ces identités vérifient une factorisation ; elles ne prouvent pas à elles seules que tous les nombres proposés sont des racines.

✂ Méthode | Racine carrée complexe, prolongement guidé

Remplacer une inconnue complexe par deux réels. Posons $z = x + iy$. Son carré est $(x^2 - y^2) + 2xyi$. Résoudre $z^2 = u + iv$ demande donc $x^2 - y^2 = u$ et $2xy = v$.

Obtenir aussi la somme des carrés. En élevant ces deux égalités au carré et en additionnant,

$$u^2 + v^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2.$$

Comme $x^2 + y^2 \geq 0$, on prend la racine réelle positive : $x^2 + y^2 = \sqrt{u^2 + v^2}$. Additionner à $x^2 - y^2 = u$ donne $2x^2 = \sqrt{u^2 + v^2} + u$; soustraire donne $2y^2 = \sqrt{u^2 + v^2} - u$.

Choisir les signes et vérifier. Pour $u = 3, v = 4$, la racine vaut 5, donc $x^2 = 4$ et $y^2 = 1$. Les possibilités sont $x = \pm 2, y = \pm 1$, mais $2xy = 4$ impose des signes identiques. Il reste $2 + i$ et $-2 - i$. Le carré du premier vaut $4 + 4i + i^2 = 3 + 4i$; le second est son opposé, donc a le même carré. Pour $v = 0$, il faut traiter $xy = 0$ sans diviser par une inconnue qui pourrait être nulle.

Par exemple, les racines carrées de $3 + 4i$ sont $2 + i$ et $-2 - i$. Tu peux vérifier directement leurs carrés. Pour une équation du second degré à coefficients complexes, compléter le carré fonctionne encore; en revanche le « signe du discriminant » n'a plus de sens.

4 Boîte à outils — choisir puis justifier

4.1 Une équation linéaire qui mélange deux écritures

 **Exemple | Résoudre** $(1 + i)z + 2\bar{z} = 4 + 2i$

Choix de méthode. Le conjugué interdit de regrouper les deux termes comme des multiples de z . Posons $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$ pour travailler avec deux réels.

Développons le premier produit : $(1 + i)(x + iy) = x + iy + ix + i^2y = (x - y) + i(x + y)$. Le second terme vaut $2x - 2iy$. Leur somme est $(3x - y) + i(x - y)$.

L'identification donne $3x - y = 4$ et $x - y = 2$. Soustrayons la seconde équation de la première : $(3x - y) - (x - y) = 4 - 2$, donc $2x = 2$ et $x = 1$. En reportant dans $x - y = 2$, $1 - y = 2$, donc $-y = 1$ et $y = -1$.

La solution candidate est $z = 1 - i$. Son conjugué est $1 + i$, et $(1 + i)(1 - i) = 1 - i^2 = 2$. Le membre gauche vaut donc $2 + 2(1 + i) = 4 + 2i$: la candidate convient. Les deux équations ont imposé une seule valeur de x puis de y , donc il n'y a pas d'autre solution.

4.2 Une équation de degré quatre qui se ramène au degré deux

 **Méthode | Reconnaître une équation biquadratique**

Lorsque seuls z^4, z^2 et une constante apparaissent, pose $u = z^2$. Résous l'équation en u , puis reviens à z pour chaque valeur obtenue. Ne confonds pas les solutions intermédiaires u avec les solutions finales z .

 **Exemple | Résoudre** $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$

Les puissances $z^4 = (z^2)^2$ et z^2 suggèrent de poser $u = z^2$. L'équation devient $u^2 + 5u + 4 = 0$. Le produit $(u + 1)(u + 4) = u^2 + 4u + u + 4 = u^2 + 5u + 4$ fournit une factorisation. Donc $u = -1$ ou $u = -4$.

Ce sont des valeurs de u , pas encore de z . Si $z^2 = -1$, alors $(z - i)(z + i) = 0$, d'où $z = \pm i$. Si $z^2 = -4$, alors $(z - 2i)(z + 2i) = 0$, d'où $z = \pm 2i$.

Les quatre solutions sont $-2i, -i, i, 2i$. Pour $z = \pm i$, $z^2 = -1$ et $z^4 = 1$, donc $1 - 5 + 4 = 0$. Pour $z = \pm 2i$, $z^2 = -4$ et $z^4 = 16$, donc $16 - 20 + 4 = 0$. Ces vérifications retrouvent l'équation initiale. La factorisation complète est $(z - i)(z + i)(z - 2i)(z + 2i)$.

4.3 Racine répétée et coefficients réels

Calculons $P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 4 = -1 - 3 + 4 = 0$. Le théorème de factorisation autorise donc un facteur $z - (-1) = z + 1$. Écrivons $P(z) = (z + 1)(Az^2 + Bz + C)$. En distribuant, on obtient $Az^3 + Bz^2 + Cz + Az^2 + Bz + C$, soit $Az^3 + (A + B)z^2 + (B + C)z + C$.

Dans $z^3 - 3z^2 + 0z + 4$, les coefficients imposent $A = 1$, $A + B = -3$, $B + C = 0$, $C = 4$. Avec $A = 1$, la deuxième équation donne $B = -4$; la troisième donne $C = 4$, conforme à la dernière. Donc $P(z) = (z + 1)(z^2 - 4z + 4) = (z + 1)(z - 2)^2$, car $(z - 2)^2 = z^2 - 4z + 4$. Un produit est nul lorsque l'un de ses facteurs est nul : les racines distinctes sont -1 et 2 . Le facteur $z - 2$ est présent deux fois, mais il donne deux fois le même nombre 2 .

Le terme « racine double » signifie ici que le facteur $z - 2$ apparaît deux fois dans cette factorisation. Il ne désigne pas deux nombres distincts. Le contrôle de Viète donne $-1 + 2 + 2 = 3$ lorsque l'on compte les répétitions, ce qui correspond à l'opposé du coefficient de z^2 .

À toi d'essayer : Réutiliser le changement d'inconnue

Résous $z^4 - 1 = 0$ par un changement d'inconnue.

Pour démarrer. Après $u = z^2$, distingue les valeurs de u des valeurs finales de z .

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 29](#) [Explication, p. 31](#)

À toi d'essayer : Corriger une fausse conjugaison

Un élève écrit $\overline{z+i} = \bar{z} + i$. Réfute puis corrige la formule.

Pour démarrer. Écris $i = 0 + 1i$ pour trouver son conjugué, puis applique la règle de la somme.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 29](#) [Explication, p. 32](#)

4.4 Un fil de décision à retenir

Une somme ou une égalité avec le conjugué appelle souvent la forme algébrique. Un polynôme avec une racine connue appelle une factorisation. Une équation ne comportant que des puissances paires peut appeler un changement d'inconnue. Dans tous les cas, noter le domaine puis vérifier les solutions termine le raisonnement : une suite de calculs sans conclusion n'est pas encore une résolution.

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases, 6 à 10 relient les notions et 11 à 15 demandent davantage d'initiative. Cherche d'abord, puis utilise un indice si tu en as besoin.

Exercice 1 — Lire une forme algébrique ★★☆☆

Pour $z = 2 - i(3 + 2i)$ et $w = (1 - i)^2$, détermine parties réelle et imaginaire, puis $z + w$.

Exercice 2 — Cycle des puissances ★★☆☆

Calcule i^{2026} , i^{2027} et i^{-3} .

Exercice 3 — Produits et carré ★★☆☆

Calcule $(3 + 2i)(1 - 4i)$, $(2 + i)^2$ et $(2 + i)(2 - i)$.

Exercice 4 — Diviser et vérifier ★★☆☆

Mets $\frac{2+3i}{1-i}$ sous forme algébrique et vérifie par multiplication.

Exercice 5 — Équation linéaire ★★☆☆

Résous $(2 - i)z = 5$ puis discute $az = 0$ selon le complexe a .

Exercice 6 — Une équation avec conjugué ★★☆☆

Résous $3z - \bar{z} = 4 + 8i$.

Exercice 7 — Ensemble de solutions ★★☆☆

Résous $z + \bar{z} = 4$, puis $z - \bar{z} = 4$.

Exercice 8 — Binôme et calcul astucieux ★★☆☆

Calcule $(1 + i)^6$ par le binôme puis par une puissance intermédiaire.

Exercice 9 — Second degré réel ★★☆☆

Résous $2z^2 - 4z + 10 = 0$ et factorise le polynôme dans $\mathbb{C}$.

Exercice 10 — Une racine connue ★★☆☆

Vérifie que 2 est racine de $P(z) = z^3 - 2z^2 + 4z - 8$, puis résous $P(z) = 0$.

Exercice 11 — Vrai ou faux : conjugaison ★★☆☆

Justifie ou réfute : a) $\overline{z^2} = (\bar{z})^2$; b) $z^2 = \bar{z}^2$ implique z réel ; c) $z\bar{z} = 0$ implique $z = 0$.

Exercice 12 — Quotient et domaine ★★☆☆

Résous $\frac{z+2}{z-i} = 2 - i$.

Exercice 13 — Racines carrées, prolongement ★★☆☆

Résous $z^2 = 5 + 12i$ en posant $z = x + iy$.

Exercice 14 — Coefficient à déterminer ★★ ★

Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $P_t(z) = z^3 + tz^2 + z + t$. Factorise puis détermine pour quels t les racines sont toutes distinctes.

Exercice 15 — Équation mixte non linéaire ★★ ★

Résous $z^2 = \bar{z}$ dans $\mathbb{C}$.

6 Problème — Pour aller plus loin

Ce prolongement est accessible à partir du cours : les résultats supplémentaires sont guidés, et leur mémorisation n'est pas un préalable. Tu peux répartir la recherche sur plusieurs séances.

Des complexes pour multiplier des sommes de deux carrés

On appelle entier de Gauss un complexe $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$. On définit $N(a + ib) = a^2 + b^2$. Le but est de démontrer une identité arithmétique et de comprendre un processus d'inversion. Durée indicative : 60 à 90 minutes.

Partie I — Un calcul qui conserve les entiers

1. Montre que la somme, le produit et le conjugué de deux entiers de Gauss sont encore des entiers de Gauss.
2. Montre que $N(z) = z\bar{z}$ et $N(zw) = N(z)N(w)$.
3. Dédus l'identité $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.

Partie II — Produire deux représentations

1. Utilise $(2 + i)(3 + 2i)$ pour écrire 65 comme somme de deux carrés.
2. Recommence avec $(2 + i)(3 - 2i)$. Pourquoi obtient-on une autre représentation ?
3. Explique pourquoi le produit d'un nombre fini de sommes de deux carrés est encore une somme de deux carrés.

Partie III — Quels éléments ont un inverse entier ?

1. Si $zw = 1$ avec z, w entiers de Gauss, démontre que $N(z) = 1$.
2. Résous $a^2 + b^2 = 1$ dans $\mathbb{Z}^2$ et déduis tous les entiers de Gauss dont l'inverse est encore un entier de Gauss.
3. Explique pourquoi $2 + i$, pourtant non nul, ne possède pas d'inverse entier de Gauss. Calcule son inverse dans $\mathbb{C}$.

Pistes pour avancer

Conjuge un produit dans I. Pour II, les deux produits ont la même norme mais pas les mêmes coordonnées. Dans III, un produit de deux entiers naturels vaut 1 seulement si chacun vaut 1.

7 Indices des exercices

Exercice 1

Développe avant de lire les parties.

Remplace chaque i^2 par -1 .

Exercice 2

Réduis les exposants modulo quatre.

Pour un exposant négatif, vérifie le produit avec la puissance positive.

Exercice 3

Utilise la distributivité.

Dans un carré, garde le terme croisé.

Exercice 4

Multiplie par le conjugué du dénominateur.

$$(1 - i)(1 + i) = 2.$$

Exercice 5

Vérifie le coefficient avant de diviser.

Le conjugué de $2 - i$ est $2 + i$.

Exercice 6

Pose $z = x + iy$.

Le signe moins porte sur tout $x - iy$.

Exercice 7

Compare séparément les deux parties.

Une équation réelle peut laisser la partie imaginaire libre.

Exercice 8

Les coefficients sont ceux de la ligne 6 de Pascal.

Commence aussi par $(1 + i)^2$.

Exercice 9

Calcule le discriminant.

Ne perds pas le coefficient dominant dans la factorisation.

Exercice 10

Regroupe les deux premiers et les deux derniers termes.

Résous ensuite $z^2 = -4$.

Exercice 11

Teste les affirmations sur un imaginaire pur.

Factorise la différence des carrés pour b).

Exercice 12

Commence par la valeur interdite.

Attention : $(2 - i)i = 1 + 2i$.

Exercice 13

Utilise la somme des carrés en plus de leur différence.

$$\sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

Exercice 14

Cherche un facteur commun après regroupement.

Compare le statut réel ou non réel des racines.

Exercice 15

Identifie les parties puis factorise la seconde équation.

Sépare les cas y nul et y non nul avant de diviser.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

- 1. Mettre z sous la forme $a+ib$.** Distribuer $-i$ donne $z = 2-3i-2i^2$. Puisque $i^2 = -1$, $-2i^2 = 2$; donc $z = 4-3i$. Sa partie réelle est 4 et sa partie imaginaire est -3 , le coefficient réel de i .
- 2. Traiter le carré.** $w = (1-i)(1-i) = 1-i-i+i^2 = 1-2i-1 = -2i = 0-2i$. Ses parties sont donc 0 et -2 .
- 3. Additionner les mêmes types de termes.** $z+w = (4-3i)+(0-2i) = (4+0)+(-3-2)i = 4-5i$. Ne pas additionner une partie réelle et une partie imaginaire comme si elles étaient du même type.

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Une puissance est un produit répété. Comme $i^4 = 1$, chaque groupe de quatre facteurs i peut être remplacé par 1. La division $2026 = 4 \times 506 + 2$ donne $i^{2026} = (i^4)^{506} i^2 = 1^{506}(-1) = -1$. De même, $2027 = 4 \times 506 + 3$ et $i^3 = i^2 i = -i$, donc $i^{2027} = -i$. Un contrôle : multiplier le premier résultat par i donne bien le second.
Un exposant négatif signifie un inverse : $i^{-3} = 1/i^3 = 1/(-i)$. Cherchons le nombre dont le produit par $-i$ vaut 1. Or $(-i)i = -i^2 = 1$, donc $i^{-3} = i$. Le signe moins dans l'exposant ne signifie pas l'opposé de la puissance.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Pour le premier produit, les quatre contributions sont $3 \times 1 = 3$, $3 \times (-4i) = -12i$, $2i \times 1 = 2i$ et $2i \times (-4i) = -8i^2 = 8$. Leur somme vaut $11 - 10i$.
Pour le carré, $(2+i)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times i + i^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$. Le terme $4i$ provient des deux produits croisés, chacun égal à $2i$.
Enfin $(2+i)(2-i) = 4 - 2i + 2i - i^2 = 4 + 1 = 5$. Ici les termes croisés se compensent parce que les signes sont opposés. C'est pourquoi le produit des conjugués est réel alors que le carré précédent ne l'est pas.

Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

Le dénominateur $1-i$ n'est pas nul, car sa partie réelle vaut 1. Son conjugué est $1+i$. Multiplions haut et bas par celui-ci :

$$\frac{2+3i}{1-i} = \frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}.$$

En haut : $2 + 2i + 3i + 3i^2 = 2 + 5i - 3 = -1 + 5i$. En bas : $1 - i^2 = 2$. Donc la forme algébrique est $-1/2 + (5/2)i$.

Vérifions explicitement : $(-1/2 + (5/2)i)(1-i) = -1/2 + (1/2)i + (5/2)i - (5/2)i^2 = (-1/2 + 5/2) + 3i = 2 + 3i$. Le produit redonne le numérateur initial, donc la division est correcte.

Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

Le coefficient $2 - i$ est non nul. Diviser les deux membres par lui donne $z = 5/(2 - i)$. Son conjugué est $2 + i$ et $(2 - i)(2 + i) = 4 - i^2 = 5$. Donc $z = 5(2 + i)/5 = 2 + i$. Contrôle : $(2 - i)(2 + i) = 5$. Dans $az = 0$, on ne peut pas diviser sans connaître a . Si $a \neq 0$, multiplier par $1/a$ donne $z = 0$, qui convient. Si $a = 0$, l'équation est $0z = 0$, vraie pour tout $z \in \mathbb{C}$. Ce deuxième cas ne doit pas être perdu par une division interdite.

Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

Posons $z = x + iy$, donc $\bar{z} = x - iy$. Le signe moins change les deux signes du conjugué :

$$3z - \bar{z} = 3x + 3iy - (x - iy) = 3x + 3iy - x + iy = 2x + 4iy.$$

Comparer avec $4 + 8i$ impose $2x = 4$ et $4y = 8$. La division par 2 donne $x = 2$; celle par 4 donne $y = 2$. Ainsi $z = 2 + 2i$.

Contrôle : $3(2 + 2i) - (2 - 2i) = 6 + 6i - 2 + 2i = 4 + 8i$. La solution est unique puisque l'identification a fixé les deux coordonnées.

Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

Écrivons $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$. Leur somme vaut $2x$: les iy se compensent. L'équation $z + \bar{z} = 4$ devient $2x + 0i = 4 + 0i$. Elle impose $x = 2$ et laisse y libre, car l'autre condition est $0 = 0$. Ainsi toutes les solutions sont $2 + iy$ pour $y \in \mathbb{R}$. Leur somme avec le conjugué vaut toujours 4, ce qui vérifie toute la famille.

Leur différence vaut $z - \bar{z} = x + iy - x + iy = 2iy$. La seconde équation exige donc $0 + 2yi = 4 + 0i$, d'où notamment $0 = 4$ pour les parties réelles. C'est impossible : aucune valeur de y ne peut réparer cette contradiction. Il n'y a aucune solution.

Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

Le binôme de rang 6 utilise les coefficients 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1 ; par exemple $\binom{6}{2} = 6 \times 5/2 = 15$ et $\binom{6}{3} = 6 \times 5 \times 4/(3 \times 2 \times 1) = 20$. On obtient

$$(1 + i)^6 = 1 + 6i + 15i^2 + 20i^3 + 15i^4 + 6i^5 + i^6.$$

Le cycle donne successivement $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$. Les termes réels totalisent $1 - 15 + 15 - 1 = 0$ et les autres $(6 - 20 + 6)i = -8i$.

Une méthode plus courte fournit un contrôle indépendant : $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$. Donc $(1 + i)^6 = ((1 + i)^2)^3 = (2i)^3 = 8i^3 = -8i$. Les deux calculs concordent.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Identifions $a = 2, b = -4, c = 10$. Le discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 10 = 16 - 80 = -64$. Comme il est négatif, on utilise $\sqrt{-\Delta} = 8$ et le facteur i :

$$z = \frac{4 \pm 8i}{4} = 1 \pm 2i.$$

Le polynôme garde son coefficient dominant 2 : $2(z - (1+2i))(z - (1-2i)) = 2(z-1-2i)(z-1+2i)$. Développons pour contrôler : le produit des deux parenthèses est $(z-1)^2 - (2i)^2 = (z-1)^2 + 4 = z^2 - 2z + 5$. Multiplier par 2 redonne $2z^2 - 4z + 10$. La somme des racines vaut 2 et leur produit $1 + 4 = 5$, en accord avec $-b/a = 2$ et $c/a = 5$.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Calculons la valeur demandée : $P(2) = 2^3 - 2 \times 2^2 + 4 \times 2 - 8 = 8 - 8 + 8 - 8 = 0$. Cela suggère un facteur $z - 2$.

Les deux premiers termes valent $z^2(z-2)$ et les deux derniers $4(z-2)$. En mettant le facteur commun en évidence, $P(z) = (z-2)(z^2 + 4)$. Ainsi $P(z) = 0$ équivaut à $z = 2$ ou $z^2 = -4$. Or $(2i)^2 = -4$, et $z^2 + 4 = (z-2i)(z+2i)$; la seconde branche donne $z = 2i$ ou $z = -2i$.

Les trois valeurs $2, 2i, -2i$ conviennent puisque chacune annule un facteur. Elles sont distinctes. La factorisation démontre qu'il n'y en a pas d'autres ; le degré 3 fournit également une borne de contrôle.

Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

a) Vrai. $z^2 = zz$, et conjuguer un produit revient à conjuguer chaque facteur : $\overline{z^2} = \overline{z} \overline{z} = (\overline{z})^2$.

b) Faux. Un seul contre-exemple suffit à réfuter une implication universelle. Prenons $z = i$: $z^2 = -1$, $\overline{z} = -i$ et $(\overline{z})^2 = (-i)^2 = -1$. L'égalité est vraie, mais i n'est pas réel. Pour comprendre toutes les possibilités, $z^2 - (\overline{z})^2 = (z - \overline{z})(z + \overline{z}) = 0$ impose $z = \overline{z}$ ou $z = -\overline{z}$, donc z réel ou imaginaire pur.

c) Vrai. Si $z = a + ib$, $z\overline{z} = a^2 + b^2$. Les deux carrés réels sont positifs ou nuls. Si leur somme est nulle, aucun ne peut être strictement positif, donc $a^2 = b^2 = 0$, puis $a = b = 0$ et $z = 0$.

Corrigé 12

 *Démonstration / Solution expliquée*

Domaine. Le dénominateur impose $z \neq i$. Sur ce domaine, multiplier par $z - i$ est réversible : $z + 2 = (2 - i)(z - i)$.

Développons : $(2 - i)(z - i) = (2 - i)z - 2i + i^2 = (2 - i)z - 1 - 2i$. Ajouter $1 + 2i$ puis soustraire z donne $3 + 2i = (1 - i)z$. Donc

$$z = \frac{3 + 2i}{1 - i} = \frac{(3 + 2i)(1 + i)}{2} = \frac{3 + 3i + 2i - 2}{2} = \frac{1 + 5i}{2}.$$

Sa partie réelle vaut $1/2$, donc cette valeur n'est pas i : le domaine est respecté. Pour vérifier, $z - i = (1 + 3i)/2$ et $(2 - i)(z - i) = (2 + 6i - i - 3i^2)/2 = (5 + 5i)/2 = z + 2$. L'équation initiale est donc bien satisfaite.

Corrigé 13

 *Démonstration / Solution expliquée*

Posons $z = x + iy$. L'égalité des parties donne $x^2 - y^2 = 5$ et $2xy = 12$. Pour obtenir $x^2 + y^2$, additionnons les carrés de ces deux égalités : $(x^2 + y^2)^2 = 25 + 144 = 169$. Puisque $x^2 + y^2 \geq 0$, cette somme vaut 13.

Additionner $x^2 + y^2 = 13$ et $x^2 - y^2 = 5$ donne $2x^2 = 18$, donc $x^2 = 9$ et $x = \pm 3$. Les soustraire donne $2y^2 = 8$, donc $y^2 = 4$ et $y = \pm 2$. Mais $xy = 6$ exige des signes identiques : seules les paires $(3, 2)$ et $(-3, -2)$ restent possibles.

Les candidats sont $3 + 2i$ et $-3 - 2i$. Le carré du premier vaut $9 + 12i + 4i^2 = 5 + 12i$; le second étant son opposé, son carré est identique. Les étapes ont listé tous les candidats puis les ont vérifiés : ce sont toutes les solutions.

Corrigé 14

 *Démonstration / Solution expliquée*

Regroupons les termes sans t puis ceux contenant t : $z^3 + z = z(z^2 + 1)$ et $tz^2 + t = t(z^2 + 1)$. D'où $P_t(z) = (z + t)(z^2 + 1) = (z + t)(z - i)(z + i)$.

Le produit nul donne les racines $-t, i, -i$. Une répétition ne pourrait venir que d'une égalité entre deux de ces nombres. Or $i \neq -i$, puisque leurs parties imaginaires sont 1 et -1 . Et $-t$ est réel, donc de partie imaginaire 0 : il n'est égal ni à i ni à $-i$.

Conclusion : pour *tout* $t \in \mathbb{R}$, les trois racines sont distinctes. La condition $t \in \mathbb{R}$ est utilisée précisément dans cette comparaison, pas dans la factorisation elle-même.

Corrigé 15

 *Démonstration / Solution expliquée*

Posons $z = x + iy$. Alors $z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$ et $\bar{z} = x - iy$. Nous devons résoudre $x^2 - y^2 = x$ et $2xy = -y$. La seconde s'écrit $2xy + y = y(2x + 1) = 0$. Il faut séparer les cas avant de diviser.

Si $y = 0$. La première égalité devient $x^2 = x$, soit $x(x - 1) = 0$. Donc $x = 0$ ou $x = 1$, donnant $z = 0$ et $z = 1$; chacun est égal à son carré et à son conjugué.

Si $y \neq 0$. On peut diviser $y(2x + 1) = 0$ par y , donc $x = -1/2$. La première devient $1/4 - y^2 = -1/2$, donc $y^2 = 3/4$ et $y = \pm\sqrt{3}/2$. Ces valeurs sont bien non nulles. Pour chacune, $x^2 - y^2 = 1/4 - 3/4 = -1/2 = x$ et $2xy = -y$: les deux conditions sont vérifiées.

L'ensemble des solutions est $\{0, 1, (-1 + i\sqrt{3})/2, (-1 - i\sqrt{3})/2\}$. Les cas $y = 0$ et $y \neq 0$ couvrent tous les réels, donc aucune branche n'a été oubliée.

9 Corrigé du problème

Partie I — Pourquoi les entiers restent entiers

1. Écrivons $z = a + ib$ et $w = c + id$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. La somme a pour coordonnées $a + c, b + d$; le produit a pour coordonnées $ac - bd, ad + bc$; le conjugué de z a pour coordonnées $a, -b$. Additionner, soustraire ou multiplier des entiers donne un entier. Chacune de ces expressions possède donc deux coordonnées entières : c'est exactement la définition d'un entier de Gauss.

2. Le calcul $(a + ib)(a - ib) = a^2 - iab + iab - i^2b^2 = a^2 + b^2$ donne $z\bar{z} = N(z)$. Pour le produit,

$$\begin{aligned} N(zw) &= (zw)\overline{zw} && \text{définition de } N, \\ &= zw\bar{z}\bar{w} && \text{conjugaison du produit,} \\ &= (z\bar{z})(w\bar{w}) && \text{commutativité et associativité,} \\ &= N(z)N(w). \end{aligned}$$

Nous avons réordonné les quatre facteurs pour former deux produits déjà connus.

3. À gauche, $N(zw) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$ puisque les coordonnées du produit sont $ac - bd, ad + bc$. À droite, $N(z)N(w) = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$. Leur égalité est donc l'identité demandée. Le calcul reste vrai avec des réels; l'hypothèse « entiers » garantit ici que les deux nouveaux carrés sont des carrés d'entiers.

Partie II — Deux calculs pour le même entier

1. Les normes des facteurs sont $N(2 + i) = 2^2 + 1^2 = 5$ et $N(3 + 2i) = 3^2 + 2^2 = 13$. Leur produit a donc pour norme $5 \times 13 = 65$. Calculons ses coordonnées :

$$(2 + i)(3 + 2i) = 6 + 4i + 3i + 2i^2 = 4 + 7i.$$

Ainsi $65 = N(4 + 7i) = 4^2 + 7^2 = 16 + 49$.

2. Le conjugué $3 - 2i$ a la même norme $3^2 + (-2)^2 = 13$. Mais le produit devient $6 - 4i + 3i - 2i^2 = 8 - i$, d'où $65 = 8^2 + (-1)^2 = 64 + 1$. Changer le signe de la deuxième coordonnée conserve les carrés de la norme, mais modifie les deux coordonnées du produit : c'est pourquoi on peut obtenir une autre représentation.

3. Pour un seul facteur, la propriété est donnée. Supposons que le produit des m premiers facteurs s'écrive $A^2 + B^2$ avec A, B entiers. Si le suivant est $c^2 + d^2$, l'identité de la partie I transforme leur produit en $(Ac - Bd)^2 + (Ad + Bc)^2$, encore deux carrés d'entiers. La propriété passe de m à $m + 1$, donc elle vaut pour tout nombre fini de facteurs par récurrence.

Partie III — L'ensemble où l'on inverse compte

1. Si $zw = 1$, la multiplicativité donne $N(z)N(w) = N(1) = 1$. Chaque norme est un entier naturel, car somme de carrés d'entiers. Aucune ne vaut zéro, sinon le produit serait zéro. Si l'une était au moins 2, le produit avec l'autre, au moins 1, serait au moins 2. Elles valent donc toutes deux 1.

2. Résolvons $a^2 + b^2 = 1$. Chaque carré est au plus 1, donc $a, b \in \{-1, 0, 1\}$. Si $a = 1$ ou -1 , son carré vaut 1 et $b^2 = 0$, donc $b = 0$. Si $a = 0$, $b^2 = 1$, donc $b = \pm 1$. Les seules possibilités sont $z = 1, -1, i, -i$. Vérifions la réciproque : $1 \times 1 = 1$, $(-1)(-1) = 1$, $i(-i) = -i^2 = 1$ et $(-i)i = 1$. Leurs inverses sont bien des entiers de Gauss. Nous avons prouvé la nécessité et la suffisance.

3. $N(2 + i) = 5 \neq 1$, donc la condition nécessaire précédente interdit un inverse entier de Gauss. Dans $\mathbb{C}$, en revanche, l'inverse existe : $1/(2 + i) = (2 - i)/[(2 + i)(2 - i)] = (2 - i)/5 = 2/5 - i/5$. Le produit par $2 + i$ vaut 1, mais $2/5$ et $-1/5$ ne sont pas des entiers. Le nombre est inversible dans $\mathbb{C}$ et pas dans l'ensemble plus restreint des entiers de Gauss.

10 Faire le point par une variante autonome

Essaie cette variante sans relire le corrigé précédent. Explique le choix de ta méthode, puis utilise les contrôles pour décider quelle notion retravailler.

À toi d'essayer : Une équation, trois contrôles

Résous $z^2 - 2z + 5 = 0$, factorise le polynôme et vérifie la somme et le produit des racines.

Pour démarrer. Calcule le discriminant, puis développe les facteurs que tu proposes pour les contrôler.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 29](#) [Explication, p. 32](#)

11 Fiche-mémoire

- $z = a + ib$; $\operatorname{Im}(z) = b \in \mathbb{R}$; $i^2 = -1$.
- $\bar{z} = a - ib$; $z\bar{z} = a^2 + b^2$; $1/z = \bar{z}/(a^2 + b^2)$ pour $z \neq 0$.
- La conjugaison respecte somme, produit, inverse et puissances entières.
- $(z + w)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} w^k$.
- Une équation avec le conjugué devient un système en x, y réels.
- Pour un second degré réel de discriminant négatif, les deux racines sont $(-b \pm i\sqrt{-\Delta})/(2a)$.
- Une racine a donne un facteur $z - a$; un polynôme non nul de degré n a au plus n racines distinctes.

Avant de conclure. Ai-je précisé le domaine ? Séparé tous les cas ? Conservé le coefficient dominant ? Vérifié les solutions dans l'équation initiale ?

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Identifier deux parties

Indice 1 — Une piste.

Utilise l'unicité de la forme algébrique.

Indice 2 — Un pas de plus.

Résous séparément $2x - 1 = 5$ et $y + 3 = -2$.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Séparer les deux informations

Indice 1 — Une piste.

Lis les parties réelle et imaginaire de chaque membre.

Indice 2 — Un pas de plus.

Les égalités à résoudre sont $x + 2 = 5$ et $y - 3 = -4$.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Le signe qui change tout

Indice 1 — Une piste.

Un carré de somme contient un terme croisé.

Indice 2 — Un pas de plus.

Écris $4 - 4i + i^2$ avant de simplifier.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Construire un inverse au lieu de le deviner

Indice 1 — Une piste.

Multiplie $1 + 2i$ par $1 - 2i$.

Indice 2 — Un pas de plus.

Le produit réel vaut 5 et est non nul.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Une somme toujours réelle**Indice 1 — Une piste.**

Un complexe est réel lorsqu'il est égal à son conjugué.

Indice 2 — Un pas de plus.

Conjugué la somme puis utilise la commutativité du produit.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Retrouver un coefficient du binôme**Indice 1 — Une piste.**

Considère quatre facteurs égaux à $z+w$.

Indice 2 — Un pas de plus.

Choisis les deux facteurs dans lesquels tu prends w .

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Une inconnue peut rester libre**Indice 1 — Une piste.**

Pose $z = x + iy$.

Indice 2 — Un pas de plus.

La différence vaut $2iy$; que devient x ?

[Revenir à la recherche, p. 10](#)

Résoudre puis contrôler une factorisation**Indice 1 — Une piste.**

Le discriminant est négatif.

Indice 2 — Un pas de plus.

Calcule $\Delta = 4 - 20$ puis complète le carré dans la factorisation.

[Revenir à la recherche, p. 12](#)

Réutiliser le changement d'inconnue**Indice 1 — Une piste.**

Pose $u = z^2$.

Indice 2 — Un pas de plus.

Résous d'abord $u^2 - 1 = 0$, puis les deux équations obtenues.

[Revenir à la recherche, p. 14](#)

Corriger une fausse conjugaison**Indice 1 — Une piste.**

Le conjugué porte sur chacun des deux termes.

Indice 2 — Un pas de plus.

Quel est le conjugué de i ?

[Revenir à la recherche, p. 14](#)

Une équation, trois contrôles**Indice 1 — Une piste.**

Le discriminant vaut -16 .

Indice 2 — Un pas de plus.

Le coefficient dominant vaut 1 ; le produit des racines doit valoir 5.

[Revenir à la recherche, p. 25](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Identifier deux parties

Deux complexes sont égaux quand leurs parties réelle et imaginaire sont égales. Ici cela donne $2x - 1 = 5$ et $y + 3 = -2$. Dans la première, ajouter 1 donne $2x = 6$, puis diviser par 2 donne $x = 3$. Dans la seconde, soustraire 3 donne $y = -5$. Vérification : $(2 \times 3 - 1) + i(-5 + 3) = 5 - 2i$. Pour la variante $-3 + i$, on lit $2x - 1 = -3$ et $y + 3 = 1$; donc $x = -1$, $y = -2$, et $-3 + i(-2 + 3) = -3 + i$.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Séparer les deux informations

Le membre gauche a pour parties $x + 2$ et $y - 3$; le droit a pour parties 5 et -4 . L'unicité de la forme algébrique impose donc les deux égalités $x + 2 = 5$ et $y - 3 = -4$. Soustraire 2 donne $x = 3$; ajouter 3 donne $y = -1$. En remplaçant, $3 + 2 + i(-1 - 3) = 5 - 4i$. Une seule égalité complexe porte ici deux informations réelles ; ne traiter que la première aurait laissé y indéterminé et n'aurait pas résolu la question.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Le signe qui change tout

La distributivité donne $2 \times 2 + 2 \times (-i) + (-i) \times 2 + (-i)(-i) = 4 - 2i - 2i + i^2$. Les termes croisés totalisent $-4i$, ils ne s'annulent pas. De plus $i^2 = -1$, donc le résultat est $3 - 4i$. Les deux erreurs étaient l'oubli des termes croisés et le remplacement de i^2 par $+1$. Le produit différent $(2 - i)(2 + i) = 4 + 2i - 2i - i^2 = 5$ explique d'où peut venir la confusion.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Construire un inverse au lieu de le deviner

Le conjugué change le signe de la partie imaginaire. Le produit vaut $1 - 2i + 2i - 4i^2 = 1 + 4 = 5$. Nous avons donc trouvé un nombre, $1 - 2i$, dont le produit par $1 + 2i$ vaut 5 au lieu de 1. Il suffit de le diviser par 5 : $w = (1 - 2i)/5$. Le contrôle donne $(1 + 2i)w = 5/5 = 1$. Cette division est permise car $5 \neq 0$. En général le dénominateur est $a^2 + b^2$; si $a + ib \neq 0$, au moins un des deux carrés est strictement positif, donc la somme n'est pas nulle.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Une somme toujours réelle

Posons $S = z\bar{w} + \bar{z}w$. Conjuguer une somme conjugue chaque terme, et conjuguer un produit conjugue ses deux facteurs. Donc $\overline{S} = \overline{z\bar{w}} + \overline{\bar{z}w} = \bar{z}w + z\bar{w}$. Nous avons utilisé $\overline{\bar{w}} = w$ et $\overline{\bar{z}} = z$. Les deux termes sont ceux de S dans l'ordre inverse, donc $\overline{S} = S$. Si $S = u + iv$, cette égalité signifie $u - iv = u + iv$, donc $-v = v$, puis $v = 0$. C'est exactement dire que S est réel. En coordonnées, les parties imaginaires de $z\bar{w}$ et $\bar{z}w$ sont opposées ; les parties réelles valent chacune $ac + bd$, donnant $S = 2(ac + bd)$.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Retrouver un coefficient du binôme

Développer $(z + w)^4$ signifie choisir z ou w dans chacun des quatre facteurs puis additionner tous les produits. Pour avoir z^2w^2 , il faut choisir w dans exactement deux positions. Les paires possibles sont $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)$: six choix. Les autres positions fournissent z . Comme le produit est commutatif, chacun de ces six produits vaut z^2w^2 . En les additionnant, on obtient $6z^2w^2$. Le coefficient 6 compte ces six contributions, ce n'est pas un exposant supplémentaire.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Une inconnue peut rester libre

Le conjugué est $x - iy$. Donc $z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = x + iy - x + iy = 2iy$. Comparer avec $6i = 0 + 6i$ donne $0 = 0$ pour la partie réelle et $2y = 6$ pour l'imaginaire. On obtient $y = 3$, mais aucune condition sur x : l'égalité $0 = 0$ est vraie quel que soit x . Les solutions sont donc tous les nombres $x + 3i$ avec $x \in \mathbb{R}$. Pour tout réel x , $(x + 3i) - (x - 3i) = 6i$, ce qui vérifie la famille entière. Il y en a une infinité, par exemple $3i, 1 + 3i, -2 + 3i$.

[Revenir à la recherche, p. 10](#)

Résoudre puis contrôler une factorisation

Le discriminant vaut $2^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16$. Donc $\sqrt{-\Delta} = 4$ et les racines sont $(-2 \pm 4i)/2 = -1 \pm 2i$. Chaque facteur est z moins une racine : $z - (-1 + 2i) = z + 1 - 2i$ et $z - (-1 - 2i) = z + 1 + 2i$. Le produit vaut $(z + 1)^2 - (2i)^2 = (z + 1)^2 + 4 = z^2 + 2z + 1 + 4 = z^2 + 2z + 5$. Le développement retrouve tous les coefficients, donc contrôle à la fois les signes et la constante.

[Revenir à la recherche, p. 12](#)

Réutiliser le changement d'inconnue

Comme $z^4 = (z^2)^2$, la substitution $u = z^2$ transforme l'équation en $u^2 - 1 = 0$. La différence de carrés donne $(u - 1)(u + 1) = 0$, donc $u = 1$ ou $u = -1$. Pour $u = 1$, $z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1) = 0$, donc $z = 1$ ou -1 . Pour $u = -1$, $z^2 + 1 = (z - i)(z + i) = 0$, donc $z = i$ ou $-i$. Vérification : les quatrièmes puissances de $1, -1$ valent 1 , et celles de $i, -i$ valent aussi 1 puisque leurs carrés valent -1 . Les quatre candidats conviennent et les deux branches épuisent les possibilités.

[Revenir à la recherche, p. 14](#)

Corriger une fausse conjugaison

Conjuguer $a + ib$ donne $a - ib$. En particulier, $\bar{i} = -i$, et non i . La conjugaison d'une somme donne donc $\overline{z + i} = \bar{z} + \bar{i} = \bar{z} - i$. Pour réfuter la formule proposée, prenons $z = 0$: le membre gauche est $\bar{i} = -i$, tandis que le droit annoncé est $\bar{0} + i = i$. Ces nombres ont des parties imaginaires différentes, donc ne sont pas égaux. Le contre-exemple réfute la mauvaise règle ; la propriété de la somme démontre la bonne pour tout z .

[Revenir à la recherche, p. 14](#)

Une équation, trois contrôles

Les coefficients sont $a = 1, b = -2, c = 5$, donc $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16$. Les racines sont $(2 \pm 4i)/2 = 1 \pm 2i$. Le coefficient dominant étant 1, $P(z) = (z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i)$. Pour le vérifier, le produit vaut $(z - 1)^2 - (2i)^2 = (z - 1)^2 + 4 = z^2 - 2z + 5$. La somme des racines est $1 + 2i + 1 - 2i = 2 = -b/a$. Leur produit est $(1 + 2i)(1 - 2i) = 1 + 4 = 5 = c/a$. Si un contrôle échoue, reviens au calcul concerné : le signe de b pour la somme, la règle $i^2 = -1$ pour le produit.

[Revenir à la recherche, p. 25](#)