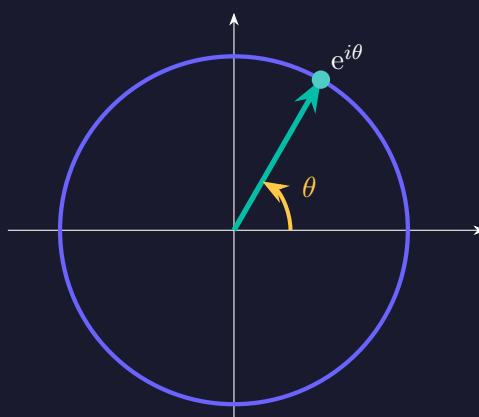


Nombres complexes

Module et trigonométrie

Module ■ Argument ■ Euler et Moivre



$$\cos \theta + i \sin \theta$$

Terminale — Option Mathématiques expertes — Programme officiel

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	🔍 Pourquoi ce chapitre ?	3
1.1	Le problème fondamental : calculer sans tout développer	3
2	🧠 L'idée avant la formule	3
2.1	La distance ne contient pas toute l'information	3
2.2	Pourquoi plusieurs angles peuvent convenir	3
2.3	Multiplier par i fournit un premier indice	4
3	🎓 Le cours formel	4
3.1	Le module : une distance, pas un signe	4
3.2	Arguments et forme trigonométrique	5
3.3	Démontrer les formules d'addition	6
3.4	Exponentielle imaginaire et choix d'une forme	8
3.5	Moivre, Euler et linéarisation	9
3.6	Inégalité triangulaire : un prolongement démontré	11
4	🧰 Boîte à outils — passer d'une forme à l'autre	12
4.1	Quotient exact et angle remarquable	12
4.2	Argument d'une somme : distinguer les signes	12
4.3	Linéariser un produit de carrés	12
5	✎ Exercices progressifs	14
6	🚀 Problème — Pour aller plus loin	16
7	Indices des exercices	17
8	✅ Corrigés détaillés	19
9	Corrigé du problème	23
10	Faire le point par une variante autonome	25
11	Fiche-mémoire	26
12	Indices des pauses et des preuves	27
13	Explications des pauses et des preuves	30

1 ? Pourquoi ce chapitre ?

1.1 Le problème fondamental : calculer sans tout développer

Tu peux développer $(1+i)^{20}$, mais cette méthode cache sa structure. Le carré $2i$ suggère déjà un raccourci. Nous allons construire un langage où une multiplication devient deux opérations simples : multiplier des longueurs et additionner des angles. Il servira aussi à expliquer les identités trigonométriques.

Intuition | Deux descriptions du même point

Pour retrouver un point, tu peux donner ses coordonnées horizontale et verticale, ou une distance à l'origine et une direction. Aucune description n'est meilleure en toutes circonstances : l'addition préfère les coordonnées ; les produits et les puissances préfèrent souvent distance et direction.

Prérequis. Le calcul complexe de la fiche 1, le cercle trigonométrique, les angles en radians, les valeurs de $\cos$ et $\sin$ pour $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$, et le produit scalaire de deux vecteurs du plan.

Méthode | Objectifs

Calculer un module ; choisir un argument ; passer entre trois formes ; justifier les formules d'addition ; transformer des produits et puissances trigonométriques ; contrôler une réponse grâce au module.

L'inégalité triangulaire et les sommes trigonométriques finales sont des prolongements guidés. Les formules d'Euler, de Moivre, d'addition et de duplication font partie du cours.

Méthode | Comment travailler cette fiche

Commence par l'idée avant la formule, puis travaille une notion à la fois. Dans le cours, reformule la définition avec tes mots et refais l'exemple sans regarder la dernière ligne. Les pauses te proposent une question, deux indices graduels et une explication ; tu peux chercher avec une aide sans renoncer au raisonnement.

Après le cours, la boîte à outils relie plusieurs notions dans des méthodes commentées. Les exercices passent des bases aux questions d'initiative. Si tu bloques, prends d'abord un indice ; après le corrigé, explique pourquoi la méthode convient et refais une variante. Le problème final construit un approfondissement à partir du cours, puis une dernière activité te permet de faire le point.

2 L'idée avant la formule

2.1 La distance ne contient pas toute l'information

Les points d'affixes $1+i$ et $-1-i$ sont à la même distance de l'origine. Pour les distinguer, il faut préciser une direction. Le théorème de Pythagore donne la distance $\sqrt{2}$; le cercle trigonométrique donne des angles respectifs $\pi/4$ et $-3\pi/4$.

2.2 Pourquoi plusieurs angles peuvent convenir

Faire un tour complet ne change pas le point. Les angles $\pi/4$ et $\pi/4 + 2\pi$ décrivent donc la même direction. Nous dirons « un argument », puis préciserons un intervalle si une réponse unique est demandée. L'origine n'a pas de direction : son module existe, son argument n'existe pas.

2.3 Multiplier par i fournit un premier indice

Le calcul $i(a + ib) = -b + ia$ transforme (a, b) en $(-b, a)$: c'est un quart de tour direct. Multiplier par 2 double toutes les distances à l'origine. Le produit $2i$ réalise ces deux effets. La forme exponentielle généralisera cette observation à n'importe quel angle et n'importe quel facteur positif.

✂ Méthode | Comment aborder les démonstrations

Les formules d'addition seront d'abord démontrées par le produit scalaire. Elles justifieront ensuite la règle de multiplication des exponentielles imaginaires. Cet ordre évite de justifier une formule par une autre qui dépend déjà d'elle. À chaque résultat, demande-toi quelles propriétés ont réellement été établies.

3 Le cours formel

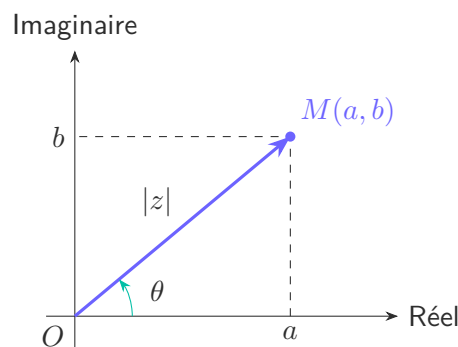
3.1 Le module : une distance, pas un signe

Définition | Module

Dans un repère orthonormé, le complexe $z = a + ib$ est représenté par le point $M(a, b)$. Son module est la distance OM :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Le module est un réel positif ou nul. Il vaut zéro exactement lorsque $z = 0$.



La figure illustre un point du premier quadrant ; les définitions restent valables dans les autres quadrants. Le module ne fournit pas le quadrant : $3 + 4i$ et $-3 - 4i$ ont tous deux pour module 5.

Propriété | Propriétés

Pour tous complexes z, w , $|\bar{z}| = |z|$, $|-z| = |z|$, $|z|^2 = z\bar{z}$ et $|zw| = |z||w|$. Pour $w \neq 0$, $|z/w| = |z|/|w|$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$; la formule s'étend à $n \in \mathbb{Z}$ si $z \neq 0$.

 Démonstration | Module d'un produit et d'une puissance

Point de départ. Pour $u = a + ib$, $u\bar{u} = a^2 + b^2 = |u|^2$. Nous utilisons cette égalité pour calculer des carrés, plus simples à manipuler que les racines.

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= (zw)\overline{zw} \\ &= zw\bar{z}\bar{w} \\ &= (z\bar{z})(w\bar{w}) \\ &= |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2. \end{aligned}$$

Les étapes utilisent successivement la formule précédente, la conjugaison du produit, puis le réordonnement de facteurs complexes. Deux réels de même carré ne sont pas toujours égaux : 2 et -2 ont le même carré. Ici $|zw|$ et $|z||w|$ sont tous deux positifs ou nuls ; c'est cette information qui permet de conclure $|zw| = |z||w|$.

Inverse et quotient. Si $w \neq 0$, $|w| > 0$. Appliquons la propriété au produit $w(1/w) = 1 : |w||1/w| = |1| = 1$. En divisant par $|w|$, $|1/w| = 1/|w|$. Puis $z/w = z(1/w)$ donne $|z/w| = |z|/|w|$.

Puissances. Pour $n = 0$, les deux expressions valent 1. Supposons $|z^n| = |z|^n$. Alors $|z^{n+1}| = |z^n z| = |z^n||z| = |z|^n|z| = |z|^{n+1}$. Cette récurrence prouve la propriété pour tous les entiers naturels. Pour $n = -m < 0$, avec $z \neq 0$, $|z^{-m}| = |(1/z)^m| = |1/z|^m = |z|^{-m}$.

 Exemple | Contrôle sans développement

Au numérateur, $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Au dénominateur, $|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, non nul. La propriété du quotient donne un module $5/\sqrt{2} = 5\sqrt{2}/2$.

Calculons aussi le quotient : $(3+4i)(1+i)/2 = (-1+7i)/2$. Son module vaut $\sqrt{(-1/2)^2 + (7/2)^2} = \sqrt{50/4} = 5\sqrt{2}/2$. Les deux méthodes concordent. Ce contrôle peut révéler une erreur, mais un module correct ne prouve pas à lui seul que l'argument est correct.

À toi d'essayer : Une distance ne garde pas le signe

Calcule les modules de -3 , $-3 + 4i$ et 0 . Lequel de ces nombres possède un argument ?

Pour démarrer. Écris chaque nombre sous la forme $a + ib$, même sur un axe.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 27](#) [Explication, p. 30](#)

3.2 Arguments et forme trigonométrique

 Définition | Arguments d'un complexe non nul

Un argument de $z \neq 0$ est une mesure θ de l'angle orienté entre l'axe réel positif et le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Si $r = |z|$, alors

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Tous les arguments de z sont les nombres $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On écrit $\arg z = \theta \pmod{2\pi}$. Le complexe zéro n'a pas d'argument.

✂ Méthode | Déterminer un argument

Calcule $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, puis identifie simultanément $\cos \theta = a/r$ et $\sin \theta = b/r$. Repère le quadrant grâce aux signes de a, b . Donne un angle et rappelle que les autres s'obtiennent en ajoutant $2k\pi$.

💡 Exemple | Un quadrant à ne pas perdre

Pour $z = -\sqrt{3} + i$, le module est $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$. Diviser les coordonnées par r donne $\cos \theta = -\sqrt{3}/2$ et $\sin \theta = 1/2$. L'angle de référence $\pi/6$ a les valeurs absolues recherchées, mais son cosinus est positif. Le point est à gauche et au-dessus de l'origine : nous choisissons $\theta = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$. Alors $2(\cos \theta + i \sin \theta) = -\sqrt{3} + i$, ce qui vérifie les deux coordonnées. L'angle $-\pi/6$ aurait donné $\sqrt{3} - i$, le point opposé.

⚠ Attention | Argument et arctangente

La seule égalité $\tan \theta = b/a$ ne suffit pas à choisir le quadrant et ne s'utilise pas si $a = 0$. Sur une machine, la fonction `atan2(b,a)` tient compte des deux coordonnées. Un affichage décimal n'est pas une preuve d'une valeur exacte.

À toi d'essayer : Choisir les bons signes

Donne une forme trigonométrique de $-1 - i\sqrt{3}$.

Pour démarrer. Calcule le rayon puis divise chacune des deux coordonnées par lui.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 27](#) [Explication, p. 30](#)

À toi d'essayer : Le quadrant décide de l'angle

Trouve un argument de $-\sqrt{3} + i$ et écris sa forme trigonométrique.

Pour démarrer. Un cosinus négatif et un sinus positif imposent le deuxième quadrant.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 27](#) [Explication, p. 30](#)

3.3 Démontrer les formules d'addition

★ Théorème | Addition et différence

Pour tous réels a, b ,

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

 Démonstration | Du produit scalaire à l'addition

Deux manières de calculer le même nombre. Les vecteurs $u = (\cos a, \sin a)$ et $v = (\cos b, \sin b)$ ont pour longueur 1, car $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. La formule en coordonnées du produit scalaire est $u \cdot v = u_x v_x + u_y v_y$; ici elle donne $\cos a \cos b + \sin a \sin b$. La formule géométrique est $u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos(\text{angle})$. L'angle entre leurs directions est $a - b$ à un signe près, sans effet sur le cosinus. Elle donne donc $1 \times 1 \times \cos(a - b)$. Les deux calculs prouvent la première identité.

Passer de la différence à la somme. Remplaçons b par $-b$:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Nous avons utilisé la parité du cosinus et l'impairité du sinus, visibles par symétrie sur le cercle.

Obtenir le sinus. Le sinus d'un angle est le cosinus de son complémentaire. Donc

$$\begin{aligned} \sin(a + b) &= \cos((\pi/2 - a) - b) \\ &= \cos(\pi/2 - a) \cos b + \sin(\pi/2 - a) \sin b \\ &= \sin a \cos b + \cos a \sin b. \end{aligned}$$

La deuxième ligne applique la formule de différence déjà démontrée; la troisième utilise $\cos(\pi/2 - a) = \sin a$ et $\sin(\pi/2 - a) = \cos a$. Enfin remplacer b par $-b$ donne $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$. Aucune des quatre identités n'a été déduite d'un simple exemple numérique.

 Propriété | Duplication

En prenant $b = a$, on obtient

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a, \quad \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a.$$

Ainsi $\cos^2 a = (1 + \cos 2a)/2$ et $\sin^2 a = (1 - \cos 2a)/2$.

 Exemple | Une valeur exacte nouvelle

L'angle $\pi/12$ est $\pi/4 - \pi/6$, puisque $3\pi/12 - 2\pi/12 = \pi/12$. La formule de différence donne

$$\cos(\pi/12) = \cos(\pi/4) \cos(\pi/6) + \sin(\pi/4) \sin(\pi/6).$$

Remplaçons les valeurs connues : $(\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2) + (\sqrt{2}/2)(1/2) = \sqrt{6}/4 + \sqrt{2}/4 = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$. Le signe plus vient de la formule de *différence* pour le cosinus. Le résultat est positif, comme attendu pour un angle entre 0 et $\pi/2$.

À toi d'essayer : Reconstruire une formule de duplication

Déduis $\cos(2t)$ et $\sin(2t)$ des formules d'addition, puis vérifie en $t=0$.

Pour démarrer. Remplace a et b par t dans chaque formule, sans sauter de terme.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 27 Explication, p. 30

3.4 Exponentielle imaginaire et choix d'une forme

Définition | Une notation fondée sur la trigonométrie

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Ce nombre est de module 1. Tout complexe non nul possède une forme exponentielle $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z| > 0$.

Cette notation est définie ici à partir du cercle ; elle n'exige pas un cours sur une fonction exponentielle de variable complexe. Le module et l'argument jouent des rôles différents : r est unique, θ l'est seulement modulo 2π .

★ Théorème | Relation fonctionnelle

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$. Donc $(e^{ia})^{-1} = e^{-ia}$ et $\overline{e^{ia}} = e^{-ia}$.

Démonstration | Justification

La définition $e^{it} = \cos t + i \sin t$ transforme la question en un produit complexe ordinaire. Distribuons ses quatre termes :

$$\begin{aligned} e^{ia}e^{ib} &= \cos a \cos b + i \cos a \sin b + i \sin a \cos b + i^2 \sin a \sin b \\ &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + i(\cos a \sin b + \sin a \cos b). \end{aligned}$$

Le remplacement de i^2 par -1 explique le signe moins. Les formules d'addition identifient la première parenthèse à $\cos(a+b)$, la seconde à $\sin(a+b)$. Leur combinaison est, par définition, $e^{i(a+b)}$.

Pour $b = -a$, le produit vaut $e^0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$. Donc e^{-ia} est l'inverse de e^{ia} . D'autre part, $\overline{e^{ia}} = \cos a - i \sin a = \cos(-a) + i \sin(-a) = e^{-ia}$. Cela démontre la formule de conjugaison sans la confondre avec un changement de signe de tout le nombre.

Méthode | Produit et quotient

Si $z = re^{i\alpha}$, $w = se^{i\beta}$ avec $r, s > 0$, alors $zw = rse^{i(\alpha+\beta)}$ et $z/w = (r/s)e^{i(\alpha-\beta)}$. Les modules se multiplient ou se divisent ; les arguments s'ajoutent ou se soustraient modulo 2π .

L'ensemble $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ est stable par produit et inverse : le résultat reste dans cet ensemble. Ses éléments sont exactement les $e^{i\theta}$.

💡 Exemple | Changer de forme au bon moment

Pour $1+i\sqrt{3}$, le module vaut $\sqrt{1+3} = 2$ et les coordonnées divisées par 2 sont $1/2, \sqrt{3}/2$, celles de l'angle $\pi/3$. Donc $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$. La puissance devient $2^5 e^{5i\pi/3} = 32(\cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3))$. Comme $5\pi/3 = 2\pi - \pi/3$, le cosinus vaut $1/2$ et le sinus $-\sqrt{3}/2$, donnant $16 - 16i\sqrt{3}$. Le module de ce résultat est $\sqrt{256 + 768} = 32$, égal à 2^5 . Pour une somme, on préfère souvent additionner les coordonnées : $(1+i) + (2-i) = (1+2) + i(1-1) = 3$. Il n'existe pas de règle générale consistant à additionner les modules et les arguments d'une somme.

À toi d'essayer : Choisir une forme selon l'opération

Pour $z = 2e^{i\pi/3}$ et $w = 3e^{i\pi/6}$, calcule zw puis $z+w$. Quelle forme simplifie chaque opération ?

Pour démarrer. Pour la somme seulement, remplace chaque exponentielle par cosinus plus i sinus.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 28 Explication, p. 31

3.5 Moivre, Euler et linéarisation

★ Théorème | Moivre

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{R}$,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

✍ Démonstration | Démonstration de Moivre, rang après rang

Au rang 0, $(e^{i\theta})^0 = 1 = e^{i0\theta}$. Supposons $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. Alors $(e^{i\theta})^{n+1} = (e^{i\theta})^n e^{i\theta} = e^{in\theta} e^{i\theta} = e^{i(n+1)\theta}$ par la relation fonctionnelle. La récurrence prouve tous les rangs naturels. Si $n = -m < 0$, $(e^{i\theta})^{-m} = (e^{-i\theta})^m = e^{-im\theta}$, en utilisant l'inverse puis le résultat positif. Remplacer chaque exponentielle par sa définition trigonométrique donne exactement la formule de Moivre.

💡 Exemple | Angle triple

Posons $c = \cos x$ et $s = \sin x$ pour alléger le calcul. Le binôme donne $(c + is)^3 = c^3 + 3c^2is + 3c(is)^2 + (is)^3$. Or $(is)^2 = -s^2$ et $(is)^3 = -is^3$. Donc

$$(c + is)^3 = (c^3 - 3cs^2) + i(3c^2s - s^3).$$

Moivre écrit aussi ce nombre $\cos 3x + i \sin 3x$. L'unicité de la forme algébrique permet d'identifier séparément les deux parties.

Pour la partie réelle, $s^2 = 1 - c^2$ donne $c^3 - 3c(1 - c^2) = c^3 - 3c + 3c^3 = 4c^3 - 3c$. Ainsi $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Pour la partie imaginaire, $c^2 = 1 - s^2$ donne $3(1 - s^2)s - s^3 = 3s - 3s^3 - s^3 = 3s - 4s^3$. Ainsi $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

★ Théorème | Euler

La définition et les symétries du cercle donnent $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ et $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$. Leur somme est $2 \cos x$, puisque les parties imaginaires s'annulent. Leur différence est $2i \sin x$, puisque les parties réelles s'annulent et que $i \sin x - (-i \sin x) = 2i \sin x$. Diviser la somme par 2, puis la différence par $2i \neq 0$, donne

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

✂ Méthode | Linéariser une puissance

Linéariser signifie écrire une puissance ou un produit trigonométrique comme somme de sinus et de cosinus d'angles multiples. Remplace par Euler, développe avec le binôme, regroupe les exponentielles conjuguées et reviens à cos et sin.

💡 Exemple | Une puissance quatrième

Euler donne $2 \cos x = u + u^{-1}$ avec $u = e^{ix} \neq 0$. Élever à la puissance 4 donne $16 \cos^4 x = (u + u^{-1})^4$. Le binôme et $u^p u^q = u^{p+q}$ donnent

$$(u + u^{-1})^4 = u^4 + 4u^3 u^{-1} + 6u^2 u^{-2} + 4u(u^{-1})^3 + u^{-4} = u^4 + 4u^2 + 6 + 4u^{-2} + u^{-4}.$$

Regroupons $u^4 + u^{-4} = 2 \cos 4x$ et $u^2 + u^{-2} = 2 \cos 2x$. Alors $16 \cos^4 x = 2 \cos 4x + 8 \cos 2x + 6$, donc $\cos^4 x = (3 + 4 \cos 2x + \cos 4x)/8$.

Une primitive est $F(x) = 3x/8 + \sin 2x/4 + \sin 4x/32$: en dérivant, $F'(x) = 3/8 + (2/4) \cos 2x + (4/32) \cos 4x = (3 + 4 \cos 2x + \cos 4x)/8$. Les facteurs 2 et 4 de la dérivée d'une composée expliquent les dénominateurs de la primitive.

À toi d'essayer : Un produit devient une somme

Démontre $2 \cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$.

Pour démarrer. Écris les deux formules de cosinus l'une sous l'autre avant d'additionner.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 28](#) [Explication, p. 31](#)

À toi d'essayer : Linéariser en comprenant l'objectif

Retrouve $\cos^2 t = (1 + \cos(2t))/2$ à partir d'Euler. Pourquoi parle-t-on de linéarisation ?

Pour démarrer. Dans le carré, garde le terme croisé ; les deux exponentielles inverses ont pour produit 1.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 28 Explication, p. 31

3.6 Inégalité triangulaire : un prolongement démontré

★ Théorème | Comparer trois longueurs

Pour $z, w \in \mathbb{C}$, $|z + w| \leq |z| + |w|$ et $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

Démonstration | Preuve et cas d'égalité

Une première comparaison réelle. Pour $u = s + it$, $s \leq |s|$ et $|s| \leq \sqrt{s^2 + t^2}$, car $t^2 \geq 0$. Donc $\operatorname{Re}(u) \leq |u|$. L'égalité exige à la fois $s \geq 0$ et $t = 0$: u doit être réel positif ou nul.

Développer le carré du module. Utilisons $|v|^2 = v\bar{v}$:

$$|z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w.$$

Les deux derniers termes sont conjugués. Leur somme vaut donc $2\operatorname{Re}(z\bar{w})$. Par la comparaison précédente et la propriété du module d'un produit,

$$|z + w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2.$$

Les deux quantités dont nous comparons les carrés sont positives ou nulles. La racine carrée est croissante sur cet ensemble, d'où $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Quand ne perd-on rien ? La seule inégalité introduite concerne $\operatorname{Re}(z\bar{w})$. Il y a donc égalité exactement lorsque $z\bar{w}$ est réel positif ou nul. Si les deux nombres sont non nuls, écrivons $z = re^{i\alpha}$ et $w = se^{i\beta}$: $z\bar{w} = rse^{i(\alpha-\beta)}$ est réel strictement positif exactement si $\alpha - \beta \in 2\pi\mathbb{Z}$. Les directions et les sens coïncident. Si l'un est nul, l'égalité se lit directement.

La seconde inégalité. Dans $z = (z - w) + w$, appliquons celle déjà prouvée : $|z| \leq |z - w| + |w|$, donc $|z| - |w| \leq |z - w|$. En échangeant z, w , $|w| - |z| \leq |w - z| = |z - w|$. Ainsi un réel et son opposé sont tous deux au plus $|z - w|$, ce qui signifie $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

Ne remplace jamais en général $|z + w|$ par $|z| + |w|$: avec $z = 1, w = -1$, le premier vaut 0 et le second 2.

À toi d'essayer : L'égalité n'est pas systématique

Compare $|1 + i|$ et $|1| + |i|$. Donne ensuite un exemple non nul où l'inégalité triangulaire est une égalité.

Pour démarrer. Calcule séparément les trois modules ; ne distribue pas le module sur une somme.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 28 Explication, p. 31

4 Boîte à outils — passer d'une forme à l'autre

4.1 Quotient exact et angle remarquable

Exemple | Deux calculs du même nombre

Pour $z = (1 + i)/(\sqrt{3} + i)$, le numérateur a pour module $\sqrt{2}$ et argument $\pi/4$; le dénominateur a pour module 2 et argument $\pi/6$. Le quotient est donc $(\sqrt{2}/2)e^{i(\pi/4 - \pi/6)} = (\sqrt{2}/2)e^{i\pi/12}$.

Retrouvons ses coordonnées par le conjugué : le dénominateur devient $(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i) = 3 + 1 = 4$.

Le numérateur est $\sqrt{3} - i + i\sqrt{3} - i^2 = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$. Ainsi $z = (\sqrt{3} + 1)/4 + i(\sqrt{3} - 1)/4$.

Dans $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, la partie réelle est $r \cos \theta$. Pour isoler le cosinus, divisons par $r = \sqrt{2}/2$: $\cos(\pi/12) = [(\sqrt{3} + 1)/4](2/\sqrt{2}) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$. Le même calcul avec la partie imaginaire donne $\sin(\pi/12) = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$. Ce n'est pas la partie réelle seule qui donne le cosinus, mais son rapport au module.

4.2 Argument d'une somme : distinguer les signes

Factorisons $e^{ix/2}$: $1 + e^{ix} = e^{ix/2}(e^{-ix/2} + e^{ix/2}) = 2 \cos(x/2)e^{ix/2}$, par Euler. Pour lire une forme exponentielle, le facteur devant l'exponentielle doit être positif. Si $-\pi < x < \pi$, alors $-\pi/2 < x/2 < \pi/2$ et $\cos(x/2) > 0$: le module est $2 \cos(x/2)$ et $x/2$ est un argument.

Si $\pi < x < 3\pi$, alors $\pi/2 < x/2 < 3\pi/2$ et le cosinus est négatif. Posons $R = -2 \cos(x/2) > 0$. La somme vaut $-Re^{ix/2} = Re^{i\pi}e^{ix/2} = Re^{i(x/2 + \pi)}$; il faut donc ajouter π à l'argument. Aux bornes où $\cos(x/2) = 0$, la somme est nulle et aucun argument n'est défini.

Par exemple, pour $x = 4\pi/3$, l'expression donne un facteur $2 \cos(2\pi/3) = -1$. La somme vaut $-e^{2i\pi/3} = e^{-i\pi/3}$; son module est 1 et un argument $-\pi/3$. Lire directement $2\pi/3$ aurait placé le point dans la direction opposée.

4.3 Linéariser un produit de carrés

Exemple | Préparer une intégrale

La duplication donne $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Donc $\sin x \cos x = \sin 2x/2$, et en élevant au carré, $\sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 2x/4$. Appliquons $\sin^2 t = (1 - \cos 2t)/2$ avec $t = 2x$:

$$f(x) = \frac{1}{4} \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1 - \cos 4x}{8}.$$

Nous pouvons maintenant intégrer une différence terme à terme. Une primitive de $1/8$ est $x/8$; une primitive de $-\cos 4x/8$ est $-\sin 4x/32$, puisque sa dérivée est $-4 \cos 4x/32$. Donc $F(x) = x/8 - \sin 4x/32$. Aux bornes, $F(\pi) = \pi/8$ car $\sin 4\pi = 0$, et $F(0) = 0$. L'intégrale vaut $F(\pi) - F(0) = \pi/8$. On n'a jamais multiplié deux primitives : on a d'abord transformé le produit en une somme.

À toi d'essayer : Contrôler une puissance

Sans développer, donne le module de $(2 - 2i)^7$.

Pour démarrer. Calcule d'abord $|2 - 2i|$, puis élève ce réel à la puissance 7.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 29](#) [Explication, p. 31](#)

À toi d'essayer : Une autre linéarisation

Transforme $\sin x \cos 3x$ en une somme de deux sinus.

Pour démarrer. Écris les formules de $\sin(x + 3x)$ et $\sin(x - 3x)$, puis additionne-les.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 29](#) [Explication, p. 32](#)

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases, 6 à 10 relient les notions et 11 à 15 demandent davantage d'initiative. Cherche d'abord, puis utilise un indice si tu en as besoin.

Exercice 1 — Modules élémentaires

Calcule les modules de $3 - 4i$, -7 , $2i$ et 0 .

Exercice 2 — Arguments sur les axes

Donne tous les arguments de -3 , de $4i$ et de $-2i$. Que se passe-t-il pour zéro ?

Exercice 3 — Trois formes

Donne les formes trigonométrique et exponentielle de $1 + i$ et $-\sqrt{3} - i$.

Exercice 4 — Retour aux coordonnées

Mets $4e^{2i\pi/3}$ et $2e^{-i\pi/4}$ sous forme algébrique.

Exercice 5 — Multiplier sans développer

Pour $z = 2e^{i\pi/6}$ et $w = 3e^{i\pi/3}$, calcule zw et z/w .

Exercice 6 — Puissance élevée

Calcule $(1 - i)^{12}$ et $(1 - i)^{-4}$.

Exercice 7 — Addition d'angles

Calcule exactement $\sin(\pi/12)$ et $\cos(5\pi/12)$.

Exercice 8 — Choisir un argument

Un élève affirme que $-1 + i$ a pour argument $-\pi/4$ car sa tangente vaut -1 . Corrige son raisonnement.

Exercice 9 — Angle triple

Démontre avec Moivre que $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

Exercice 10 — Linéariser et intégrer

Linéarise $\sin^2 x$, puis calcule $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$.

Exercice 11 — Une puissance quatrième

Démontre $\sin^4 x = (3 - 4 \cos 2x + \cos 4x)/8$.

Exercice 12 — Une somme de deux exponentielles

Pour $\theta \in]-\pi, \pi[$, factorise $1 + e^{i\theta}$ puis donne son module et un argument.

Exercice 13 — Cercle unité et réel

Soit $|z| = 1$. Montre que $1/z = \bar{z}$ et que $z + 1/z \in [-2, 2]$.

Exercice 14 — Inégalité et égalité ★★

Pour $z = 1 + i$ et $w = t(1 + i)$, $t \in \mathbb{R}$, détermine quand $|z + w| = |z| + |w|$.

Exercice 15 — Reconstruction trigonométrique ★★

Soit $z \in \mathbb{U}$ et $t = z + z^{-1}$. Exprime $z^2 + z^{-2}$ et $z^3 + z^{-3}$ en fonction de t . Retrouve $\cos(3x)$.

6 Problème — Pour aller plus loin

Ce prolongement est accessible à partir du cours : les résultats supplémentaires sont guidés, et leur mémorisation n'est pas un préalable. Tu peux répartir la recherche sur plusieurs séances.

Additionner des oscillations

Pour $n \geq 1$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx}$. Le but est d'obtenir des sommes de cosinus et de sinus sans les additionner un par un. Durée indicative : 60 à 90 minutes.

Partie I — Une somme géométrique

1. Montre que $(1 - e^{ix})S_n(x) = 1 - e^{inx}$.
2. Pour quels réels x le dénominateur $1 - e^{ix}$ s'annule-t-il ? Calcule alors directement $S_n(x)$.
3. Donne une expression quotient lorsque $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Partie II — Faire apparaître les angles moyens

1. Démontre $1 - e^{it} = -2ie^{it/2} \sin(t/2)$.
2. Dédus $S_n(x) = e^{i(n-1)x/2} \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}$ pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$.
3. En prenant les parties réelle et imaginaire, trouve deux formules de sommes trigonométriques. Pourquoi le quotient réel n'est-il pas toujours le module de $S_n(x)$?

Partie III — Annulation et contrôle

1. Calcule $S_5(2\pi/5)$ et déduis la somme des cinq cosinus correspondants.
2. Démontre $|S_n(x)| \leq n$ et précise les x donnant l'égalité lorsque $n \geq 2$.
3. Vérifie les formules pour $n = 2$ et $x = \pi/3$ par addition directe.

Pistes

Dans I, écris les deux sommes décalées. Dans II, factorise par $e^{it/2}$. Dans III, l'égalité triangulaire nécessite des termes de même direction.

7 Indices des exercices

Exercice 1

Utilise les coordonnées réelles et imaginaires.

Le module est une distance.

Exercice 2

Dessine les quatre axes du plan.

Une rotation complète ajoute 2π .

Exercice 3

Commence par le module.

Choisis le quadrant à partir des deux signes.

Exercice 4

Utilise les valeurs exactes sur le cercle.

Le module multiplie le cosinus et le sinus.

Exercice 5

Additionne les arguments au produit.

Soustrais l'argument du dénominateur au quotient.

Exercice 6

Passe à la forme exponentielle.

Un exposant négatif inverse aussi le module.

Exercice 7

Écris chaque angle avec $\pi/4$ et $\pi/6$.

Vérifie le signe devant le produit des sinus.

Exercice 8

Compare les signes du sinus et du cosinus.

Deux directions opposées ont la même tangente.

Exercice 9

Développe le cube.

Compare les parties imaginaires.

Exercice 10

Utilise $\cos(2x)$.

La primitive de $\cos(2x)$ est $\sin(2x)/2$.

Exercice 11

Tu peux partir de la duplication.

Applique aussi la duplication à l'angle $2x$.

Exercice 12

Factorise par l'exponentielle de la moitié de l'angle.

Pour lire un module, le facteur réel doit être positif.

Exercice 13

Utilise le produit avec le conjugué.

La partie réelle est bornée par le module.

Exercice 14

Réduis l'égalité à une valeur absolue réelle.

Distingue t positif, entre -1 et 0 , puis inférieur à -1 .

Exercice 15

Développe t^2 et t^3 .

Le produit z fois son inverse vaut 1 .

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Le module de $a + ib$ est $\sqrt{a^2 + b^2}$. Pour $3 - 4i$, les coordonnées sont 3 et -4 : $\sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$. Pour $-7 = -7 + 0i$, $\sqrt{(-7)^2 + 0^2} = \sqrt{49} = 7$, et non -7 : une distance est positive ou nulle. Pour $2i = 0 + 2i$, $\sqrt{0^2 + 2^2} = 2$. Enfin, pour $0 = 0 + 0i$, le module vaut 0. Un module nul exige deux carrés nuls, donc deux coordonnées nulles.

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Le point d'affixe -3 est sur le demi-axe réel négatif : son vecteur fait un demi-tour depuis l'axe réel positif, soit un angle π . Tous ses arguments sont $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, car un tour complet ne change pas la direction.

$4i$ est sur l'axe vertical positif, donc ses arguments sont $\pi/2 + 2k\pi$. $-2i$ est sur l'axe vertical négatif, donc $-\pi/2 + 2k\pi$ (ou $3\pi/2 + 2k\pi$). On peut contrôler ces angles par leurs coordonnées $(\cos \theta, \sin \theta)$: $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$. Le point 0 est l'origine ; le vecteur nul ne pointe vers aucune direction, donc n'a pas d'argument.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Pour $1 + i$, le module vaut $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Les coordonnées normalisées sont $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$ toutes deux positives ; l'angle $\pi/4$ convient. D'où $\sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

Pour $-\sqrt{3} - i$, le module vaut $\sqrt{3+1} = 2$. Nous cherchons un cosinus $-\sqrt{3}/2$ et un sinus $-1/2$. L'angle $-5\pi/6$ (ou $7\pi/6$) a ces deux signes et ces valeurs. Les formes demandées sont $2(\cos(-5\pi/6) + i \sin(-5\pi/6))$ et $2e^{-5i\pi/6}$. En remultipliant les coordonnées par 2, on retrouve $-\sqrt{3} - i$.

Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

Utilisons $re^{i\theta} = r \cos \theta + ir \sin \theta$. Pour $\theta = 2\pi/3$, les valeurs sont $-1/2$ et $\sqrt{3}/2$. Ainsi $4e^{2i\pi/3} = 4(-1/2) + 4i(\sqrt{3}/2) = -2 + 2i\sqrt{3}$. Son module vaut $\sqrt{4+12} = 4$.

Pour $\theta = -\pi/4$, le cosinus vaut $\sqrt{2}/2$ et le sinus $-\sqrt{2}/2$. Donc $2e^{-i\pi/4} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$. Son module est $\sqrt{2+2} = 2$. Le signe moins du sinus correspond bien à un point sous l'axe réel.

Corrigé 5

 Démonstration / Solution expliquée

Pour le produit, on multiplie les modules et on ajoute les arguments : $zw = (2 \times 3)e^{i(\pi/6+\pi/3)} = 6e^{i\pi/2}$. Comme $\cos(\pi/2) = 0$ et $\sin(\pi/2) = 1$, cela vaut $6i$.

Le dénominateur w a un module 3, donc n'est pas nul. Le quotient est $(2/3)e^{i(\pi/6-\pi/3)} = (2/3)e^{-i\pi/6}$. Les coordonnées donnent $(2/3)(\sqrt{3}/2 - i/2) = \sqrt{3}/3 - i/3$. Son module vaut $\sqrt{3/9 + 1/9} = 2/3$, en accord avec le quotient des modules. L'ordre de la soustraction des angles suit l'ordre numérateur moins dénominateur.

Corrigé 6

 Démonstration / Solution expliquée

$1 - i$ a pour module $\sqrt{2}$ et argument $-\pi/4$. La puissance 12 vaut $(\sqrt{2})^{12}e^{-12i\pi/4} = 2^6e^{-3i\pi}$. Un angle -3π désigne le même point du cercle que π , donc l'exponentielle vaut -1 et le résultat est -64 .

Pour l'exposant -4 , on inverse aussi le rayon : $(\sqrt{2})^{-4}e^{i\pi} = (1/4)(-1) = -1/4$. Contrôle algébrique : $(1-i)^2 = 1-2i+i^2 = -2i$, donc $(1-i)^4 = (-2i)^2 = -4$. Sa puissance troisième vaut $(-4)^3 = -64$ et son inverse vaut $-1/4$, exactement les deux résultats.

Corrigé 7

 Démonstration / Solution expliquée

Comme $\pi/12 = \pi/4 - \pi/6$, la formule de différence du sinus donne

$$\sin(\pi/12) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Pour $5\pi/12 = \pi/4 + \pi/6$, utilisons cette fois le cosinus d'une somme :

$$\cos(5\pi/12) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Les deux angles sont complémentaires : $\pi/12 + 5\pi/12 = \pi/2$. L'identité $\sin t = \cos(\pi/2 - t)$ explique aussi pourquoi les résultats coïncident.

Corrigé 8

 Démonstration / Solution expliquée

Le module de $-1 + i$ est $\sqrt{2}$. Ses coordonnées divisées par ce module sont $-\sqrt{2}/2$ et $\sqrt{2}/2$. Il faut donc un cosinus négatif et un sinus positif, ce qui place l'angle dans le deuxième quadrant. $3\pi/4$ convient.

Pour $-\pi/4$, le cosinus est positif et le sinus négatif : c'est la direction opposée. Les deux tangentes valent pourtant -1 , car inverser simultanément les signes du numérateur et du dénominateur ne change pas leur quotient. La tangente seule détermine une direction modulo π , alors qu'un argument distingue les directions opposées modulo 2π . Tous les arguments corrects sont $3\pi/4 + 2k\pi$.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Posons $c = \cos x$, $s = \sin x$. En développant le cube,

$$(c + is)^3 = c^3 + 3ic^2s + 3i^2cs^2 + i^3s^3 = (c^3 - 3cs^2) + i(3c^2s - s^3).$$

Moivre affirme que ce même nombre est $\cos 3x + i \sin 3x$. Ses parties imaginaires doivent donc être égales : $\sin 3x = 3c^2s - s^3$. L'identité du cercle $c^2 + s^2 = 1$ donne $c^2 = 1 - s^2$. En remplaçant, $3(1 - s^2)s - s^3 = 3s - 3s^3 - s^3 = 3s - 4s^3$. Cela prouve la formule pour tout réel x . À $x = \pi/2$, elle donne $-1 = 3 - 4$, ce qui contrôle les signes.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Partons de $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Ajouter $2\sin^2 x$ puis soustraire $\cos 2x$ donne $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$. Donc $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$: il ne reste plus de puissance trigonométrique.

Une primitive est $F(x) = x/2 - \sin(2x)/4$, car $F'(x) = 1/2 - (2/4)\cos(2x)$. Aux bornes, $F(\pi/2) = \pi/4 - \sin(\pi)/4 = \pi/4$, puisque $\sin \pi = 0$, et $F(0) = 0/2 - \sin(0)/4 = 0$. L'intégrale vaut la différence $F(\pi/2) - F(0) = \pi/4 - 0 = \pi/4$. Le facteur 2 issu de la dérivation de $\sin(2x)$ explique pourquoi la primitive possède le dénominateur 4.

Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

La duplication donne $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$. En élevant au carré, $\sin^4 x = (1 - 2\cos 2x + \cos^2(2x))/4$. Pour le dernier carré, appliquons $\cos^2 t = (1 + \cos 2t)/2$ à $t = 2x$: $\cos^2(2x) = (1 + \cos 4x)/2$.

Le numérateur devient $1 - 2\cos 2x + (1 + \cos 4x)/2 = (3 - 4\cos 2x + \cos 4x)/2$. Diviser encore par 4 donne le dénominateur 8 demandé. À $x = 0$, le résultat donne $(3 - 4 + 1)/8 = 0$; à $x = \pi/2$, $(3 + 4 + 1)/8 = 1$. Ces contrôles confirment les valeurs sans remplacer la preuve générale.

Corrigé 12

 *Démonstration / Solution expliquée*

Nous voulons des exposants opposés pour utiliser Euler. Factorisons $e^{i\theta/2}$: il faut le multiplier par $e^{-i\theta/2}$ pour obtenir 1, et par $e^{i\theta/2}$ pour obtenir $e^{i\theta}$. Donc

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) = 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}.$$

Puisque $-\pi < \theta < \pi$, on a $-\pi/2 < \theta/2 < \pi/2$, où le cosinus est strictement positif. Le facteur réel est donc bien le module : $2\cos(\theta/2)$. Un argument est $\theta/2$, les autres s'obtenant par ajout de $2k\pi$. Sans la vérification du signe, cette lecture de l'argument aurait été injustifiée.

Corrigé 13

 Démonstration / Solution expliquée

$|z| = 1$ implique $z \neq 0$, donc son inverse existe. La formule $z\bar{z} = |z|^2$ donne ici $z\bar{z} = 1$: c'est la définition d'un inverse, donc $1/z = \bar{z}$.

Avec $z = a + ib$, $z + 1/z = z + \bar{z} = 2a$, un réel. De plus $a^2 + b^2 = 1$ implique $a^2 \leq 1$, donc $-1 \leq a \leq 1$. Multiplier par 2 donne $-2 \leq 2a \leq 2$, ce qui prouve l'appartenance à l'intervalle. Pour $z = 1$, la somme vaut 2 ; pour $z = -1$, elle vaut -2 . Les deux bornes sont donc réellement atteintes.

Corrigé 14

 Démonstration / Solution expliquée

On a $z + w = (1 + t)(1 + i)$. Les modules d'un produit se multiplient, donc $|z + w| = |1 + t|\sqrt{2}$, $|z| = \sqrt{2}$ et $|w| = |t|\sqrt{2}$. En divisant par $\sqrt{2} > 0$, l'égalité devient $|1 + t| = 1 + |t|$.

Si $t \geq 0$, les deux côtés valent $1 + t$. Si $-1 \leq t < 0$, ils valent $1 + t$ et $1 - t$; leur égalité exigerait $2t = 0$, incompatible avec $t < 0$. Si $t < -1$, ils valent $-1 - t$ et $1 - t$; leur égalité exigerait $-1 = 1$, impossible. Donc exactement $t \geq 0$. Géométriquement, un coefficient positif conserve le sens du vecteur, un coefficient négatif l'inverse ; le cas $t = 0$ donne le vecteur nul.

Corrigé 15

 Démonstration / Solution expliquée

Comme $|z| = 1$, z est non nul. Développons $t^2 = (z + z^{-1})^2 = z^2 + 2zz^{-1} + z^{-2} = z^2 + 2 + z^{-2}$. Donc $z^2 + z^{-2} = t^2 - 2$.

Pour le cube, le binôme donne $t^3 = z^3 + 3z^2z^{-1} + 3z(z^{-1})^2 + z^{-3} = z^3 + 3z + 3z^{-1} + z^{-3}$. Les termes centraux valent $3t$, donc $z^3 + z^{-3} = t^3 - 3t$.

Si $z = e^{ix}$, Euler donne $t = 2 \cos x$ et $z^3 + z^{-3} = 2 \cos 3x$. Ainsi $2 \cos 3x = (2 \cos x)^3 - 3(2 \cos x) = 8 \cos^3 x - 6 \cos x$. Diviser par 2 donne $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

9 Corrigé du problème

Partie I — Faire apparaître une compensation

1. Posons $q = e^{ix}$. La somme est $S_n = 1 + q + \dots + q^{n-1}$. En la multipliant par q , chaque exposant augmente de 1 : $qS_n = q + q^2 + \dots + q^n$. Soustraire terme à terme laisse seulement le premier terme de la première somme et l'opposé du dernier de la seconde : $(1 - q)S_n = 1 - q^n$. Comme $q^n = e^{inx}$, c'est l'identité demandée.

2. $1 - e^{ix} = 0$ équivaut à $e^{ix} = 1$, donc simultanément $\cos x = 1$ et $\sin x = 0$. Sur le cercle, cela correspond aux tours complets : $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pour ces angles, chaque terme $e^{ijx} = 1$ et les n termes totalisent n . La formule quotient ne serait pas utilisable : elle diviserait par zéro.

3. Si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, le facteur $1 - e^{ix}$ est non nul. On peut diviser l'identité de la question 1 par lui, donnant $S_n = (1 - e^{inx}) / (1 - e^{ix})$.

Partie II — Extraire un facteur angulaire

1. Factoriser par $e^{it/2}$ oblige à écrire $1 = e^{it/2}e^{-it/2}$ et $e^{it} = e^{it/2}e^{it/2}$. D'où $1 - e^{it} = e^{it/2}(e^{-it/2} - e^{it/2})$. Euler donne $e^{it/2} - e^{-it/2} = 2i \sin(t/2)$; notre parenthèse est son opposé. Elle vaut $-2i \sin(t/2)$, ce qui prouve l'identité.

2. Appliquons-la avec $t = nx$ au numérateur et $t = x$ au dénominateur :

$$S_n = \frac{-2ie^{inx/2} \sin(nx/2)}{-2ie^{ix/2} \sin(x/2)} = e^{i(nx/2 - x/2)} \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}.$$

Le facteur $-2i$ s'annule ; les exponentielles se divisent en soustrayant leurs angles. Le dénominateur sinus est non nul, car $\sin(x/2) = 0$ équivaudrait à $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, exclu. On obtient donc l'angle $(n-1)x/2$ annoncé.

3. Notons $R = \sin(nx/2) / \sin(x/2)$, un réel, et $\theta = (n-1)x/2$. Alors $S_n = R \cos \theta + iR \sin \theta$. D'autre part, additionner ses termes sous forme algébrique donne $S_n = \sum \cos(kx) + i \sum \sin(kx)$. L'identification fournit

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx) = R \cos \theta, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sin(kx) = R \sin \theta.$$

Le module vaut $|R|$, car $|e^{i\theta}| = 1$. Si $R < 0$, R ne peut pas être un module ; il faut écrire $Re^{i\theta} = |R|e^{i(\theta+\pi)}$. Si $R = 0$, la somme est nulle et n'a pas d'argument.

Partie III — Annulation, borne et vérification

1. Pour $n = 5, x = 2\pi/5$, le numérateur est $1 - e^{2i\pi} = 0$. Le dénominateur n'est pas nul puisque $2\pi/5$ n'est pas un tour entier. Donc $S_5 = 0$. La partie réelle est la somme des cinq cosinus, elle vaut donc 0 ; la somme des sinus est également nulle.

2. Chacun des n termes a pour module 1. Appliquer l'inégalité triangulaire, d'abord aux deux premiers termes puis en ajoutant successivement les autres, donne $|S_n| \leq 1 + \dots + 1 = n$.

Pour préciser l'égalité sans supposer les directions, développons $S_n \overline{S_n}$. Les n termes où les indices sont égaux valent 1. Pour deux indices $j < k$, les deux termes conjugués s'additionnent en $2 \cos((k-j)x)$. Donc

$$|S_n|^2 = n + 2 \sum_{0 \leq j < k < n} \cos((k-j)x) \leq n + 2 \frac{n(n-1)}{2} = n^2.$$

Chaque cosinus est au plus 1. Pour que la somme atteigne son maximum, tous doivent valoir 1 : si l'un était plus petit, aucun autre ne pourrait compenser en dépassant 1. Pour $n \geq 2$, la paire $(0, 1)$ impose en particulier $\cos x = 1$, donc $x \in 2\pi\mathbb{Z}$. Réciproquement, pour un tel x , $S_n = n$, donc l'égalité a bien lieu.

3. L'addition directe donne $S_2(\pi/3) = 1 + 1/2 + i\sqrt{3}/2 = 3/2 + i\sqrt{3}/2$. Dans la formule, $R = \sin(\pi/3)/\sin(\pi/6) = (\sqrt{3}/2)/(1/2) = \sqrt{3}$ et $\theta = \pi/6$. Ainsi $Re^{i\theta} = \sqrt{3}(\sqrt{3}/2 + i/2) = 3/2 + i\sqrt{3}/2$. On retrouve exactement les deux coordonnées calculées directement.

10 Faire le point par une variante autonome

Essaie cette variante sans relire le corrigé précédent. Explique le choix de ta méthode, puis utilise les contrôles pour décider quelle notion retravailler.

À toi d'essayer : Choisir une écriture en autonomie

Écris $z = -1 + i\sqrt{3}$ en forme exponentielle, puis calcule z^6 . Vérifie le module du résultat.

Pour démarrer. Identifie les deux coordonnées du cercle après avoir calculé le module.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 29](#) [Explication, p. 32](#)

11 Fiche-mémoire

- $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $|zw| = |z||w|$; $|z/w| = |z|/|w|$ si $w \neq 0$.
- $z \neq 0$: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$ avec $r > 0$.
- Arguments modulo 2π ; zéro n'a pas d'argument.
- $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$; Moivre multiplie l'argument par l'exposant.
- Euler : $2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix}$, $2i \sin x = e^{ix} - e^{-ix}$.
- Pour additionner, préfère la forme algébrique ; pour multiplier, diviser ou élever à une puissance, pense à la forme exponentielle.

Autocontrôle. Le module est-il positif ? Ai-je vérifié les deux coordonnées du cercle ? Mes égalités d'angles sont-elles prises modulo 2π ? Ai-je traité les dénominateurs nuls avant de simplifier ?

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Une distance ne garde pas le signe

Indice 1 — Une piste.

Utilise les deux coordonnées, même si l'une est nulle.

Indice 2 — Un pas de plus.

Un argument nécessite une direction depuis l'origine.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Choisir les bons signes

Indice 1 — Une piste.

Commence par le module.

Indice 2 — Un pas de plus.

Les deux coordonnées sont négatives ; le point est dans le troisième quadrant.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Le quadrant décide de l'angle

Indice 1 — Une piste.

Commence par le module.

Indice 2 — Un pas de plus.

Après division par 2, le cosinus est $-\sqrt{3}/2$ et le sinus $1/2$.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Reconstruire une formule de duplication

Indice 1 — Une piste.

Dans les formules d'addition, prends les deux angles égaux.

Indice 2 — Un pas de plus.

Utilise aussi $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Choisir une forme selon l'opération

Indice 1 — Une piste.

Pour le produit, garde les formes exponentielles.

Indice 2 — Un pas de plus.

Pour la somme, calcule séparément les parties réelle et imaginaire.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Un produit devient une somme

Indice 1 — Une piste.

Tu peux utiliser Euler, ou additionner deux formules d'addition.

Indice 2 — Un pas de plus.

Dans $\cos(a + b) + \cos(a - b)$, les termes en sinus s'annulent.

[Revenir à la recherche, p. 10](#)

Linéariser en comprenant l'objectif

Indice 1 — Une piste.

Pars de $\cos t = (e^{it} + e^{-it})/2$.

Indice 2 — Un pas de plus.

Développe le carré puis regroupe les exponentielles opposées.

[Revenir à la recherche, p. 11](#)

L'égalité n'est pas systématique

Indice 1 — Une piste.

Les deux premières quantités valent racine de 2 et 2.

Indice 2 — Un pas de plus.

Choisis deux complexes sur la même demi-droite depuis O.

[Revenir à la recherche, p. 12](#)

Contrôler une puissance

Indice 1 — Une piste.

Le module d'une puissance est la puissance du module.

Indice 2 — Un pas de plus.

Le module de $2 - 2i$ vaut $2\sqrt{2}$.

[Revenir à la recherche, p. 13](#)

Une autre linéarisation

Indice 1 — Une piste.

Additionne les formules de $\sin(x + 3x)$ et $\sin(x - 3x)$.

Indice 2 — Un pas de plus.

Le résultat avant division vaut $2 \sin x \cos 3x$.

[Revenir à la recherche, p. 13](#)

Choisir une écriture en autonomie

Indice 1 — Une piste.

Le module est 2 et le point est dans le deuxième quadrant.

Indice 2 — Un pas de plus.

Un argument vaut $2\pi/3$; multiplie-le par 6.

[Revenir à la recherche, p. 25](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Une distance ne garde pas le signe

Pour $-3 = -3+0i$, le module est $\sqrt{9} = 3$. Pour $-3+4i$, il vaut $\sqrt{9+16} = 5$. Pour 0, les deux coordonnées sont nulles, donc le module vaut 0. Les deux premiers nombres sont non nuls et définissent une direction : ils ont des arguments. Pour -3 , la direction est celle de l'axe réel négatif, donc π convient. Pour $-3+4i$, un argument est l'angle dont le cosinus vaut $-3/5$ et le sinus $4/5$. Zéro, à l'origine, n'indique aucune direction et n'a pas d'argument. Le module seul ne contient pas cette information angulaire.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Choisir les bons signes

Le rayon est $\sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$. On cherche donc $\cos \theta = -1/2$ et $\sin \theta = -\sqrt{3}/2$. L'angle $-2\pi/3$ convient : les deux coordonnées sont négatives. La forme est $2(\cos(-2\pi/3) + i \sin(-2\pi/3))$. En remultipliant par 2, on retrouve $-1 - i\sqrt{3}$. L'angle $4\pi/3$ diffère de 2π , donc convient aussi. Pour la variante $1 - i\sqrt{3}$, le rayon reste 2, mais le cosinus devient $1/2$; l'angle $-\pi/3$ donne alors les deux bons signes.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Le quadrant décide de l'angle

Le module vaut $\sqrt{3+1} = 2$. La forme trigonométrique doit avoir pour coordonnées normalisées $-\sqrt{3}/2$ et $1/2$. L'angle $\pi/6$ a un sinus $1/2$, mais un cosinus positif : il ne convient pas. Son symétrique $\pi - \pi/6 = 5\pi/6$ a le même sinus et le cosinus opposé. Donc $z = 2(\cos(5\pi/6) + i \sin(5\pi/6))$. La multiplication donne $2(-\sqrt{3}/2 + i/2) = -\sqrt{3} + i$, ce qui vérifie le choix.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Reconstruire une formule de duplication

Dans la formule du cosinus, $\cos(t+t) = \cos t \cos t - \sin t \sin t = \cos^2 t - \sin^2 t$. Puis $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ donne $2\cos^2 t - 1$. Dans celle du sinus, $\sin(t+t) = \sin t \cos t + \cos t \sin t = 2\sin t \cos t$, car les deux produits sont égaux. À $t = 0$, le premier résultat vaut $1^2 - 0^2 = 1 = \cos 0$ et le second $2 \times 0 \times 1 = 0 = \sin 0$. C'est une vérification ponctuelle ; la substitution dans les identités prouvées fournit la démonstration générale.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Choisir une forme selon l'opération

Le produit est $2 \times 3e^{i(\pi/3+\pi/6)} = 6e^{i\pi/2} = 6i$. Pour la somme, $z = 2(1/2 + i\sqrt{3}/2) = 1 + i\sqrt{3}$ et $w = 3(\sqrt{3}/2 + i/2) = 3\sqrt{3}/2 + 3i/2$. Additionner les parties réelles et les parties imaginaires donne $z + w = 1 + 3\sqrt{3}/2 + i(\sqrt{3} + 3/2)$. Le produit combine rayons et angles grâce à la relation fonctionnelle ; la somme combine directement les coordonnées. Les deux opérations demandent donc des choix de forme différents.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Un produit devient une somme

On sait $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. En additionnant membre à membre, les termes $-\sin a \sin b$ et $+\sin a \sin b$ s'annulent. Il reste $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$. Pour la variante, soustrayons la première égalité de la seconde : les termes en cosinus s'annulent et les termes en sinus donnent $\sin a \sin b - (-\sin a \sin b) = 2 \sin a \sin b$. Donc $\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin a \sin b$.

[Revenir à la recherche, p. 10](#)

Linéariser en comprenant l'objectif

Euler donne $\cos t = (e^{it} + e^{-it})/2$. Le carré du dénominateur vaut 4 et celui du numérateur est $e^{2it} + 2e^{it}e^{-it} + e^{-2it}$. Le produit central vaut $e^0 = 1$, donc $\cos^2 t = (e^{2it} + 2 + e^{-2it})/4$. Euler à l'angle $2t$ transforme les deux exponentielles opposées en $2 \cos 2t$. D'où $(2 \cos 2t + 2)/4 = (1 + \cos 2t)/2$. On parle de linéarisation parce que la puissance du cosinus a disparu au profit d'une constante et d'un cosinus d'angle multiple.

[Revenir à la recherche, p. 11](#)

L'égalité n'est pas systématique

$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, tandis que $|1| + |i| = 1 + 1 = 2$. Les deux nombres comparés sont positifs et leurs carrés valent 2 et 4 ; donc $\sqrt{2} < 2$. L'inégalité est stricte dans cet exemple. Pour $z = 2, w = 3$, les deux nombres sont sur le même demi-axe : $|z+w| = |5| = 5$ et $|z| + |w| = 2 + 3 = 5$. Ce calcul fournit un exemple d'égalité avec deux nombres non nuls. Avec des sens opposés, par exemple 2 et -3 , la longueur résultante serait 1 et non 5.

[Revenir à la recherche, p. 12](#)

Contrôler une puissance

Le module initial est $\sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. La propriété des puissances donne un module $(2\sqrt{2})^7 = 2^7(\sqrt{2})^7 = 128 \times 8\sqrt{2} = 1024\sqrt{2}$. Si l'on cherche aussi le complexe, son argument initial est $-\pi/4$. Après la puissance, $-7\pi/4$ est équivalent à $\pi/4$. Ainsi le résultat est $1024\sqrt{2}(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2) = 1024 + 1024i$. Son module est bien $\sqrt{2} \times 1024^2 = 1024\sqrt{2}$.

[Revenir à la recherche, p. 13](#)

Une autre linéarisation

La première donne $\sin 4x = \sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x$. La seconde donne $\sin(-2x) = \sin x \cos 3x - \cos x \sin 3x$. Leur somme annule les termes contenant $\cos x \sin 3x$, et laisse $\sin 4x + \sin(-2x) = 2 \sin x \cos 3x$. Comme le sinus est impair, $\sin(-2x) = -\sin 2x$. Diviser par 2 donne $\sin x \cos 3x = (\sin 4x - \sin 2x)/2$. Le signe moins vient de l'angle négatif, pas d'un choix arbitraire.

[Revenir à la recherche, p. 13](#)

Choisir une écriture en autonomie

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Les coordonnées normalisées sont $-1/2$ et $\sqrt{3}/2$, donc l'angle $2\pi/3$ convient. Ainsi $z = 2e^{2i\pi/3}$ et $z^6 = 2^6 e^{12i\pi/3} = 64e^{4i\pi} = 64$, car deux tours complets ramènent au point 1. Le module du résultat est 64, égal à $|z|^6 = 2^6$. Si l'on obtient -64 , le module seul ne détecte pas l'erreur : il faut aussi contrôler que 4π est un multiple pair de π .

[Revenir à la recherche, p. 25](#)