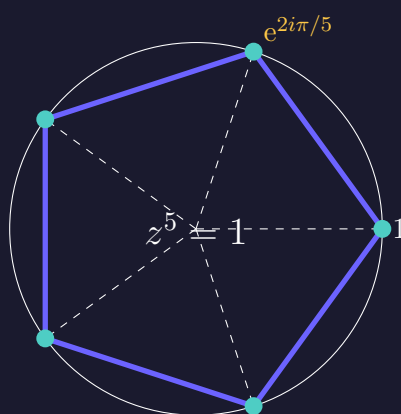


FICHE 03

Géométrie complexe et racines de l'unité

Affixes ■ Angles et distances ■ Polygones



Terminale — Option Mathématiques expertes — Programme officiel

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	🔍 Pourquoi ce chapitre ?	3
1.1	Le problème fondamental : transformer un dessin en preuve	3
2	🧠 L'idée avant la formule	3
2.1	Se placer au bon point de départ	3
2.2	Comparer plutôt que décrire séparément	3
2.3	Une puissance peut refermer un mouvement	4
3	🎓 Le cours formel	4
3.1	Affixes de points et de vecteurs	4
3.2	Distances et lieux géométriques	5
3.3	Un quotient pour comparer deux vecteurs	6
3.4	Rotations et transformations : un outil expliqué	7
3.5	Racines de l'unité : déterminer toutes les solutions	9
3.6	Racines d'un complexe et longueurs de cordes	10
4	🧰 Boîte à outils — de la figure à la preuve	11
4.1	Construire les deux triangles équilatéraux sur un segment	11
4.2	Orthogonalité et lieu privé d'un point	11
4.3	Transformer les racines en un polygone déplacé	12
5	✍ Exercices progressifs	13
6	🔗 Problème — Pour aller plus loin	15
7	Indices des exercices	16
8	✔ Corrigés détaillés	18
9	Corrigé du problème	22
10	Faire le point par une variante autonome	23
11	Fiche-mémoire	24
12	Indices des pauses et des preuves	25
13	Explications des pauses et des preuves	28

1 ? Pourquoi ce chapitre ?

1.1 Le problème fondamental : transformer un dessin en preuve

Une figure peut faire soupçonner que trois points sont alignés ou qu'un triangle est rectangle. Pour conclure, il faut une propriété exacte. Les complexes vont traduire la configuration en égalités et rendre le choix du calcul plus lisible : une différence pour un vecteur, un module pour une longueur, un quotient pour comparer deux directions.

Intuition | Un dictionnaire, pas une recette unique

Devant une question de géométrie, ne développe pas tout de suite. Identifie ce que tu veux prouver. « Même distance » appellera des modules ; « même direction » un quotient réel ; « tourner d'un angle donné » une multiplication par une exponentielle.

Prérequis. Formes algébrique et exponentielle, module d'un quotient, arguments modulo 2π , vecteurs et angles orientés. On travaille toujours dans un repère orthonormé direct du plan.

Méthode | Objectifs

Traduire un vecteur par une différence d'affixes ; interpréter un quotient ; déterminer un lieu ; calculer les racines de l'unité et les représenter ; justifier une configuration par des égalités précises.

Les racines de l'unité et les configurations planes appartiennent au socle. Les similitudes sont expliquées comme outil de résolution ; les racines d'un complexe quelconque et le calcul exact lié au pentagone sont des prolongements guidés.

Méthode | Comment travailler cette fiche

Commence par l'idée avant la formule, puis travaille une notion à la fois. Dans le cours, reformule la définition avec tes mots et refais l'exemple sans regarder la dernière ligne. Les pauses te proposent une question, deux indices graduels et une explication ; tu peux chercher avec une aide sans renoncer au raisonnement.

Après le cours, la boîte à outils relie plusieurs notions dans des méthodes commentées. Les exercices passent des bases aux questions d'initiative. Si tu bloques, prends d'abord un indice ; après le corrigé, explique pourquoi la méthode convient et refais une variante. Le problème final construit un approfondissement à partir du cours, puis une dernière activité te permet de faire le point.

2 🧠 L'idée avant la formule

2.1 Se placer au bon point de départ

Si A a pour affixe a , le nombre $z - a$ donne le déplacement de A vers M. Soustraire a revient à recentrer le calcul sur A. Par exemple, pour $a = 1 + i$ et $z = 4 + 5i$, ce déplacement a pour affixe $3 + 4i$; sa longueur vaut 5, même si ni A ni M n'est à l'origine.

2.2 Comparer plutôt que décrire séparément

Le quotient $(c - a)/(b - a)$ compare directement $\overrightarrow{AC}$ à $\overrightarrow{AB}$. Son module compare les longueurs, son argument mesure l'angle orienté de AB vers AC. Le dénominateur impose $A \neq B$. Pour parler de l'angle, il faut aussi $A \neq C$: un vecteur nul n'a pas de direction.

2.3 Une puissance peut refermer un mouvement

Si multiplier par z fait tourner d'un angle θ sur le cercle unité, multiplier n fois fait tourner de $n\theta$. Demander $z^n = 1$ revient à demander que le mouvement revienne au départ après n étapes. Les angles possibles seront répartis régulièrement : c'est l'origine des polygones réguliers que nous allons construire.

⚠ Attention | Un dessin conserve un rôle précis

Dessine pour repérer l'ordre des points, l'orientation et les valeurs interdites. Puis démontre avec le dictionnaire. Une figure à main levée n'impose ni un angle droit ni une égalité de longueurs ; elle aide à choisir la relation qui les prouvera.

3 Le cours formel

3.1 Affixes de points et de vecteurs

Définition | Affixe

Le point $A(x_A, y_A)$ a pour affixe $a = x_A + iy_A$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$. Deux points sont égaux exactement lorsque leurs affixes sont égales. Deux vecteurs sont égaux exactement lorsque leurs affixes sont égales.

✓ Propriété | Milieu, translation, parallélogramme

Le milieu de $[AB]$ a pour affixe $(a + b)/2$. La translation de vecteur d'affixe u envoie z sur $z + u$. Pour un parallélogramme $ABCD$ dans cet ordre, $a + c = b + d$, donc $d = a + c - b$.

Démonstration | Pourquoi soustraire ?

Du point au déplacement. Pour aller de $A(x_A, y_A)$ à $B(x_B, y_B)$, la variation horizontale est $x_B - x_A$ et la variation verticale $y_B - y_A$. Leur affixe est $(x_B - x_A) + i(y_B - y_A) = (x_B + iy_B) - (x_A + iy_A) = b - a$. L'arrivée est donc écrite avant le départ.

Le milieu. Ses coordonnées sont $((x_A + x_B)/2, (y_A + y_B)/2)$. Son affixe est donc $(x_A + x_B)/2 + i(y_A + y_B)/2 = (a + b)/2$. On additionne ici les positions avant de diviser par deux ; on ne calcule pas un déplacement.

Le parallélogramme. Ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu. Leurs milieux ont pour affixes $(a + c)/2$ et $(b + d)/2$. Les rendre égaux donne $a + c = b + d$, donc $d = a + c - b$. Réciproquement, cette égalité entraîne $b - a = c - d$, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$: elle décrit bien la relation de parallélogramme. Pour parler d'un quadrilatère non aplati, on vérifie en plus que les points ne sont pas alignés.

Exemple | Un quatrième sommet

L'ordre A, B, C, D signifie que A, C sont opposés, ainsi que B, D . La relation des milieux donne $d = a + c - b$. Calculons $(1 + i) + (3 + 5i) - (4 + 2i) = (1 + 3 - 4) + i(1 + 5 - 2) = 4i$.

Vérifions les déplacements opposés : $b - a = (4 + 2i) - (1 + i) = 3 + i$, et $c - d = (3 + 5i) - 4i = 3 + i$. Ils sont égaux, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Attention au sens DC : $\overrightarrow{CD}$ aurait l'affixe opposée.

⚠ Attention | L'ordre des lettres

$b - a$ décrit $\overrightarrow{AB}$; $a - b$ décrit le vecteur opposé. Le module est inchangé, mais l'argument change de π . Une erreur d'ordre peut préserver une distance et fausser un angle.

À toi d'essayer : Retrouver l'ordre d'un vecteur

A et B ont pour affixes $2 + i$ et $-1 + 3i$. Calcule les affixes de AB et BA, puis celle du milieu.

Pour démarrer. Pour AB , soustrais l'affixe de A à celle de B; pour le milieu, additionne puis divise par deux.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 25 Explication, p. 28

3.2 Distances et lieux géométriques

★ Théorème | Distance

$AB = |b - a|$. Ainsi $|z - a| = r$ décrit le cercle de centre A et de rayon $r > 0$; pour $r = 0$, c'est le point A, et pour $r < 0$, l'ensemble vide.

L'inégalité $|z - a| \leq r$ avec $r > 0$ décrit le disque fermé; $|z - a| < r$ décrit son intérieur. L'égalité $|z - a| = |z - b|$ avec $a \neq b$ décrit la médiatrice du segment $[AB]$.

💡 Exemple | Traduire avant de développer

Dans $|z - 2 - i| = 3$, réécrivons $z - 2 - i = z - (2 + i)$. Le module mesure la distance du point d'affixe z au point $(2, 1)$. Exiger cette distance égale à 3 définit le cercle de ce centre et de ce rayon. Dans $|z - 1| = |z + 1|$, on compare les distances aux points $(1, 0)$ et $(-1, 0)$. Les points équidistants forment leur médiatrice, donc l'axe vertical. Retrouvons-le par calcul : avec $z = x + iy$, élever au carré est réversible car les distances sont positives ou nulles. On obtient $x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2$, donc $-2x = 2x$, puis $x = 0$. Aucune condition sur y : tout l'axe imaginaire convient.

✂ Méthode | Un rapport de distances

Pour $b \neq z$, l'égalité $\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = k$ signifie $MA = k MB$. Note le point exclu B. Si $k = 1$, pense à une médiatrice; sinon, les carrés des modules permettent souvent de reconnaître un cercle après complétion des carrés.

À toi d'essayer : Une distance bien centrée

Décris $|z + 2 - 3i| \leq 2$, puis donne deux points du bord.

Pour démarrer. Cherche l'afixe a telle que $z + 2 - 3i = z - a$.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 25 Explication, p. 28

À toi d'essayer : Lire un lieu sans développer

Décris $|z - (2 - i)| = 3$, puis $|z - (2 - i)| = |z + 1|$.

Pour démarrer. Associe chaque différence à la distance entre deux points nommés.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 25 Explication, p. 28

3.3 Un quotient pour comparer deux vecteurs

★ Théorème | Rapport des longueurs et angle orienté

Pour A, B, C avec $B \neq A$ et $C \neq A$, pose $q = (c - a)/(b - a)$. Alors

$$|q| = \frac{AC}{AB}, \quad \arg q = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \pmod{2\pi}.$$

Démonstration | Interprétation

Les hypothèses $B \neq A$ et $C \neq A$ garantissent que les deux déplacements sont non nuls. On peut donc écrire $b - a = re^{i\alpha}$ et $c - a = se^{i\beta}$, avec $r = AB > 0$ et $s = AC > 0$. Le quotient vaut

$$q = \frac{se^{i\beta}}{re^{i\alpha}} = \frac{s}{r}e^{i(\beta-\alpha)}.$$

Son module est $s/r = AC/AB$. Son angle est la direction d'arrivée β moins la direction de départ α : c'est l'angle orienté de $\overrightarrow{AB}$ vers $\overrightarrow{AC}$.

Si ce quotient est réel non nul, son argument vaut 0 ou π : les deux directions sont parallèles, dans le même sens ou en sens opposé. On obtient l'alignement. Si $C = A$, le quotient vaut 0 et les points sont encore alignés. S'il est imaginaire pur non nul, son argument vaut $\pi/2$ ou $-\pi/2$: les deux droites sont perpendiculaires. Le mot « non nul » évite d'attribuer une direction à un vecteur nul.

✓ Propriété | Alignement et orthogonalité

Si $B \neq A$, les points A, B, C sont alignés si et seulement si $(c - a)/(b - a) \in \mathbb{R}$. Si, en plus, $C \neq A$, les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si ce quotient est imaginaire pur.

Pour l'alignement, un quotient nul correspond à $C = A$ et convient. Pour l'orthogonalité de deux droites, il faut deux directions non nulles : préciser les points distincts est indispensable.

💡 Exemple | Triangle rectangle isocèle

Les déplacements issus de A sont $b - a = (3 + i) - (1 + i) = 2$ et $c - a = (1 + 3i) - (1 + i) = 2i$. Tous deux sont non nuls. Leur quotient est $2i/2 = i$. Son module est 1, donc $AC/AB = 1$ et $AC = AB$. Son argument est $\pi/2$, donc le vecteur AB tourne d'un quart de tour direct pour prendre la direction de AC . L'angle en A est donc droit. Les deux informations prouvent que le triangle est rectangle isocèle en A . Un simple quotient imaginaire pur aurait prouvé l'angle droit, mais pas nécessairement l'égalité des longueurs.

✂ Méthode | Rédiger une preuve géométrique

Énonce d'abord que le dénominateur est non nul. Calcule le quotient, puis interprète soit sa nature (réel ou imaginaire pur), soit son module et son argument. Termine par la propriété de la figure avec les points dans le bon ordre.

À toi d'essayer : Lire longueur et angle ensemble

On sait $(c - a)/(b - a) = 2i$, avec a, b, c distincts. Que peux-tu affirmer sur les deux vecteurs et sur le triangle ?

Pour démarrer. Lis séparément le module et l'argument du quotient, puis formule deux conclusions.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 25](#) [Explication, p. 28](#)

3.4 Rotations et transformations : un outil expliqué

Multiplier z par $e^{i\theta}$ conserve sa distance à l'origine et ajoute θ à son argument. C'est une rotation de centre O et d'angle θ . Pour faire tourner autour de ω , on déplace d'abord le centre à l'origine :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

Multiplier par un réel k est une homothétie de centre O et de rapport k . Si $k < 0$, l'angle est en plus décalé de π .

✓ Propriété | Transformation affine complexe, prolongement

Soit $z' = az + b$ avec $a \neq 0$. Les distances sont multipliées par $|a|$ et les angles orientés sont conservés. Si $a \neq 1$, le point fixe unique est $\omega = b/(1 - a)$ et

$$z' - \omega = a(z - \omega).$$

La transformation combine une rotation d'angle $\arg a$ et une homothétie de rapport $|a|$, de même centre ω .

✎ Démonstration | Centre et différences

Trouver le centre candidat. Un point fixe ne change pas d'affixe : $\omega = a\omega + b$. Soustraire $a\omega$ donne $(1 - a)\omega = b$. Lorsque $a \neq 1$, nous pouvons diviser et obtenir l'unique candidat $\omega = b/(1 - a)$. Cette valeur vérifie l'équation de départ, donc le point fixe existe bien.

Recentrement. Soustrayons l'équation du point fixe de $z' = az + b$: $z' - \omega = az + b - (a\omega + b) = a(z - \omega)$. Les termes b s'annulent ; autour du point fixe, il ne reste qu'une multiplication.

Distances. Pour deux images, $z'_2 - z'_1 = (az_2 + b) - (az_1 + b) = a(z_2 - z_1)$. Prendre les modules donne $|z'_2 - z'_1| = |a| |z_2 - z_1|$. Toutes les distances sont donc multipliées par le même réel $|a| > 0$.

Angles. Pour trois points aux déplacements non nuls, le quotient image est $a(z_3 - z_1)/[a(z_2 - z_1)] = (z_3 - z_1)/(z_2 - z_1)$, car $a \neq 0$. Les quotients ont le même argument : les angles orientés sont conservés. Enfin écrire $a = |a|e^{i\theta}$ montre que le déplacement centré est agrandi d'un facteur $|a|$ puis tourné d'un angle θ .

Si $a = 1$, c'est une translation ; si $a = 0$, tous les points ont la même image, donc ce n'est pas une similitude. La conjugaison $z \mapsto \bar{z}$ est la symétrie par rapport à l'axe réel ; elle conserve les distances et renverse l'orientation.

À toi d'essayer : Tourner autour d'un autre centre

La rotation de centre d'affixe $a = 1 + i$ et d'angle $\pi/2$ envoie le point $z=3+i$ sur quel point ?

Pour démarrer. Effectue successivement retrait du centre, multiplication par i , puis ajout du centre.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 26 Explication, p. 29

3.5 Racines de l'unité : déterminer toutes les solutions

📖 Définition | Racines n -ièmes de l'unité

Pour $n \geq 1$, une racine n -ième de l'unité est un complexe vérifiant $z^n = 1$. Leur ensemble se note $\mathbb{U}_n$.

★ Théorème | Description complète

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{2ik\pi/n} : k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}.$$

Il y a exactement n racines distinctes, toutes sur le cercle unité. Pour $n \geq 3$, leurs images sont les sommets d'un polygone régulier.

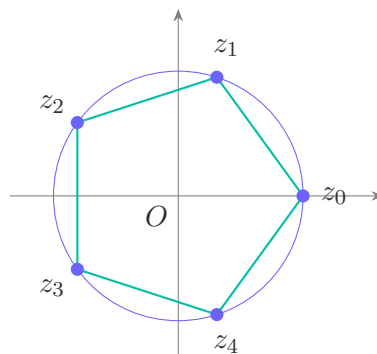
✎ Démonstration | Module, arguments, unicité

1. Chercher les valeurs possibles. Si $z^n = 1$, alors $z \neq 0$ et $|z|^n = 1$. Le réel $r = |z|$ est positif. S'il était inférieur à 1, sa puissance serait inférieure à 1 ; s'il était supérieur, elle serait supérieure. Donc $r = 1$ et $z = e^{i\theta}$.

Moivre donne $z^n = e^{in\theta}$. Cette exponentielle vaut 1 exactement lorsque son angle est un nombre entier de tours : $n\theta = 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Donc $\theta = 2k\pi/n$.

2. Éviter les répétitions. Deux indices k, ℓ donnent la même exponentielle lorsque $2(k - \ell)\pi/n$ est un multiple de 2π , soit lorsque $k - \ell$ est un multiple de n . En divisant tout entier k par n , on écrit $k = qn + r$ avec $0 \leq r < n$. Son exponentielle égale celle d'indice r , car l'angle supplémentaire est $2q\pi$. Les indices $0, \dots, n-1$ suffisent. Deux indices distincts de cette liste diffèrent de moins de n : leur différence ne peut pas être un multiple non nul de n . Les n valeurs sont donc distinctes.

3. Vérifier la réciproque. Pour chaque valeur proposée, $(e^{2ik\pi/n})^n = e^{2ik\pi} = 1$. Nous avons trouvé des solutions, montré qu'elles conviennent, et prouvé qu'aucune autre n'existe. Les angles successifs sont séparés de $2\pi/n$ sur un même cercle : pour $n \geq 3$, ils forment un polygone régulier.



Les cinq points ont ici pour arguments $2k\pi/5$. Les segments relient les indices consécutifs ; le dessin n'est pas utilisé pour prouver les valeurs des racines.

Une figure suggère ; un calcul bien choisi démontre.

💡 Exemple | Cas à connaître

Pour $n = 2$, les angles $2k\pi/2$ sont 0 et π : les racines sont $1, -1$. Pour $n = 3$, les angles sont $0, 2\pi/3, 4\pi/3$. Ils donnent $1, j = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ et $j^2 = -1/2 - i\sqrt{3}/2$. Les deux derniers ont même partie réelle et parties imaginaires opposées, donc $\bar{j} = j^2$. Leur somme avec 1 est $1 - 1/2 - 1/2 + i(\sqrt{3}/2 - \sqrt{3}/2) = 0$.

Pour $n = 4$, les angles $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ donnent $1, i, -1, -i$. Pour contrôler, leurs carrés valent respectivement $1, -1, 1, -1$, donc leurs quatrièmes puissances valent toutes 1 .

✅ Propriété | Produit, inverse, somme

Le produit et l'inverse de deux racines n -ièmes restent dans $\mathbb{U}_n$. Pour $n \geq 2$, la somme de toutes les racines vaut 0 .

✎ Démonstration | La somme, prolongement court

Pour $n \geq 2$, posons $q = e^{2i\pi/n}$. Son angle est strictement entre 0 et 2π , donc $q \neq 1$, et sa puissance n vaut 1 . La somme des racines est $S = 1 + q + \dots + q^{n-1}$. Multiplier par q donne $qS = q + q^2 + \dots + q^n$. Dans $S - qS$, tous les termes intermédiaires s'annulent : $(1 - q)S = 1 - q^n = 0$. Comme $1 - q \neq 0$, on peut diviser, donc $S = 0$.

La stabilité du produit se vérifie séparément : si $u^n = v^n = 1$, alors $(uv)^n = u^n v^n = 1$. Et $(u^{-1})^n = (u^n)^{-1} = 1$, puisque $u \neq 0$. Ces opérations donnent donc encore des racines. Pour $n = 1$, $q = 1$ interdirait la division : l'unique racine est 1 , de somme 1 .

Une preuve à construire : Reconnaître un inverse

Si $u \in \mathbb{U}_n$, démontre que $u^{-1} = \bar{u} = u^{n-1}$.

Pour démarrer. Pour identifier un inverse, montre que le produit avec u vaut 1 .

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 26](#) [Explication, p. 29](#)

À toi d'essayer : Ne perdre aucune racine

Énumère les solutions de $z^4 = 1$ et explique pourquoi il n'y en a pas d'autres.

Pour démarrer. Trouve d'abord le rayon, puis les angles possibles dans un seul tour.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 26](#) [Explication, p. 29](#)

3.6 Racines d'un complexe et longueurs de cordes

✂ Méthode | Résoudre $z^n = w$, prolongement

Si $w = 0$, une puissance nulle impose $z = 0$ par la règle du produit nul. Sinon écrivons $w = \rho e^{i\alpha}$ avec $\rho > 0$, et $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$. L'égalité des modules impose $r^n = \rho$, donc l'unique rayon positif est $r = \rho^{1/n}$.

L'égalité des arguments impose $n\theta = \alpha + 2k\pi$, soit $\theta = (\alpha + 2k\pi)/n$. D'où $z_k = \rho^{1/n} e^{i(\alpha+2k\pi)/n}$, pour $0 \leq k < n$. Comme pour les racines de l'unité, ces n angles sont distincts modulo 2π et tous les autres indices les répètent. Vérification : $z_k^n = \rho e^{i(\alpha+2k\pi)} = w$. Le rayon est une racine n -ième de ρ , tandis que l'angle est divisé par n : ces deux opérations sont différentes.

💡 Exemple | Racines cubiques

$8i$ a pour module 8 et argument $\pi/2$. Si $z^3 = 8i$, son module r satisfait $r^3 = 8$, donc $r = 2$. Les angles satisfont $3\theta = \pi/2 + 2k\pi$, d'où $\theta = \pi/6 + 2k\pi/3$. Pour $k = 0, 1, 2$, ils valent $\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2$. Les coordonnées sont donc $2(\sqrt{3}/2 + i/2) = \sqrt{3} + i$, $2(-\sqrt{3}/2 + i/2) = -\sqrt{3} + i$ et $2(0 - i) = -2i$. Chaque cube a pour module 8 et pour angle $\pi/2$ modulo 2π , donc vaut bien $8i$. Les trois angles sont différents modulo un tour : les solutions sont distinctes.

Pour deux points du cercle unité d'arguments α, β , la longueur de la corde est

$$|e^{i\beta} - e^{i\alpha}| = 2 \left| \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \right|.$$

Pour voir chaque étape, posons $m = (\alpha + \beta)/2$ et $h = (\beta - \alpha)/2$. Alors $\beta = m + h$ et $\alpha = m - h$, donc $e^{i\beta} - e^{i\alpha} = e^{im}(e^{ih} - e^{-ih}) = 2ie^{im} \sin h$ par Euler. Le module du produit est $|2i||e^{im}||\sin h| = 2 \times 1 \times |\sin h|$. Cela prouve la formule, y compris lorsque les deux points coïncident. Pour deux sommets consécutifs d'un polygone régulier à $n \geq 3$ sommets inscrit dans un cercle de rayon R , la longueur du côté est donc $2R \sin(\pi/n)$.

À toi d'essayer : Séparer rayon et angles

Résous $z^3 = 8$ et représente mentalement les trois solutions.

Pour démarrer. Résous l'équation réelle $r^3 = 8$ avant de travailler sur les angles.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 26 [Explication](#), p. 29

4 🧰 Boîte à outils — de la figure à la preuve

4.1 Construire les deux triangles équilatéraux sur un segment

💡 Exemple | Une construction sans coordonnées imposées

On veut construire un troisième sommet C sur le segment AB , avec $A \neq B$. Dans un triangle équilatéral, $AC = AB$ et l'angle de AB vers AC vaut $\pi/3$ ou $-\pi/3$, selon le côté du segment. Le quotient $(c - a)/(b - a)$ doit donc avoir module 1 et l'un de ces arguments : il vaut $e^{\pm i\pi/3}$. Multiplier par $b - a$, puis ajouter a , donne $c = a + e^{\pm i\pi/3}(b - a)$. Vérifions aussi le troisième côté : $c - b = (e^{\pm i\pi/3} - 1)(b - a)$. Le premier facteur vaut $-1/2 \pm i\sqrt{3}/2$, de module $\sqrt{1/4 + 3/4} = 1$. Donc $BC = AB$; les trois côtés sont effectivement égaux. Pour $a = 0, b = 2$, on obtient $c = 2(1/2 \pm i\sqrt{3}/2) = 1 \pm i\sqrt{3}$. Les deux positions sont symétriques par rapport à l'axe réel.

4.2 Orthogonalité et lieu privé d'un point

Soient A et B d'affixes 0 et 2. Pour $z \neq 2$, le quotient $z/(z - 2)$ compare les vecteurs de M vers A et B , puisque l'on peut changer simultanément leurs signes. Si $z \neq 0$ aussi, le quotient est imaginaire pur

Une figure suggère ; un calcul bien choisi démontre.

exactement lorsque l'angle AMB est droit. Le lieu attendu est le cercle de diamètre AB, privé des extrémités lorsque l'on parle d'un angle.

Calculons le quotient avec $z = x + iy$. Multiplier numérateur et dénominateur par $(x - 2) - iy$ donne un dénominateur $(x - 2)^2 + y^2$, strictement positif tant que $z \neq 2$. Le numérateur se développe en $x(x - 2) - ixy + iy(x - 2) - i^2y^2$. Les termes réels sont $x(x - 2) + y^2$; les imaginaires donnent $i[-xy + xy - 2y] = -2iy$.

La partie réelle du quotient est donc $[x(x - 2) + y^2]/[(x - 2)^2 + y^2]$. Comme le dénominateur est non nul, elle s'annule exactement lorsque $x^2 - 2x + y^2 = 0$. Ajouter 1 des deux côtés donne $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$, soit $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Cette équation décrit le cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1, dont A et B sont les extrémités d'un diamètre.

Si l'on demande seulement un quotient imaginaire pur, $z = 0$ convient : le quotient vaut 0, qui est imaginaire pur. Si l'on demande un angle entre les droites MA et MB , on retire aussi $z = 0$, car le vecteur MA serait nul et ne définirait pas de direction. Le point $z = 2$ est exclu dans tous les cas, puisque le quotient n'y est pas défini.

4.3 Transformer les racines en un polygone déplacé

💡 Exemple | Toutes les solutions de $(z - 1)^3 = 8$

Posons $w = z - 1$. Cette substitution est réversible par $z = w + 1$. Les solutions de $w^3 = 8$ ont pour module 2 et pour arguments $0, 2\pi/3, 4\pi/3$. Elles sont donc $2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}$. En ajoutant 1, on trouve $z = 3, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}$.

Les trois points sont tous à distance 2 du point d'affixe 1, et leurs angles autour de ce point sont espacés d'un tiers de tour : ils forment un triangle équilatéral. Le centre est également contrôlé par la moyenne $(3 + i\sqrt{3} - i\sqrt{3})/3 = 1$. Chaque côté a pour longueur $2 \times 2 \sin(\pi/3) = 2\sqrt{3}$. Par exemple la distance entre les deux points d'affixes $\pm i\sqrt{3}$ vaut $|2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$, ce qui confirme la formule.

À toi d'essayer : Reprendre une construction

Pour $a=1$ et $b=1+2i$, calcule les deux sommets équilatéraux possibles.

Pour démarrer. Calcule $b - a = 2i$, puis fais les deux produits avec les signes plus et moins.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 27](#) [Explication, p. 29](#)

À toi d'essayer : Un centre à retrouver

Pour $n \geq 2$, les affixes sont $z_k = a + re^{i\alpha}e^{2ik\pi/n}$, avec $r > 0$. Calcule leur moyenne.

Pour démarrer. Écris la moyenne comme une somme divisée par n , puis sors les facteurs constants.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 27](#) [Explication, p. 30](#)

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases, 6 à 10 relient les notions et 11 à 15 demandent davantage d'initiative. Cherche d'abord, puis utilise un indice si tu en as besoin.

Exercice 1 — Vecteur et milieu

Pour $a = 2 - i$ et $b = -2 + 5i$, calcule l'affixe de $\overrightarrow{AB}$, celle du milieu et la distance AB .

Exercice 2 — Un cercle et un disque

Décris $|z - 3 + 2i| = 4$ et $|z + i| < 1$.

Exercice 3 — Médiatrice

Détermine l'ensemble $|z - 2| = |z - 4i|$. Donne une équation cartésienne.

Exercice 4 — Alignement

Les points d'affixes $a = 1 + i$, $b = 3 + 2i$, $c = 7 + 4i$ sont-ils alignés ?

Exercice 5 — Angle droit

Pour $a = 2$, $b = 4 + i$, $c = 1 + 2i$, prouve que le triangle est rectangle isocèle.

Exercice 6 — Rotation de centre donné

La rotation de centre $1 + i$ et d'angle $\pi/2$ envoie z sur z' . Donne sa formule puis l'image de $3 + i$.

Exercice 7 — Racines quatrièmes

Résous $z^4 = 1$ et représente les solutions.

Exercice 8 — Calculer avec j

Pour $j = e^{2i\pi/3}$, simplifie j^{2026} , $1 + j$ et $(1 + j)^2$.

Exercice 9 — Racines cubiques, prolongement

Résous $z^3 = -8$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 10 — Un lieu avec quotient

Décris les $z \neq 1$ tels que $(z - i)/(z - 1)$ soit réel.

Exercice 11 — Cercle d'un rapport

Détermine les z tels que $|z - 1| = 2|z + 1|$.

Exercice 12 — Transformation et point fixe

Étudie $z' = (1 + i)z + 2$: centre, rapport et angle.

Exercice 13 — Côté d'un hexagone

Un hexagone régulier est inscrit dans un cercle de rayon 3. Calcule son côté et sa grande diagonale.

Exercice 14 — Intersection de racines ★★ ★

Détermine $\mathbb{U}_4 \cap \mathbb{U}_6$ sans lister tous les nombres de $\mathbb{U}_6$.

Exercice 15 — Une suite en spirale ★★ ★

Soit $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n + 1$. Trouve le point fixe ω , exprime $z_n - \omega$ puis étudie sa distance à ω .

6 Problème — Pour aller plus loin

Ce prolongement est accessible à partir du cours : les résultats supplémentaires sont guidés, et leur mémorisation n'est pas un préalable. Tu peux répartir la recherche sur plusieurs séances.

Le pentagone et le nombre d'or

Pose $\zeta = e^{2i\pi/5}$ et $t = \zeta + \zeta^{-1}$. On veut calculer exactement $\cos(2\pi/5)$ puis le rapport diagonale/côté d'un pentagone régulier. Durée indicative : 75 à 100 minutes.

Partie I — Une équation réelle issue de cinq racines

1. Justifie $1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = 0$ et $\zeta^{-1} = \zeta^4$.
2. Divise la somme par ζ^2 et montre que $t^2 + t - 1 = 0$.
3. Justifie que $t > 0$ puis calcule t et $\cos(2\pi/5)$.

Partie II — Un angle moitié

1. Utilise la duplication pour calculer $\cos(\pi/5)$, en justifiant le choix du signe.
2. Vérifie que $2\cos(\pi/5) = (1 + \sqrt{5})/2$.

Partie III — Une proportion géométrique

1. Dans le cercle unité, exprime la longueur s du côté et d de la diagonale reliant deux sommets séparés par un sommet.
2. Démontre $d/s = 2\cos(\pi/5)$.
3. Pose $\varphi = d/s$. Vérifie $\varphi^2 = \varphi + 1$, puis explique pourquoi le rapport ne dépend pas du rayon du cercle.

Pistes

$\zeta^2 + \zeta^{-2} = t^2 - 2$. Pour l'angle moitié, le cosinus est positif. Pour les longueurs, utilise $2\sin(\theta/2)$ et la duplication du sinus.

7 Indices des exercices

Exercice 1

Soustrais pour le vecteur, additionne pour le milieu.

La distance est le module de la différence.

Exercice 2

Isole l'affixe du centre.

Distingue égalité et inégalité stricte.

Exercice 3

Compare les carrés des distances.

Les termes x^2 et y^2 s'annulent.

Exercice 4

Cherche un multiple réel entre les différences.

Il n'est pas nécessaire de développer un quotient évident.

Exercice 5

Multiplie $b-a$ par i .

Interprète à la fois module et argument.

Exercice 6

Soustrais le centre avant de multiplier.

Ajoute le centre après la rotation.

Exercice 7

Les arguments sont espacés de $2\pi/4$.

Vérifie la puissance quatrième de chaque nombre.

Exercice 8

Utilise $j^3=1$ et la somme des trois racines.

Réduis les exposants modulo trois.

Exercice 9

Écris -8 avec un argument π .

Divise par trois les arguments $\pi+2k\pi$.

Exercice 10

Utilise le critère d'alignement avec M comme sommet.

N'oublie pas le point exclu par le dénominateur.

Une figure suggère ; un calcul bien choisi démontre.

Exercice 11

Développe puis complète le carré en x .

Divise d'abord l'équation par 3.

Exercice 12

Résous l'équation de point fixe.

Mets ensuite $1+i$ sous forme exponentielle.

Exercice 13

Applique la formule de la corde.

Les sommets opposés sont séparés par un angle π .

Exercice 14

Divise deux puissances égales à 1.

Vérifie ensuite la réciproque.

Exercice 15

Soustrais une solution constante de la récurrence.

Le module du multiplicateur est inférieur à 1.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Un vecteur se calcule par arrivée moins départ : $b - a = (-2 + 5i) - (2 - i) = -2 + 5i - 2 + i = -4 + 6i$.
La distance est donc $|b - a| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.
Le milieu utilise au contraire la moyenne : $(a + b)/2 = (2 - i - 2 + 5i)/2 = 4i/2 = 2i$. Ses coordonnées sont $(0, 2)$, bien les moyennes de $(2, -1)$ et $(-2, 5)$. Pour contrôler la distance au milieu, $2i - a = -2 + 3i$ a un module $\sqrt{13}$, moitié de AB .

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Le centre se lit dans $z - a$, pas dans les signes laissés devant les nombres. Ici $z - 3 + 2i = z - (3 - 2i)$.
L'égalité $|z - (3 - 2i)| = 4$ décrit donc un cercle de centre $(3, -2)$ et rayon 4 : tous les points à distance exactement 4.
Dans $|z + i| < 1$, on écrit $z + i = z - (-i)$. Le centre est $(0, -1)$ et la distance doit être strictement inférieure à 1. Il s'agit du disque ouvert ; les points à distance 1, par exemple l'origine, sont exclus.
Le centre lui-même convient, car sa distance au centre est $0 < 1$.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Les deux modules sont les distances aux points $A(2, 0)$ et $B(0, 4)$. L'égalité définit leur médiatrice.
Pour obtenir son équation, posons $z = x + iy$ et élevons au carré, ce qui est réversible pour des distances positives ou nulles :

$$(x - 2)^2 + y^2 = x^2 + (y - 4)^2.$$

Développer donne $x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 - 8y + 16$. Les carrés s'annulent ; il reste $-4x + 8y = 12$, soit $x - 2y + 3 = 0$. Le milieu $(1, 2)$ satisfait $1 - 4 + 3 = 0$. Le vecteur $AB = (-2, 4)$ est parallèle au vecteur normal $(1, -2)$ de cette droite : elle est bien perpendiculaire au segment.

Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

Calculons les deux déplacements depuis le même point : $b - a = (3 + 2i) - (1 + i) = 2 + i$ et $c - a = (7 + 4i) - (1 + i) = 6 + 3i$. Le premier est non nul, et le second vaut $3(2 + i)$. Donc $(c - a)/(b - a) = 3$, un réel.
Cela signifie $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$: le second déplacement a la même direction et le même sens, et une longueur triple. Les points A, B, C sont donc alignés, dans cet ordre sur la demi-droite issue de A .
Le quotient réel établit l'alignement ; sa valeur positive précise le sens.

Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

Depuis A , les affixes des deux vecteurs sont $b-a = (4+i)-2 = 2+i$ et $c-a = (1+2i)-2 = -1+2i$. Le calcul $i(2+i) = 2i+i^2 = -1+2i$ montre que le second est i fois le premier. Donc le quotient vaut i .

Comme $|i| = 1$, les longueurs AC et AB sont égales. Comme un argument de i est $\pi/2$, les directions sont perpendiculaires. Les deux déplacements sont non nuls, donc ils définissent bien deux côtés : le triangle est rectangle isocèle en A . Les longueurs valent toutes deux $\sqrt{5}$, ce qui fournit un contrôle numérique.

Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

Notons $\omega = 1+i$ le centre. On retire d'abord ω au point, on multiplie le déplacement par $e^{i\pi/2} = i$, puis on remet le centre : $z' = \omega + i(z - \omega)$.

Développer donne $z' = 1+i+iz-i(1+i) = 1+i+iz-i-i^2 = iz+2$. Pour $z = 3+i$, cela donne $3i+i^2+2 = 1+3i$. Le déplacement initial depuis le centre était 2 ; le déplacement final est $2i$. Tous deux ont longueur 2, et le second est tourné d'un quart de tour. Enfin $z = \omega$ donne $z' = \omega$, ce qui vérifie que le centre reste fixe.

Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

Si $z^4 = 1$, le module satisfait $|z|^4 = 1$, donc $|z| = 1$. Écrivons $z = e^{i\theta}$. Il faut $4\theta = 2k\pi$, donc $\theta = k\pi/2$. Les indices $k = 0, 1, 2, 3$ donnent $1, i, -1, -i$; un indice augmenté de 4 ajoute un tour complet et répète une solution.

Les coordonnées sont $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$. Place ces quatre points sur les axes et relie-les dans cet ordre : chaque angle central vaut $\pi/2$, et chaque côté a longueur $\sqrt{2}$, donc ils forment un carré. Leurs carrés valent 1, $-1, 1, -1$, puis leurs quatrièmes puissances valent 1 : les quatre solutions sont vérifiées.

Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

La définition donne $j^3 = e^{2i\pi} = 1$. Comme $2026 = 3 \times 675 + 1$, $j^{2026} = (j^3)^{675}j = j$. La somme des trois racines donne $1 + j + j^2 = 0$; en soustrayant j^2 , on obtient $1 + j = -j^2$.

Élevons cette dernière égalité au carré : $(1+j)^2 = (-j^2)^2 = j^4 = j^3j = j$. Le signe moins disparaît parce qu'il est élevé au carré. Contrôle algébrique : $1 + 2j + j^2 = (1 + j + j^2) + j = 0 + j = j$.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Le nombre -8 a pour module 8 et argument π , donc $-8 = 8e^{i\pi}$. Une racine cubique a rayon r tel que $r^3 = 8$, soit $r = 2$, et angle $\theta = (\pi + 2k\pi)/3$.

Pour $k = 0, 1, 2$, les angles sont $\pi/3, \pi, 5\pi/3$. Les solutions sont $2(1/2 + i\sqrt{3}/2) = 1 + i\sqrt{3}$, -2 et $1 - i\sqrt{3}$. Cubées, elles ont module 8 et angles $\pi, 3\pi, 5\pi$, tous équivalents à π : elles valent bien -8 . Les trois angles initiaux sont distincts modulo 2π , et tous les autres indices répètent ces valeurs.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Notons M le point d'affixe z , A celui d'affixe i et B celui d'affixe 1. Le quotient $(z - i)/(z - 1) = (i - z)/(1 - z)$ compare deux vecteurs issus de M ; les deux signes moins s'annulent. Le dénominateur est non nul puisque $z \neq 1$.

Un quotient réel signifie que ces vecteurs sont colinéaires. Le lieu est donc la droite (AB) , privée de B . Les points $A(0, 1)$ et $B(1, 0)$ vérifient $x + y = 1$, équation de cette droite. Le point A est autorisé : son quotient vaut 0, qui est un réel. Il faut donc retirer seulement le point d'affixe 1, pas les deux extrémités.

Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

Posons $z = x + iy$. Les deux membres étant positifs ou nuls, leur égalité est équivalente à celle de leurs carrés : $(x-1)^2 + y^2 = 4((x+1)^2 + y^2)$. Développer puis ramener à droite donne $3x^2 + 3y^2 + 10x + 3 = 0$. Diviser par 3 donne $x^2 + y^2 + (10/3)x + 1 = 0$.

Pour compléter le carré, $x^2 + (10/3)x = (x + 5/3)^2 - 25/9$. Donc $(x + 5/3)^2 + y^2 = 25/9 - 1 = 16/9$. C'est un cercle de centre $(-5/3, 0)$ et rayon $4/3$. Contrôle au point $z = -1/3$: $|z - 1| = 4/3$ et $2|z + 1| = 2 \times 2/3 = 4/3$. Aucun point n'a été introduit par le passage aux carrés.

Corrigé 12

 *Démonstration / Solution expliquée*

Un centre fixe ω satisfait $\omega = (1 + i)\omega + 2$. Soustraire le terme de droite en ω donne $-i\omega = 2$, donc $\omega = 2/(-i) = 2i$, puisque $(-i)i = 1$.

En soustrayant l'équation du point fixe, $z' - 2i = (1 + i)(z - 2i)$. Or $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Chaque déplacement depuis $2i$ est donc multiplié en longueur par $\sqrt{2}$ et tourné de $\pi/4$. C'est une similitude de centre $2i$, rapport $\sqrt{2}$, angle $\pi/4$. Ce n'est pas une rotation, car une rotation conserverait les longueurs ; ici leur facteur n'est pas 1.

Corrigé 13 *Démonstration / Solution expliquée*

Six sommets régulièrement espacés divisent le tour complet en six angles égaux : l'angle central d'un côté est $2\pi/6 = \pi/3$. La longueur d'une corde de rayon R et angle θ est $2R \sin(\theta/2)$ pour ces angles positifs. Donc le côté vaut $2 \times 3 \sin(\pi/6) = 6 \times 1/2 = 3$.

La grande diagonale joint deux sommets opposés, séparés par trois intervalles, donc un angle $3 \times \pi/3 = \pi$. Elle est un diamètre : longueur $2R = 6$. La formule de corde confirme $2 \times 3 \sin(\pi/2) = 6$.

Corrigé 14 *Démonstration / Solution expliquée*

Si z appartient aux deux ensembles, $z^4 = 1$ et $z^6 = 1$. Il est non nul, donc nous pouvons diviser les deux égalités : $z^6/z^4 = z^2 = 1$. La factorisation $(z - 1)(z + 1) = 0$ donne $z = 1$ ou $z = -1$.

Cela prouve que l'intersection est incluse dans $\{1, -1\}$, mais il faut vérifier que les candidats appartiennent bien aux deux ensembles. Pour 1, toutes les puissances valent 1 ; pour -1 , les puissances 4 et 6 sont paires et valent aussi 1. Les deux candidats conviennent : $\mathbb{U}_4 \cap \mathbb{U}_6 = \{1, -1\}$.

Corrigé 15 *Démonstration / Solution expliquée*

Posons $a = (1+i)/2$. Le point fixe satisfait $(1-a)\omega = 1$. Or $1-a = (1-i)/2$, donc $\omega = 2/(1-i) = 2(1+i)/2 = 1+i$.

Soustraire $\omega = a\omega + 1$ de la récurrence donne $z_{n+1} - \omega = a(z_n - \omega)$. Au rang 0, l'écart est $-\omega = -(1+i)$. Si l'écart au rang n vaut $-(1+i)a^n$, le suivant vaut $a[-(1+i)a^n] = -(1+i)a^{n+1}$.

La récurrence prouve $z_n - \omega = -(1+i)a^n$.

La distance au centre est son module : $|z_n - \omega| = \sqrt{2}(\sqrt{2}/2)^n$. Comme $0 < \sqrt{2}/2 < 1$, la puissance tend vers zéro, donc les points se rapprochent de ω . L'argument de a vaut $\pi/4$: chaque étape ajoute un huitième de tour tout en réduisant le rayon.

9 Corrigé du problème

Partie I — Des complexes à une équation réelle

1. $\zeta = e^{2i\pi/5}$ vérifie $\zeta^5 = e^{2i\pi} = 1$ et $\zeta \neq 1$, car son angle n'est pas un tour entier. Pour $S = 1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4$, la soustraction $S - \zeta S$ donne $1 - \zeta^5 = 0$. Donc $(1 - \zeta)S = 0$, et comme $1 - \zeta \neq 0$, $S = 0$. Enfin $\zeta\zeta^4 = \zeta^5 = 1$, donc $\zeta^{-1} = \zeta^4$.

2. Le nombre ζ^2 est non nul. En divisant chaque terme de $S = 0$ par lui, on obtient $\zeta^{-2} + \zeta^{-1} + 1 + \zeta + \zeta^2 = 0$. Regroupons les exposants opposés : $(\zeta^2 + \zeta^{-2}) + t + 1 = 0$. Le carré de t vaut $(\zeta + \zeta^{-1})^2 = \zeta^2 + 2\zeta\zeta^{-1} + \zeta^{-2} = \zeta^2 + 2 + \zeta^{-2}$. Donc la première parenthèse vaut $t^2 - 2$, et l'équation devient $t^2 + t - 1 = 0$.

3. Euler donne $t = 2 \cos(2\pi/5)$, donc t est réel. L'angle $2\pi/5$ est entre 0 et $\pi/2$, où le cosinus est positif : $t > 0$. Le discriminant de $t^2 + t - 1$ vaut $1 - 4(-1) = 5$, donc ses deux racines sont $(-1 \pm \sqrt{5})/2$. Seule la racine avec le signe plus est positive, puisque $\sqrt{5} > 1$. Ainsi $t = (\sqrt{5} - 1)/2$, puis $\cos(2\pi/5) = t/2 = (\sqrt{5} - 1)/4$.

Partie II — Le signe de la racine compte

1. La duplication dit $\cos(2u) = 2 \cos^2 u - 1$. Avec $u = \pi/5$, on isole le carré :

$$\cos^2(\pi/5) = \frac{1 + \cos(2\pi/5)}{2} = \frac{1 + (\sqrt{5} - 1)/4}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{8}.$$

Comme $0 < \pi/5 < \pi/2$, le cosinus est positif : nous devons choisir la racine carrée positive, pas les deux signes.

2. Pour simplifier cette racine, calculons $((1 + \sqrt{5})/4)^2 = (1 + 2\sqrt{5} + 5)/16 = (3 + \sqrt{5})/8$. Le nombre $(1 + \sqrt{5})/4$ est positif et possède le carré recherché ; il est donc égal au cosinus. Multiplier par 2 donne $2 \cos(\pi/5) = (1 + \sqrt{5})/2$.

Partie III — Interpréter les deux cordes

1. Entre deux sommets consécutifs, l'angle central est $2\pi/5$. La formule de la corde, avec rayon 1, donne $s = 2 \sin(\pi/5)$. Une diagonale qui saute un sommet couvre deux intervalles, donc un angle $4\pi/5$; sa longueur est $d = 2 \sin(2\pi/5)$. Les sinus sont positifs pour ces angles, ce qui permet d'enlever les valeurs absolues.

2. Comme $\sin(\pi/5) > 0$, le côté est non nul et le quotient est défini. La duplication du sinus donne

$$\frac{d}{s} = \frac{2 \sin(2\pi/5)}{2 \sin(\pi/5)} = \frac{2 \sin(\pi/5) \cos(\pi/5)}{\sin(\pi/5)} = 2 \cos(\pi/5) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

La simplification porte sur un facteur dont on a vérifié qu'il n'est pas nul.

3. Avec $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$, $\varphi^2 = (1 + 2\sqrt{5} + 5)/4 = (3 + \sqrt{5})/2$. D'autre part $\varphi + 1 = (1 + \sqrt{5} + 2)/2 = (3 + \sqrt{5})/2$. Les deux expressions sont égales. Si le rayon devient $R > 0$, les longueurs deviennent Rs et Rd ; leur quotient vaut $Rd/(Rs) = d/s$. Le nombre obtenu décrit donc une proportion de la figure, indépendante de sa taille.

10 Faire le point par une variante autonome

Essaie cette variante sans relire le corrigé précédent. Explique le choix de ta méthode, puis utilise les contrôles pour décider quelle notion retravailler.

À toi d'essayer : Une configuration complète

A,B,C ont pour affixes $a = 1$, $b = 3 + i$, $c = -1 + 4i$. Calcule $(c - a)/(b - a)$ et décris le triangle.

Pour démarrer. Soustrais a dans les deux déplacements, puis teste si l'un est un multiple de l'autre.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 27 Explication, p. 30

11 Fiche-mémoire

- $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$; $AB = |b - a|$; le milieu a pour affixe $(a + b)/2$.
- Le quotient $(c - a)/(b - a)$ a pour module AC/AB et pour argument l'angle de $\overrightarrow{AB}$ vers $\overrightarrow{AC}$.
- Quotient réel : alignement ; quotient imaginaire pur non nul : orthogonalité des directions.
- Rotation : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.
- $\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n} : 0 \leq k < n\}$; somme nulle pour $n \geq 2$.
- Une corde du cercle de rayon R mesure $2R|\sin((\beta - \alpha)/2)|$.

Contrôle. Les points définissant mes droites sont-ils distincts ? Ai-je conservé l'ordre des vecteurs ? Ai-je distingué l'argument modulo 2π d'une égalité réelle ? Ai-je compté toutes les racines une seule fois ?

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Retrouver l'ordre d'un vecteur

Indice 1 — Une piste.

Soustrais départ à arrivée.

Indice 2 — Un pas de plus.

Inverser le sens change le signe, tandis que le milieu utilise une moyenne.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Une distance bien centrée

Indice 1 — Une piste.

Écris l'intérieur du module sous la forme $z - a$.

Indice 2 — Un pas de plus.

Le centre a pour affixe $-2 + 3i$.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Lire un lieu sans développer

Indice 1 — Une piste.

Chaque module d'une différence mesure une distance.

Indice 2 — Un pas de plus.

Le second point de référence a pour affixe -1 .

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Lire longueur et angle ensemble

Indice 1 — Une piste.

Calcule le module et un argument de $2i$.

Indice 2 — Un pas de plus.

Le quotient compare AC à AB, dans cet ordre.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Tourner autour d'un autre centre**Indice 1 — Une piste.**

Commence par le déplacement $z - a$.

Indice 2 — Un pas de plus.

Multiplie ce déplacement par i , puis rajoute a .

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Reconnaître un inverse**Indice 1 — Une piste.**

Toutes ces racines ont pour module 1.

Indice 2 — Un pas de plus.

Utilise $u\bar{u} = 1$ puis $u^n = 1$.

[Revenir à la recherche, p. 10](#)

Ne perdre aucune racine**Indice 1 — Une piste.**

Le module doit être 1 ; l'angle multiplié par 4 doit être un multiple de deux π .

Indice 2 — Un pas de plus.

Prends quatre représentants d'angles espacés de $\pi/2$.

[Revenir à la recherche, p. 10](#)

Séparer rayon et angles**Indice 1 — Une piste.**

Le rayon r satisfait $r^3 = 8$.

Indice 2 — Un pas de plus.

Les angles satisfont trois θ congru à zéro modulo deux π .

[Revenir à la recherche, p. 11](#)

Reprendre une construction**Indice 1 — Une piste.**

Utilise $c = a + e^{\pm i\pi/3}(b - a)$.

Indice 2 — Un pas de plus.

Multiplie $2i$ par $1/2 \pm i\sqrt{3}/2$.

[Revenir à la recherche, p. 12](#)

Un centre à retrouver**Indice 1 — Une piste.**

Additionne séparément les termes constants et ceux contenant les racines de l'unité.

Indice 2 — Un pas de plus.

La somme des racines vaut zéro.

[Revenir à la recherche, p. 12](#)

Une configuration complète**Indice 1 — Une piste.**

Calcule les deux déplacements depuis A.

Indice 2 — Un pas de plus.

Compare $c - a = -2 + 4i$ à $i(b - a)$.

[Revenir à la recherche, p. 23](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Retrouver l'ordre d'un vecteur

$b - a = (-1 + 3i) - (2 + i) = (-1 - 2) + i(3 - 1) = -3 + 2i$. Pour le trajet inverse, $a - b = (2 + i) - (-1 + 3i) = 3 - 2i$, l'opposé du premier. Le milieu a pour affixe $(a + b)/2 = (1 + 4i)/2 = 1/2 + 2i$. En coordonnées, la moyenne des abscisses 2 et -1 est $1/2$, et celle des ordonnées 1 et 3 est 2. Soustraction et moyenne répondent à deux questions différentes : déplacement et position.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Une distance bien centrée

Il faut $a = -2 + 3i$, car $z - (-2 + 3i) = z + 2 - 3i$. L'inégalité signifie que la distance au centre $(-2, 3)$ est au plus 2 : c'est le disque fermé, bord compris. Pour trouver des points du bord, déplaçons-nous de 2 horizontalement depuis le centre. Les affixes sont $a + 2 = 3i$ et $a - 2 = -4 + 3i$. Leurs différences avec a valent 2 et -2 , toutes deux de module 2. Le centre donne au contraire un module 0, strictement inférieur à 2 : il est à l'intérieur.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Lire un lieu sans développer

Appelons A le point d'affixe $2 - i$. Le module $|z - (2 - i)|$ mesure MA . L'égalité à 3 donne tous les points situés exactement à 3 de A , donc le cercle de centre $(2, -1)$ et rayon 3. Dans la seconde égalité, $z + 1 = z - (-1)$: le deuxième module mesure la distance au point $B(-1, 0)$. La condition est $MA = MB$, définition de la médiatrice de $[AB]$. Pour contrôle, leur milieu d'affixe $(2 - i - 1)/2 = (1 - i)/2$ est bien à la même distance des deux extrémités.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Lire longueur et angle ensemble

Le quotient compare le déplacement AC au déplacement AB . Son module vaut $|2i| = 2$, donc $AC/AB = 2$ et $AC = 2AB$. Son argument est $\pi/2$ modulo 2π , donc la direction de AC s'obtient en tournant celle de AB d'un quart de tour direct. Les côtés sont perpendiculaires : le triangle est rectangle en A . Il n'est pas isocèle : ses deux côtés de l'angle droit ont des longueurs différentes, et l'hypoténuse est plus longue que chacun d'eux.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Tourner autour d'un autre centre

Le déplacement initial est $z - a = (3 + i) - (1 + i) = 2$. Un quart de tour direct multiplie ce déplacement par i , donnant $2i$. On remet ensuite le centre : $z' = a + 2i = 1 + 3i$. Contrôle : $|z - a| = |2| = 2$ et $|z' - a| = |2i| = 2$, donc la distance au centre est conservée. Si le point initial était le centre, son déplacement serait zéro et le même calcul le laisserait fixe. Multiplier directement z par i aurait tourné autour de l'origine, pas autour de a .

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Reconnaître un inverse

Comme $u^n = 1$, $u \neq 0$ et son module vaut 1. Donc $u\bar{u} = |u|^2 = 1$: le conjugué est un inverse. D'autre part $uu^{n-1} = u^n = 1$, donc u^{n-1} est aussi un inverse. L'inverse est unique : si $uv = uw = 1$, multiplier par $1/u$ donne $v = w$. Ainsi $u^{-1} = \bar{u} = u^{n-1}$. Pour $u = i$ et $n = 4$, $i^3 = -i$ et $i(-i) = 1$, ce qui vérifie les trois expressions.

[Revenir à la recherche, p. 10](#)

Ne perdre aucune racine

L'égalité des modules donne $|z|^4 = 1$, donc $|z| = 1$. Écrivons $z = e^{i\theta}$. Moivre donne $z^4 = e^{4i\theta} = 1$, donc $4\theta = 2k\pi$ et $\theta = k\pi/2$. Sur un seul tour, $k = 0, 1, 2, 3$ donne $1, i, -1, -i$. Pour tout entier $k = 4q + r$ avec $0 \leq r < 4$, l'angle vaut $2q\pi + r\pi/2$ et répète l'un des quatre. Ainsi aucun autre point ne manque. Chaque quatrième puissance vaut 1, et les quatre coordonnées sont distinctes : nous avons à la fois vérification et exhaustivité.

[Revenir à la recherche, p. 10](#)

Séparer rayon et angles

Le rayon est $r = 2$, car $2^3 = 8$. Écrire $8 = 8e^{i0}$ impose $3\theta = 2k\pi$, donc les trois angles distincts sont $0, 2\pi/3, 4\pi/3$. Les coordonnées donnent $2, 2(-1/2 + i\sqrt{3}/2) = -1 + i\sqrt{3}$ et $-1 - i\sqrt{3}$. Chaque cube a pour module 8 et argument un tour entier, donc vaut 8. Les trois points ont le même rayon 2 et des angles espacés de $2\pi/3$: ils forment un triangle équilatéral centré en O .

[Revenir à la recherche, p. 11](#)

Reprendre une construction

La formule est $c = a + (1/2 \pm i\sqrt{3}/2)(b - a)$. Ici $b - a = 2i$. Pour le signe plus, $(1/2 + i\sqrt{3}/2)2i = i + i^2\sqrt{3} = i - \sqrt{3}$, donc $c = 1 - \sqrt{3} + i$. Pour le signe moins, le produit est $i - i^2\sqrt{3} = i + \sqrt{3}$, donc $c = 1 + \sqrt{3} + i$. Pour chacun, la distance à $A(1, 0)$ est $\sqrt{3+1} = 2$ et celle à $B(1, 2)$ est aussi $\sqrt{3+1} = 2$, égale à AB . Les deux triangles sont donc bien équilatéraux, et les sommets sont symétriques par rapport à $x = 1$.

[Revenir à la recherche, p. 12](#)

Un centre à retrouver

En additionnant les n affixes, le terme constant a apparaît n fois : $\sum z_k = na + re^{i\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n}$. Le second facteur est constant, donc peut être mis devant la somme. Pour $n \geq 2$, la somme des racines de l'unité est zéro, démontrée par la somme géométrique. Ainsi $\sum z_k = na$, et diviser par le nombre de points n donne la moyenne a . Le rayon et l'orientation n'affectent pas ce centre, car leurs contributions symétriques s'annulent.

[Revenir à la recherche, p. 12](#)

Une configuration complète

$b - a = 2 + i$ et $c - a = -2 + 4i$. Calculons $2i(2 + i) = 4i + 2i^2 = -2 + 4i$: le quotient vaut donc $2i$, sans division compliquée. Son module 2 donne $AC = 2AB$; son argument $\pi/2$ donne un angle droit en A . Les longueurs sont $AB = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$. Le troisième côté a pour affixe $c - b = -4 + 3i$ et longueur 5. Le contrôle de Pythagore donne $5 + 20 = 25$, cohérent avec le triangle rectangle.

[Revenir à la recherche, p. 23](#)