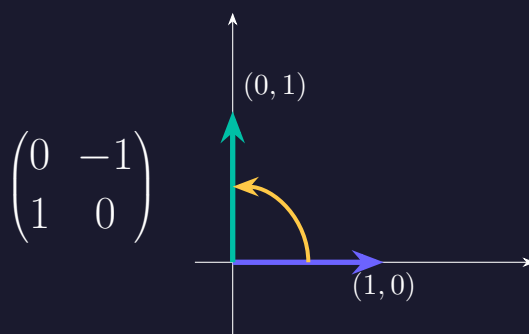


Matrices, systèmes et transformations

Produit ■ Inverse ■ Systèmes et géométrie



Un quart de tour, un produit

Terminale — Option Mathématiques expertes — Programme officiel

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	🔍 Pourquoi ce chapitre ?	3
1.1	Le problème fondamental : organiser des calculs couplés	3
2	🧠 L'idée avant la formule	3
2.1	Construire une case avant de retenir une règle	3
2.2	Pourquoi les dimensions intérieures doivent coïncider	3
2.3	Défaire une transformation exige de conserver l'information	4
3	🎓 Le cours formel	4
3.1	Dimensions et opérations terme à terme	4
3.2	Le produit ligne-colonne et son sens	5
3.3	Les règles et leurs limites	6
3.4	Inverse d'une matrice d'ordre 2	7
3.5	Systèmes et inverse d'ordre 3	9
3.6	Transformations du plan et composition	10
3.7	Programmer un produit et contrôler le sens	12
4	🧰 Boîte à outils — le pivot expliqué ligne par ligne	12
4.1	Un système d'ordre 3 non triangulaire au départ	12
4.2	Lire l'inverse dans la même élimination	12
4.3	Savoir quand une transformation perd de l'information	13
5	✎ Exercices progressifs	14
6	🔗 Problème — Pour aller plus loin	16
7	Indices des exercices	17
8	✔ Corrigés détaillés	19
9	Corrigé du problème	23
10	Faire le point par une variante autonome	25
11	Fiche-mémoire	26
12	Indices des pauses et des preuves	27
13	Explications des pauses et des preuves	30

1 ? Pourquoi ce chapitre ?

1.1 Le problème fondamental : organiser des calculs couplés

Deux ateliers utilisent trois matières premières. Les quantités se rangent en deux lignes et trois colonnes. Si les prix changent, tu veux recalculer les deux coûts sans réinventer la méthode. Une matrice conserve l'organisation des données et permet d'écrire le calcul complet en un seul produit.

Intuition | Un tableau devient un outil de transformation

Une matrice n'est pas un nombre décoré de parenthèses. Ses dimensions disent quelles informations elle reçoit et lesquelles elle produit. Le produit sera construit pour représenter une succession de transformations, ce qui expliquera son ordre.

Prérequis. Calcul littéral, systèmes linéaires, coordonnées de vecteurs, trigonométrie. Les matrices du cours ont des coefficients réels. On explicitera l'ordre de chaque produit.

Méthode | Objectifs

Lire les dimensions ; effectuer un produit ligne-colonne ; reconnaître l'identité ; calculer un inverse d'ordre 2 ou 3 ; résoudre un système ; composer des transformations ; interpréter les résultats avec leurs unités.

Les notions et applications du cours sont au programme. Le déterminant est ici seulement la quantité $ad-bc$ utile à l'ordre 2, sans théorie générale des déterminants. Le problème d'interpolation est un prolongement guidé.

Méthode | Comment travailler cette fiche

Commence par l'idée avant la formule, puis travaille une notion à la fois. Dans le cours, reformule la définition avec tes mots et refais l'exemple sans regarder la dernière ligne. Les pauses te proposent une question, deux indices graduels et une explication ; tu peux chercher avec une aide sans renoncer au raisonnement.

Après le cours, la boîte à outils relie plusieurs notions dans des méthodes commentées. Les exercices passent des bases aux questions d'initiative. Si tu bloques, prends d'abord un indice ; après le corrigé, explique pourquoi la méthode convient et refais une variante. Le problème final construit un approfondissement à partir du cours, puis une dernière activité te permet de faire le point.

2 L'idée avant la formule

2.1 Construire une case avant de retenir une règle

Un atelier utilise 2 kg d'une matière à 5 euros/kg et 3 kg d'une autre à 4 euros/kg. Son coût est $2 \times 5 + 3 \times 4 = 22$ euros. Tu multiplies des quantités par les prix correspondants, puis tu additionnes. C'est exactement le calcul « ligne de quantités, colonne de prix ».

2.2 Pourquoi les dimensions intérieures doivent coïncider

Chaque quantité doit rencontrer un prix. S'il manque un prix ou s'il y en a un de trop, les données ne se correspondent plus. Un tableau $m \times n$ multiplié par un tableau $n \times p$ possède n correspondances dans chaque case, m lignes de départ et p colonnes d'arrivée.

2.3 Défaire une transformation exige de conserver l'information

Une rotation peut être annulée par la rotation d'angle opposé. En revanche, projeter le plan sur une droite efface une coordonnée : plusieurs points ont la même image. Une matrice inverse jouera le rôle de transformation qui défait la première ; elle ne pourra pas exister si l'information a été perdue.

⚠ Attention | L'ordre fait partie du sens

« Tourner, puis projeter » ne donne généralement pas le même résultat que « projeter, puis tourner ». Tu verras cette différence dans $AB \neq BA$. Écris les étapes sur une colonne pour retrouver l'ordre, au lieu d'appliquer automatiquement les réflexes du calcul réel.

3 Le cours formel

3.1 Dimensions et opérations terme à terme

Définition | Matrice

Une matrice A de dimension $m \times n$ possède m lignes et n colonnes. Son coefficient a_{ij} est à la ligne i et à la colonne j . Elle est carrée si $m = n$, colonne si $n = 1$, ligne si $m = 1$.

Exemple | Un tableau de consommations

Dans $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, une ligne se lit horizontalement et une colonne verticalement. Il y a deux lignes, $(2, 1, 3)$ et $(4, 0, 2)$, puis trois colonnes : le format est 2×3 .

Pour a_{13} , le premier indice 1 choisit la première ligne, puis le second indice 3 choisit sa troisième case : la valeur est 3. Pour a_{21} , on prend la seconde ligne et sa première case : 4. Si les lignes sont les ateliers et les colonnes les matières, $a_{13} = 3$ signifie que le premier atelier consomme 3 unités de la troisième matière. Le zéro $a_{22} = 0$ signifie aucune consommation de la deuxième matière par le deuxième atelier.

Deux matrices sont égales lorsqu'elles ont les mêmes dimensions et des coefficients égaux à chaque position. On additionne seulement des matrices de mêmes dimensions : $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$. La matrice nulle a tous ses coefficients nuls ; son format doit rester cohérent avec le calcul.

⚠ Attention | Dimensions avant tout

On ne peut pas additionner une matrice 2×3 et une matrice 3×2 , même si elles possèdent toutes deux six coefficients. Le rôle des lignes et colonnes compte autant que le nombre total de cases.

À toi d'essayer : Lire une case avec son rôle

Une matrice de quatre lignes et trois colonnes range quatre magasins et trois produits. Que signifie a_{23} ? Quel format pour les prix unitaires ?

Pour démarrer. Associe le premier indice au magasin et le second au produit.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 27 Explication, p. 30

3.2 Le produit ligne-colonne et son sens

Définition | Produit matriciel

Si A est de dimension $m \times n$ et B de dimension $n \times p$, le produit AB est défini, de dimension $m \times p$, et

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

On multiplie les coefficients de la ligne i de A par ceux de la colonne j de B , puis on additionne.

Exemple | Un calcul d'ordre 2

Les deux matrices sont de format 2×2 , donc leur produit aussi. La case (i, j) utilise la ligne i de A et la colonne j de B , dans cet ordre.

Pour la case $(1, 1)$: ligne $(1, 2)$, colonne $(2, 1)^T$, donc $1 \times 2 + 2 \times 1 = 4$. Pour $(1, 2)$: même ligne et colonne $(0, -1)^T$, donc $1 \times 0 + 2(-1) = -2$.

Pour $(2, 1)$: ligne $(3, 4)$ et colonne $(2, 1)^T$, donc $3 \times 2 + 4 \times 1 = 10$. Pour $(2, 2)$: ligne $(3, 4)$ et colonne $(0, -1)^T$, donc $3 \times 0 + 4(-1) = -4$.

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}.$$

Chaque case est une somme de deux produits ; multiplier seulement les cases de mêmes indices aurait donné une autre opération.

Intuition | Pourquoi cette somme ?

Prenons deux relations successives à deux variables. La première transforme (x_1, x_2) en $y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2$ et $y_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2$. La seconde donne $z_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$. Remplaçons chaque y :

$$\begin{aligned} z_1 &= a_{11}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2) + a_{12}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2) \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})x_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})x_2. \end{aligned}$$

Le coefficient devant x_1 est la première ligne de A multipliée par la première colonne de B ; celui devant x_2 utilise la deuxième colonne. Pour plus de variables, on additionne de la même façon toutes les contributions intermédiaires y_k , donnant $(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$. La somme provient donc d'une substitution complète des relations, pas d'une convention sans sens.

💡 Exemple | Un coût total

Les lignes de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ décrivent les quantités des trois matières. La colonne des prix est $p = (5, 7, 2)^T$ dans le même ordre. Le format $(2 \times 3)(3 \times 1)$ produit une colonne de deux coûts. Le premier atelier paie $2 \times 5 + 1 \times 7 + 3 \times 2 = 10 + 7 + 6 = 23$. Le second paie $4 \times 5 + 0 \times 7 + 2 \times 2 = 20 + 0 + 4 = 24$. Ainsi $Ap = (23, 24)^T$. Chaque produit « quantité fois prix unitaire » a l'unité monétaire, et on additionne les coûts des trois matières pour le même atelier. Ce sens confirme l'ordre des lignes et de la colonne.

À toi d'essayer : Le produit existe-t-il ?

A est de dimension 2×3 et B de dimension 3×1 . Donne le format de AB et décide si BA est défini. **Pour démarrer.** Écris les deux formats côte à côte, puis compare les dimensions du milieu.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 27](#) [Explication, p. 30](#)

À toi d'essayer : Contrôler une case indépendamment

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, calcule seulement la case (2,1) de AB.

Pour démarrer. Écris seulement la ligne 2 de A et la colonne 1 de B.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 27](#) [Explication, p. 30](#)

3.3 Les règles et leurs limites

✔ Propriété | Règles conservées

Lorsque les dimensions le permettent, $(AB)C = A(BC)$, $A(B + C) = AB + AC$ et $(A + B)C = AC + BC$. Les scalaires peuvent se déplacer : $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Pour justifier l'associativité, calculons la case (i, j) dans les deux parenthésages. Dans $(AB)C$, elle vaut $\sum_{\ell} (\sum_k a_{ik} b_{k\ell}) c_{\ell j} = \sum_{\ell} \sum_k a_{ik} b_{k\ell} c_{\ell j}$. Dans $A(BC)$, elle vaut $\sum_k a_{ik} (\sum_{\ell} b_{k\ell} c_{\ell j}) = \sum_k \sum_{\ell} a_{ik} b_{k\ell} c_{\ell j}$. Ces sommes finies additionnent les mêmes produits, une fois chacun ; elles sont donc égales. Chaque case coïncide, donc les matrices sont égales. On a changé l'ordre d'addition de nombres réels, pas l'ordre des facteurs matriciels A, B, C .

La distributivité se vérifie de même case par case : $\sum_k a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) = \sum_k a_{ik} b_{kj} + \sum_k a_{ik} c_{kj}$. Le résultat est la somme des cases correspondantes de AB et AC .

⚠ Attention | Trois pièges fondamentaux

En général $AB \neq BA$. Des matrices non nulles peuvent avoir un produit nul. Enfin $AB = AC$ n'implique pas toujours $B = C$: il faut un inverse pour simplifier à gauche.

💡 Exemple | Contre-exemples explicites

Les matrices $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont non nulles, car chacune contient un coefficient 1. Pourtant,

$$EF = \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 0 \times 1 \\ 0 \times 0 + 0 \times 0 & 0 \times 0 + 0 \times 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Le produit nul n'impose donc pas un facteur nul.

Avec $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, le produit EG garde la première ligne de G et met la seconde à zéro, donc vaut G . Dans l'autre ordre, la première ligne donne $(0 \times 1 + 1 \times 0, 0 \times 0 + 1 \times 0) = (0, 0)$ et la seconde est déjà nulle : $GE = 0$. Ainsi $EG \neq GE$. Le format carré permet les deux produits, mais ne les rend pas égaux.

📖 Définition | Identité et puissances

La matrice I_n a des 1 sur sa diagonale et des 0 ailleurs. Pour A carrée d'ordre n , $I_n A = A I_n = A$. On définit $A^0 = I_n$ et $A^{k+1} = A^k A$. Pour $r, s \in \mathbb{N}$, $A^r A^s = A^{r+s}$.

Attention : $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$. Cela ne devient $A^2 + 2AB + B^2$ que si A et B commutent. Le binôme peut être utilisé pour deux matrices qui commutent, par exemple I et N .

À toi d'essayer : La distributivité conserve l'ordre

Développe $(A+B)^2$ pour deux matrices carrées de même ordre. Quelle hypothèse permet de regrouper les termes croisés ?

Pour démarrer. Écris $(A+B)(A+B)$ et distribue chaque facteur sans changer leur ordre.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 27](#) [Explication, p. 30](#)

3.4 Inverse d'une matrice d'ordre 2

📖 Définition | Inverse

Une matrice carrée A est inversible s'il existe B telle que $AB = BA = I$. Cette matrice B est unique et se note A^{-1} . Pour justifier l'unicité, supposons que B et C soient deux inverses. Alors $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$. Les passages utilisent successivement $AC = I$, l'associativité, puis $BA = I$: les deux candidats sont donc forcément égaux.

Si B et C sont toutes deux inverses, $B = B(AC) = (BA)C = C$, ce qui prouve l'unicité. On ne note pas un quotient de matrices A/B : AB^{-1} et $B^{-1}A$ peuvent différer.

★ Théorème | Formule d'ordre 2

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, pose $D = ad - bc$. A est inversible si et seulement si $D \neq 0$, et alors

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration | Vérification et cas singulier

Si $D \neq 0$, construire et vérifier. Posons $C = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Calculons les quatre cases dans chacun des deux ordres :

$$AC = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

$$CA = \begin{pmatrix} da - bc & db - bd \\ -ca + ac & -cb + ad \end{pmatrix} = DI_2.$$

Les nombres réels commutent, ce qui annule les termes hors diagonale. Diviser par D , supposé non nul, donne $A(C/D) = (C/D)A = I_2$. La matrice C/D est donc bien l'inverse par définition.

Si $D = 0$, montrer l'impossibilité. Nous allons trouver une colonne non nulle dont l'image est nulle. Si la première ligne (a, b) n'est pas nulle, prenons $X = (-b, a)^T$. Au moins une coordonnée est non nulle, et $AX = (-ab + ba, -bc + da)^T = (0, D)^T = 0$.

Si la première ligne est nulle mais la seconde (c, d) non nulle, prenons $X = (-d, c)^T$: sa première image est zéro, sa seconde $-cd + dc = 0$, et $X \neq 0$. Si les deux lignes sont nulles, $X = (1, 0)^T$ convient aussi.

Dans tous les cas, si un inverse existait, multiplier $AX = 0$ à gauche par A^{-1} donnerait $(A^{-1}A)X = A^{-1}0$, soit $X = 0$, contradiction. Donc aucune inverse n'existe lorsque $D = 0$. Les deux directions du critère sont établies.

Exemple | Inverse et contrôle

Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = 2 \times 1 - 1 \times 1 = 1 \neq 0$. La formule échange les deux coefficients diagonaux

et change le signe des deux autres : $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Vérifions AB : les quatre cases sont $2 - 1 = 1$, $-2 + 2 = 0$, $1 - 1 = 0$, $-1 + 2 = 1$. Donc $AB = I_2$.

Pour BA , elles sont $2 - 1 = 1$, $1 - 1 = 0$, $-2 + 2 = 0$, $-1 + 2 = 1$. Donc $BA = I_2$ aussi. Cela vérifie la définition d'un inverse dans les deux ordres.

✓ Propriété | Inverse d'un produit

Si A et B sont inversibles de même ordre, essayons $C = B^{-1}A^{-1}$. Dans $(AB)C = ABB^{-1}A^{-1}$, les facteurs voisins BB^{-1} valent I , donc le produit est $AIA^{-1} = AA^{-1} = I$. Dans l'autre ordre, $C(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$. Les deux produits valent l'identité : C est donc l'inverse de AB .

L'ordre inversé rapproche les facteurs qui s'annulent. En général, écrire $A^{-1}B^{-1}$ à leur place ne permettrait pas ces simplifications, car les matrices ne commutent pas. On utilise seulement l'associativité pour changer les parenthèses, sans déplacer les facteurs.

À toi d'essayer : Vérifier la perte d'information

Pourquoi $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ n'a-t-elle pas d'inverse ? Vérifie avec une colonne non nulle envoyée sur zéro.

Pour démarrer. Multiplie A par $X = (-2, 1)^T$ et examine la conséquence d'un inverse supposé.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 28](#) [Explication, p. 31](#)

3.5 Systèmes et inverse d'ordre 3

Le système $\sum_j a_{ij}x_j = b_i$ se note $AX = B$, où X est la colonne des inconnues et B celle des seconds membres. La ligne i du produit exprime exactement l'équation i du système.

Si A est inversible et $AX = B$, multiplier à gauche par A^{-1} donne $A^{-1}AX = A^{-1}B$, donc $IX = X = A^{-1}B$. Toute solution est ainsi obligatoirement cette colonne : il y en a au plus une. Vérifions qu'elle convient : $A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = IB = B$. Il y en a donc exactement une. Si A n'est pas inversible, cette multiplication est impossible ; l'étude directe du système doit distinguer absence de solution et plusieurs solutions.

✂ Méthode | Pivot de Gauss

Les opérations sur les lignes sont autorisées parce qu'elles sont réversibles. Échanger deux équations ne change pas les couples qui les satisfont. Multiplier une équation par un réel non nul est réversible en divisant par ce même réel. Ajouter à une équation q fois une autre est réversible en lui soustrayant q fois cette autre, que l'on conserve.

On applique chaque opération à tous les coefficients *et au second membre*. Par exemple, dans $x + y = 3$ et $2x + 3y = 8$, la seconde moins deux fois la première devient $(2x + 3y) - 2(x + y) = 8 - 2 \times 3$, donc $y = 2$. Modifier seulement les coefficients produirait un autre système.

Une ligne $0 = 5$ est impossible et rend tout le système incompatible. Une ligne $0 = 0$ n'ajoute aucune contrainte ; elle peut laisser une variable libre. On termine en remontant les équations et en remplaçant les valeurs trouvées dans le système initial.

💡 Exemple | Un inverse d'ordre 3 expliqué par un système

Le produit $AX = (u, v, w)^T$ s'écrit $x + y = u$, $y + z = v$, $z = w$. On remonte depuis la dernière équation : $z = w$, puis $y = v - z = v - w$, puis $x = u - y = u - (v - w) = u - v + w$.

Ces formules écrivent la colonne solution comme

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Vérifions sans laisser les produits implicites. Pour AB , la première ligne est la somme des deux premières lignes de B , donc $(1, 0, 0)$; la deuxième est la somme des deux dernières, donc $(0, 1, 0)$;

la troisième est $(0, 0, 1)$. Pour BA , les lignes sont respectivement $L_1(A) - L_2(A) + L_3(A) = (1, 0, 0)$, $L_2(A) - L_3(A) = (0, 1, 0)$ et $L_3(A) = (0, 0, 1)$. Les deux produits valent I_3 , donc $B = A^{-1}$.

Une méthode générale consiste à appliquer les mêmes opérations aux blocs $[A \mid I]$ jusqu'à obtenir $[I \mid B]$; B est alors l'inverse. Si le bloc gauche ne peut pas devenir I , A n'est pas inversible. Le cours n'exige pas de formule de déterminant d'ordre 3 pour utiliser cette méthode.

À toi d'essayer : Un système triangulaire

Résous $x + y = 4$, $y + z = 3$, $z = 1$.

Pour démarrer. Commence par la seule équation à une inconnue, puis reporte sa valeur dans la précédente.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 28 [Explication](#), p. 31

À toi d'essayer : Le second membre participe au pivot

Dans $x + y = 3$, $2x + 3y = 8$, remplace la deuxième ligne par la deuxième moins deux fois la première, puis conclus.

Pour démarrer. Soustrais deux fois chaque coefficient et deux fois le second membre de la première ligne.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 28 [Explication](#), p. 31

3.6 Transformations du plan et composition

📖 Définition | Application représentée par une matrice

Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ transforme la colonne $(x, y)^T$ en $(ax + by, cx + dy)^T$. Ses colonnes sont les images respectives des vecteurs $(1, 0)^T$ et $(0, 1)^T$.

✅ Propriété | Exemples

La rotation de centre O et d'angle θ a pour matrice

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

L'homothétie de rapport k a pour matrice kI_2 . La symétrie par rapport à l'axe des abscisses est $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; la projection sur cet axe est $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

 Démonstration / Reconnaître une rotation

La rotation d'angle θ autour de l'origine multiplie l'affixe par $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Développons le produit avec $x + iy$:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)(x + iy) = x \cos \theta + iy \cos \theta + ix \sin \theta - y \sin \theta.$$

Les parties réelle et imaginaire sont donc $x \cos \theta - y \sin \theta$ et $x \sin \theta + y \cos \theta$. Pour retrouver ces expressions par un produit ligne-colonne, la première ligne doit être $(\cos \theta, -\sin \theta)$ et la seconde $(\sin \theta, \cos \theta)$: c'est la matrice R_θ .

L'angle opposé donne $R_{-\theta} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$, avec $c = \cos \theta, s = \sin \theta$. Le produit par R_θ vaut

$\begin{pmatrix} c^2 + s^2 & -cs + sc \\ -sc + cs & s^2 + c^2 \end{pmatrix} = I_2$. L'autre ordre donne aussi l'identité. Les signes et la relation $c^2 + s^2 = 1$ vérifient explicitement que cette rotation inverse la première.

 Méthode | Respecter l'ordre

Appliquer d'abord A puis B donne $X \mapsto AX \mapsto B(AX) = (BA)X$. La transformation effectuée en premier apparaît donc à droite du produit. Écris une colonne intermédiaire si tu hésites.

Une translation non nulle ne peut pas s'écrire $X \mapsto AX$ dans le plan, car toute telle expression envoie 0 sur 0. On utilise $X \mapsto AX + C$ pour inclure une translation, ce qui préparera les suites affines de la fiche 8.

À toi d'essayer : Retrouver le produit par les étapes

On applique d'abord $S(x, y) = (x, -y)$ puis $R(x, y) = (-y, x)$. Quelle est la transformation finale et quel produit la représente ?

Pour démarrer. Applique la règle de R au couple déjà transformé par S .

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 28](#) [Explication, p. 31](#)

3.7 Programmer un produit et contrôler le sens

```
1 def produit(A, B):
2     m, n, p = len(A), len(A[0]), len(B[0])
3     if len(B) != n:
4         raise ValueError("dimensions incompatibles")
5     return [[sum(A[i][k]*B[k][j] for k in range(n))
6             for j in range(p)] for i in range(m)]
```

Ce code suppose des tableaux rectangulaires non vides. La boucle intérieure calcule exactement la somme ligne-colonne, les deux autres construisent les m lignes et p colonnes. Avec des nombres décimaux, un résultat proche de l'identité peut être dû aux arrondis ; pour une preuve, conserve les valeurs exactes.

4 Boîte à outils — le pivot expliqué ligne par ligne

4.1 Un système d'ordre 3 non triangulaire au départ

Exemple | Résoudre trois relations simultanées

Le système est $L_1 : x + y + z = 6$, $L_2 : 2x - y + z = 3$, $L_3 : x + 2y - z = 2$. Nous gardons L_1 et supprimons x des deux autres :

$$L_2 - 2L_1 : (2 - 2)x + (-1 - 2)y + (1 - 2)z = 3 - 12, \quad -3y - z = -9.$$

$$L_3 - L_1 : (1 - 1)x + (2 - 1)y + (-1 - 1)z = 2 - 6, \quad y - 2z = -4.$$

La seconde nouvelle relation contient y avec coefficient 1. En la multipliant par 3 et l'ajoutant à la première, $(-3y - z) + 3(y - 2z) = -9 + 3(-4)$ donne $-7z = -21$, donc $z = 3$.

Dans $y - 2z = -4$, on obtient $y - 6 = -4$, donc $y = 2$. Dans $x + y + z = 6$, $x + 2 + 3 = 6$, donc $x = 1$. Les opérations sont réversibles et chaque variable est déterminée : la solution est unique. Contrôlons les trois lignes initiales : $1 + 2 + 3 = 6$, $2 - 2 + 3 = 3$ et $1 + 4 - 3 = 2$.

4.2 Lire l'inverse dans la même élimination

Remplaçons maintenant le second membre par $(u, v, w)^T$. Les deux équations après élimination sont $-3y - z = v - 2u$ et $y - 2z = w - u$. La même combinaison donne $-7z = v + 3w - 5u$, donc $z = (5u - v - 3w)/7$. Puis $y = (3u - 2v + w)/7$ et $x = (-u + 3v + 2w)/7$. L'inverse de la matrice des coefficients est donc

$$\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Détaillons aussi les substitutions : $y = w - u + 2z = w - u + 2(5u - v - 3w)/7 = (3u - 2v + w)/7$. Puis $x = u - y - z = [7u - (3u - 2v + w) - (5u - v - 3w)]/7 = (-u + 3v + 2w)/7$.

Pour vérifier tous les coefficients, notons C le numérateur de l'inverse et A la matrice initiale. Les lignes de AC sont : $(-1 + 3 + 5, 3 - 2 - 1, 2 + 1 - 3) = (7, 0, 0)$; $(-2 - 3 + 5, 6 + 2 - 1, 4 - 1 - 3) = (0, 7, 0)$; $(-1 + 6 - 5, 3 - 4 + 1, 2 + 2 + 3) = (0, 0, 7)$. Donc $AC = 7I$.

Dans l'autre ordre, les lignes de CA sont $(-1 + 6 + 2, -1 - 3 + 4, -1 + 3 - 2) = (7, 0, 0)$; $(3 - 4 + 1, 3 + 2 + 2, 3 - 2 - 1) = (0, 7, 0)$; $(5 - 2 - 3, 5 + 1 - 6, 5 - 1 + 3) = (0, 0, 7)$. Donc $CA = 7I$ aussi. Diviser par 7 prouve les deux égalités d'inversion.

4.3 Savoir quand une transformation perd de l'information

La projection $E(x, y)^T = (x, 0)^T$ envoie tous les points ayant la même abscisse sur le même point. Elle ne peut donc pas être inversée : on ne sait plus quelle était l'ordonnée. Le vecteur $(0, 1)^T$ est non nul mais son image est nulle, ce qui donne la même conclusion algébriquement.

À l'inverse, une rotation permet de récupérer le point de départ en appliquant la rotation d'angle opposé. Cette lecture géométrique rejoint l'égalité $R_{-\theta}R_{\theta} = I$. Un inverse n'est donc pas seulement une formule : il exprime la possibilité de retrouver toutes les données de départ.

À toi d'essayer : Une étape de Gauss

Dans le système $x + 2y = 5$, $3x + 7y = 18$, élimine x de la seconde équation puis résous.

Pour démarrer. Calcule $L_2 - 3L_1$ en conservant le même ordre sur les deux membres.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 29](#) [Explication, p. 31](#)

À toi d'essayer : Dans quel ordre revenir ?

On applique d'abord une matrice inversible A puis une matrice inversible B . Quelles transformations permettent de revenir au départ ?

Pour démarrer. La dernière transformation doit être annulée en premier ; écris les multiplications à gauche.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 29](#) [Explication, p. 32](#)

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases, 6 à 10 relient les notions et 11 à 15 demandent davantage d'initiative. Cherche d'abord, puis utilise un indice si tu en as besoin.

Exercice 1 — Lire les indices

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, donne son format, a_{12} et a_{23} .

Exercice 2 — Addition et scalaire

Calcule $2A - B$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 — Un produit rectangulaire

Calcule $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 — Produit d'ordre 2

Calcule AB avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 — Inverse simple

Inverse $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 — Deux ordres différents

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, compare AB et BA .

Exercice 7 — Résoudre par l'inverse

Résous $3x + y = 7$, $2x + y = 5$ à l'aide de la matrice de l'exercice 5.

Exercice 8 — Système singulier

Étudie $x + 2y = 3$, $2x + 4y = k$ selon le réel k .

Exercice 9 — Inverse triangulaire

Inverse $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en résolvant $AX = (u, v, w)^T$.

Exercice 10 — Image d'un point

Donne la matrice de la rotation d'angle $\pi/2$ et l'image de $(2, -1)$.

Exercice 11 — Composition géométrique ★★ ★

Applique d'abord la symétrie S par rapport à l'axe horizontal, puis la rotation R d'angle $\pi/2$. Calcule la matrice et décris la transformation.

Exercice 12 — Produit nul ★★ ★

Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcule N^2 . N est-elle inversible ?

Exercice 13 — Carré d'une somme ★★ ★

Pour les matrices A, B de l'exercice 6, vérifie que $(A + B)^2$ diffère de $A^2 + 2AB + B^2$.

Exercice 14 — Modéliser des prix ★★ ★

Deux paniers coûtent 11 et 13 euros. Le premier contient 2 kg de pommes et 1 kg de poires ; le second 1 kg de pommes et 3 kg de poires. Détermine les prix au kg par un système matriciel.

Exercice 15 — Une famille de matrices ★★ ★

Pour $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$, détermine les valeurs de t donnant un inverse, puis résous $A_t X = (1, 1)^T$ pour toutes les valeurs de t .

6 Problème — Pour aller plus loin

Ce prolongement est accessible à partir du cours : les résultats supplémentaires sont guidés, et leur mémorisation n'est pas un préalable. Tu peux répartir la recherche sur plusieurs séances.

Retrouver une parabole à partir de trois points

On cherche un polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ passant par trois points d'abscisses distinctes. Durée indicative : 75 à 100 minutes.

Partie I — Trois mesures concrètes

1. Traduis $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ et $f(2) = 5$ par un système matriciel en (a, b, c) .
2. Résous-le et vérifie les trois valeurs.
3. Remplace les valeurs mesurées par u, v, w . Exprime a, b, c en fonction de u, v, w , puis déduis l'inverse de la matrice du système.

Partie II — Pourquoi l'unicité ?

1. Si deux polynômes de degré au plus 2 prennent les mêmes valeurs en trois abscisses distinctes, montre qu'ils sont égaux en utilisant la fiche 1.
2. Pour des abscisses distinctes r, s, t , construis un polynôme L_r de degré 2 valant 1 en r et 0 en s, t . Construis de même L_s, L_t .
3. Montre que $uL_r + vL_s + wL_t$ est l'unique solution de l'interpolation générale.

Partie III — Quand les données changent

1. Pour les abscisses 0,1,2, remplace w par $w + \varepsilon$. Calcule la variation du polynôme.
2. Que devient la valeur en $x=3$? Explique pourquoi une petite erreur de mesure peut être amplifiée hors de l'intervalle des mesures.
3. Que se passe-t-il si deux abscisses sont égales, avec des valeurs mesurées différentes ?

Pistes

Commence par la valeur en 0. Dans II, utilise $(x-s)(x-t)$ puis choisis un facteur de normalisation. Dans III, seule la composante associée à w change.

7 Indices des exercices

Exercice 1

Lis ligne puis colonne.

Le premier indice ne désigne pas la colonne.

Exercice 2

Multiplie chaque case de A par 2.

Soustrais les cases de même position.

Exercice 3

Multiplie chaque ligne par la colonne.

Le résultat a deux lignes.

Exercice 4

Écris les quatre sommes avant de simplifier.

La deuxième colonne de B contient -1 et 0.

Exercice 5

Calcule $ad-bc$.

Échange a et d, puis change les signes de b et c.

Exercice 6

Calcule chaque produit séparément.

Le format ne suffit pas à garantir l'égalité.

Exercice 7

Utilise $X=A^{-1}B$.

Conserve le second membre en colonne.

Exercice 8

Soustrais deux fois la première ligne.

Distingue une contradiction d'une ligne identiquement nulle.

Exercice 9

Remonte les équations depuis la dernière.

Lis les coefficients de u,v,w dans chaque solution.

Exercice 10

Utilise $\cos(\pi/2)=0$ et $\sin(\pi/2)=1$.

Vérifie la conservation de la distance.

Exercice 11

La première transformation se place à droite.

Observe l'image des coordonnées.

Exercice 12

Effectue le produit ligne-colonne.

Un inverse permettrait une simplification impossible.

Exercice 13

Développe sans échanger l'ordre des facteurs.

L'écart est $AB-BA$.

Exercice 14

Définis les inconnues avec leurs unités.

Les lignes représentent les paniers.

Exercice 15

Calcule le déterminant et isole ses zéros.

Étudie directement le système aux valeurs exclues.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

La matrice a deux lignes horizontales, $(1, -2, 3)$ et $(4, 5, 0)$, et trois colonnes : son format est 2×3 . Dans a_{12} , l'indice 1 choisit la première ligne puis l'indice 2 sa deuxième case, donc $a_{12} = -2$. Dans a_{23} , on prend la deuxième ligne et sa troisième case, donc $a_{23} = 0$. Il n'existe pas de troisième ligne : une notation comme a_{31} ne désignerait aucune case de cette matrice. Les indices commencent ici à 1, contrairement aux listes Python qui commencent à 0.

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Les deux matrices ont format 2×2 , donc on peut soustraire les cases correspondantes. Multiplier A par le scalaire 2 signifie multiplier chacune de ses quatre cases : $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

La soustraction donne les cases $2 - 0 = 2$, $4 - 4 = 0$, $-2 - 2 = -4$, $6 - 1 = 5$. Donc $2A - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$. Cette opération est terme à terme ; elle ne fait pas intervenir le produit ligne-colonne, réservé au produit de deux matrices.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

La première matrice est 2×3 et la seconde 3×1 : les dimensions intérieures 3 coïncident, donc le produit est défini et a format 2×1 .

La première case utilise la ligne $(1, 2, -1)$ et la colonne $(2, 1, 4)^T$: $1 \times 2 + 2 \times 1 + (-1) \times 4 = 2 + 2 - 4 = 0$. La seconde utilise la ligne $(0, 3, 2)$: $0 \times 2 + 3 \times 1 + 2 \times 4 = 0 + 3 + 8 = 11$. Le résultat est donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix}$. Le zéro de la première ligne vient d'une compensation, pas d'une ligne initialement nulle.

Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

Les deux matrices sont carrées d'ordre 2. La case $(1, 1)$ est $2 \times 1 + 1 \times 2 = 4$. La case $(1, 2)$ est $2 \times (-1) + 1 \times 0 = -2$. La case $(2, 1)$ est $0 \times 1 + 3 \times 2 = 6$. La case $(2, 2)$ est $0 \times (-1) + 3 \times 0 = 0$.

Donc $AB = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$. Pour chacune, nous avons gardé la ligne de A et la colonne de B . Le produit BA demanderait un nouveau calcul et ne peut pas être obtenu en permutant simplement les cases.

Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

Les coefficients sont $a = 3, b = 1, c = 2, d = 1$, donc $D = ad - bc = 3 - 2 = 1 \neq 0$. L'inverse est $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Contrôlons AB case par case : $3 - 2 = 1, -3 + 3 = 0, 2 - 2 = 0, -2 + 3 = 1$. Pour BA : $3 - 2 = 1, 1 - 1 = 0, -6 + 6 = 0, -2 + 3 = 1$. Les deux produits valent I_2 , donc la matrice proposée satisfait bien la définition de l'inverse.

Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

Pour AB , les cases sont $1 \times 1 + 1 \times 1 = 2, 1 \times 0 + 1 \times 1 = 1, 0 \times 1 + 1 \times 1 = 1, 0 \times 0 + 1 \times 1 = 1$.

Donc $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour BA , les cases sont $1 \times 1 + 0 \times 0 = 1, 1 \times 1 + 0 \times 1 = 1, 1 \times 1 + 1 \times 0 = 1, 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$.

Donc $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Les cases diagonales diffèrent : $AB \neq BA$. Avoir le même format ne suffit pas à rendre des matrices égales.

Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

La colonne des inconnues est $X = (x, y)^T$ et celle des seconds membres $C = (7, 5)^T$. Les deux lignes des coefficients donnent $AX = C$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Comme l'exercice 5 a prouvé son inversibilité, multiplier à gauche par A^{-1} donne $X = A^{-1}C$.

Le calcul est $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - 5 \\ -14 + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Contrôle : $3 \times 2 + 1 = 7$ et $2 \times 2 + 1 = 5$. L'inverse prouve également l'unicité.

Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

Gardons la première équation et soustrayons-en deux fois les deux membres à la seconde : $(2x + 4y) - 2(x + 2y) = k - 2 \times 3$. Le membre gauche est zéro, donc la nouvelle condition est $0 = k - 6$. Si $k \neq 6$, cette égalité est impossible : aucune solution. Si $k = 6$, elle devient $0 = 0$ et n'ajoute aucune contrainte. Il reste $x + 2y = 3$. Choisissons librement $y = t \in \mathbb{R}$, puis $x = 3 - 2t$. Tous les couples $(3 - 2t, t)$ satisfont les deux équations, car la seconde est exactement le double de la première. Une matrice non inversible peut donc donner zéro ou une infinité de solutions selon le second membre.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Le système $AX = (u, v, w)^T$ s'écrit $x + 2y = u$, $y + 3z = v$, $z = w$. La dernière donne $z = w$. La deuxième donne $y = v - 3w$. Dans la première, $x = u - 2(v - 3w) = u - 2v + 6w$.

Les coefficients de u, v, w dans ces trois expressions sont les lignes de $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour contrôler AB , ses lignes sont $L_1(B) + 2L_2(B) = (1, 0, 0)$, $L_2(B) + 3L_3(B) = (0, 1, 0)$, puis $L_3(B) = (0, 0, 1)$. Pour BA , elles sont $L_1(A) - 2L_2(A) + 6L_3(A) = (1, 0, 0)$, $L_2(A) - 3L_3(A) = (0, 1, 0)$, puis $(0, 0, 1)$. Ainsi les deux produits sont l'identité et $B = A^{-1}$.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Dans la formule de rotation, $\cos(\pi/2) = 0$ et $\sin(\pi/2) = 1$. Donc $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Multiplions par la colonne du point : la première coordonnée est $0 \times 2 + (-1)(-1) = 1$; la seconde $1 \times 2 + 0 \times (-1) = 2$. L'image est $(1, 2)$.

La norme initiale vaut $\sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$, la finale $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. La distance est conservée, comme une rotation doit le faire. La règle générale est $(x, y) \mapsto (-y, x)$ pour ce quart de tour direct.

Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

La symétrie horizontale envoie (x, y) sur $(x, -y)$. La rotation agit ensuite sur ce point : $R(x, -y) = (-(-y), x) = (y, x)$. La matrice est donc RS , puisque S agit en premier.

Le produit $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ confirme l'échange des coordonnées. Les points de la droite $y = x$ restent fixes et les deux coordonnées sont échangées : c'est la symétrie par rapport à cette droite. Dans l'autre ordre, $S(R(x, y)) = S(-y, x) = (-y, -x)$, donc SR décrit une autre symétrie, par rapport à $y = -x$.

Corrigé 12

 *Démonstration / Solution expliquée*

Calculons les quatre cases de N^2 : $0 \times 0 + 1 \times 0 = 0$, $0 \times 1 + 1 \times 0 = 0$, et les deux cases de la seconde ligne sont nulles car cette ligne est nulle. Donc $N^2 = 0$, tandis que $N \neq 0$ à cause de sa case $(1, 2)$ égale à 1.

Si N^{-1} existait, multiplier $N^2 = 0$ à gauche donnerait $N^{-1}NN = N^{-1}0$, donc $IN = 0$, soit $N = 0$, contradiction. L'inverse n'existe pas. Le calcul $ad - bc = 0 \times 0 - 1 \times 0 = 0$ confirme le critère d'ordre 2.

Corrigé 13

 Démonstration / Solution expliquée

On a $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, dont le carré a cases $4 + 1 = 5$, $2 + 2 = 4$, $2 + 2 = 4$, $1 + 4 = 5$. Donc $(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Les produits donnent $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. En additionnant case par case, $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$: ce n'est pas le même résultat. La distributivité donne en réalité $A^2 + AB + BA + B^2$. Remplacer BA par AB était illégitime puisque ces matrices ne commutent pas.

Corrigé 14

 Démonstration / Solution expliquée

Notons x le prix d'un kg de pommes et y celui d'un kg de poires, en euros/kg. Les totaux donnent $2x + y = 11$ et $x + 3y = 13$, soit $AX = C$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = (11, 13)^T$.

Le déterminant vaut $2 \times 3 - 1 \times 1 = 5 \neq 0$, donc $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Ainsi $x = (3 \times 11 - 13)/5 = 20/5 = 4$ et $y = (-11 + 2 \times 13)/5 = 15/5 = 3$. Les prix sont 4 et 3 euros/kg. Vérification des paniers : $2 \times 4 + 3 = 11$ et $4 + 3 \times 3 = 13$ euros.

Corrigé 15

 Démonstration / Solution expliquée

Le déterminant est $t^2 - 1 = (t - 1)(t + 1)$, non nul exactement si $t \neq 1, -1$. Dans ce cas $A_t^{-1} = \frac{1}{t^2 - 1} \begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$. Le produit par $(1, 1)^T$ donne deux coordonnées égales à $(t - 1)/(t^2 - 1) = 1/(t + 1)$, la simplification étant autorisée puisque $t \neq 1$.

Pour $t = 1$, on reprend le système initial : les deux équations sont $x + y = 1$, donc les solutions sont $(s, 1 - s)$, $s \in \mathbb{R}$. Pour $t = -1$, elles sont $-x + y = 1$ et $x - y = 1$; les additionner donne $0 = 2$, impossible. La formule simplifiée ne permettait pas de traiter $t = 1$, exclu lors de l'inversion. Ces deux cas doivent donc être étudiés séparément.

9 Corrigé du problème

Partie I — Des valeurs à un système

1. En remplaçant x par 0,1,2 dans $ax^2 + bx + c$, on obtient $c = 1$, $a + b + c = 2$, $4a + 2b + c = 5$. Avec l'ordre d'inconnues (a, b, c) , cela s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Chaque ligne correspond à une abscisse, et chaque colonne au coefficient de la même inconnue.

2. La première équation donne $c = 1$. Les deux suivantes deviennent $a + b = 1$ et $4a + 2b = 4$. Soustraire deux fois la première à la seconde donne $2a = 2$, donc $a = 1$; alors $b = 1 - a = 0$. Ainsi $f(x) = x^2 + 1$. Vérifications : $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 5$.

3. Avec u, v, w , la même démarche donne $c = u$, $a + b = v - u$ et $4a + 2b = w - u$. En soustrayant deux fois l'avant-dernière de la dernière, $2a = w - u - 2(v - u) = w - 2v + u$. Donc $a = (u - 2v + w)/2$. Ensuite $b = v - u - a = (4v - 3u - w)/2$. Les coefficients de u, v, w donnent

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ -3/2 & 2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Contrôlons les deux ordres. Les lignes de AB sont $L_3(B) = (1, 0, 0)$, $L_1(B) + L_2(B) + L_3(B) = (0, 1, 0)$, et $4L_1(B) + 2L_2(B) + L_3(B) = (0, 0, 1)$. Les lignes de BA sont $L_1(A)/2 - L_2(A) + L_3(A)/2 = (1, 0, 0)$, $-3L_1(A)/2 + 2L_2(A) - L_3(A)/2 = (0, 1, 0)$, et $L_1(A) = (0, 0, 1)$. Donc $AB = BA = I_3$ et $B = A^{-1}$.

Partie II — Existence et unicité séparées

1. Si f, g prennent les mêmes valeurs aux trois abscisses distinctes r, s, t , leur différence $h = f - g$ s'annule en chacun de ces trois nombres. Son degré est au plus 2. Un polynôme non nul de degré au plus 2 ne peut avoir trois racines distinctes, d'après la fiche 1. Donc h est le polynôme nul : $f = g$. Cela prouve l'unicité si une solution existe.

2. Pour s'annuler en s et t , prenons $(x - s)(x - t)$. En $x = r$, il vaut $(r - s)(r - t)$, non nul puisque les abscisses sont distinctes. Diviser par cette valeur donne

$$L_r(x) = \frac{(x - s)(x - t)}{(r - s)(r - t)}.$$

Alors $L_r(r) = 1$, tandis que $L_r(s) = L_r(t) = 0$. De même,

$$L_s(x) = \frac{(x - r)(x - t)}{(s - r)(s - t)}, \quad L_t(x) = \frac{(x - r)(x - s)}{(t - r)(t - s)}.$$

Chaque dénominateur est une constante non nulle; ces expressions sont bien des polynômes de degré 2.

3. Posons $f = uL_r + vL_s + wL_t$. En r , les valeurs des trois polynômes sont 1, 0, 0, donc $f(r) = u$. En s , elles sont 0, 1, 0, donc $f(s) = v$. En t , elles sont 0, 0, 1, donc $f(t) = w$. Nous avons construit une solution; la question 1 prouve que c'est la seule. Des termes peuvent se compenser : le degré final peut être 1 ou 0, donc les données ne garantissent pas une parabole non dégénérée.

Partie III — Suivre l'effet d'une erreur

1. Si seule la valeur w devient $w + \varepsilon$, le nouveau polynôme est $g = uL_0 + vL_1 + (w + \varepsilon)L_2$. En soustrayant f , les deux premiers termes s'annulent et $g - f = \varepsilon L_2$. Pour les abscisses 0,1,2, $L_2(x) = x(x - 1)/[(2 - 0)(2 - 1)] = x(x - 1)/2$. La variation vaut donc $\varepsilon x(x - 1)/2$.

2. En $x = 0$ et $x = 1$, la variation est zéro, comme attendu puisque ces mesures n'ont pas changé. En $x = 2$, elle vaut ε . En $x = 3$, elle vaut $\varepsilon \times 3 \times 2/2 = 3\varepsilon$. Cette erreur particulière est donc multipliée par 3 hors de l'intervalle des mesures : interpoler exactement les mesures n'assure pas une faible sensibilité lors d'une extrapolation.

3. Si une même abscisse r doit avoir deux valeurs distinctes $u \neq v$, les contraintes demandent simultanément $f(r) = u$ et $f(r) = v$. Cela imposerait $u = v$, contradiction. Aucune fonction ne peut les satisfaire, donc aucun polynôme non plus ; le système est incompatible.

10 Faire le point par une variante autonome

Essaie cette variante sans relire le corrigé précédent. Explique le choix de ta méthode, puis utilise les contrôles pour décider quelle notion retravailler.

À toi d'essayer : Un système et son contrôle

Résous $2x + y = 8$, $x + y = 5$ par une matrice inverse, puis vérifie les deux équations.

Pour démarrer. Écris la matrice des coefficients, vérifie son déterminant puis calcule deux sommes ligne-colonne.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 29](#) [Explication, p. 32](#)

11 Fiche-mémoire

- $(m \times n)(n \times p)$ donne $m \times p$; une case d'un produit est une somme ligne-colonne.
- Le produit est associatif et distributif, mais généralement non commutatif.
- Inverse d'ordre 2 : $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ si $ad - bc \neq 0$.
- Système : $AX = B$; si A inversible, $X = A^{-1}B$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; appliquer A puis B correspond à BA.
- Une projection peut perdre de l'information et ne pas être inversible; une rotation conserve les distances.

Contrôle. Mes dimensions coïncident-elles? Ai-je préservé l'ordre? Ai-je vérifié l'inverse par un produit? Mon résultat répond-il au problème avec les bonnes unités?

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Lire une case avec son rôle

Indice 1 — Une piste.

Le premier indice désigne la ligne.

Indice 2 — Un pas de plus.

Il faut un prix pour chacun des trois produits.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Le produit existe-t-il ?

Indice 1 — Une piste.

Les dimensions intérieures doivent coïncider.

Indice 2 — Un pas de plus.

Pour BA , compare le nombre de colonnes de B au nombre de lignes de A .

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Contrôler une case indépendamment

Indice 1 — Une piste.

Sélectionne la deuxième ligne de A et la première colonne de B .

Indice 2 — Un pas de plus.

Les deux produits sont deux fois quatre et trois fois moins deux.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

La distributivité conserve l'ordre

Indice 1 — Une piste.

Écris le produit de deux sommes.

Indice 2 — Un pas de plus.

AB et BA sont deux termes différents en général.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Vérifier la perte d'information

Indice 1 — Une piste.

Le second rang de coefficients est le double du premier.

Indice 2 — Un pas de plus.

Essaie $X = (-2, 1)^T$.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Un système triangulaire

Indice 1 — Une piste.

Commence par la dernière ligne.

Indice 2 — Un pas de plus.

Remonte vers y, puis vers x.

[Revenir à la recherche, p. 10](#)

Le second membre participe au pivot

Indice 1 — Une piste.

La même opération doit toucher les deux membres.

Indice 2 — Un pas de plus.

Le nouveau second membre vaut $8 - 2 \times 3$.

[Revenir à la recherche, p. 10](#)

Retrouver le produit par les étapes

Indice 1 — Une piste.

Écris l'image intermédiaire.

Indice 2 — Un pas de plus.

R reçoit la colonne déjà transformée par S.

[Revenir à la recherche, p. 12](#)

Une étape de Gauss

Indice 1 — Une piste.

Remplace la seconde ligne par elle-même moins trois fois la première.

Indice 2 — Un pas de plus.

Le coefficient de y devient $7-6$.

[Revenir à la recherche, p. 13](#)

Dans quel ordre revenir ?

Indice 1 — Une piste.

Il faut d'abord annuler la dernière opération effectuée.

Indice 2 — Un pas de plus.

Après $Y = BAX$, commence par multiplier à gauche par B^{-1} .

[Revenir à la recherche, p. 13](#)

Un système et son contrôle

Indice 1 — Une piste.

La matrice est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Indice 2 — Un pas de plus.

Son déterminant vaut 1.

[Revenir à la recherche, p. 25](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Lire une case avec son rôle

a_{23} se lit ligne 2, colonne 3 : il concerne le deuxième magasin et le troisième produit. Il y a trois produits, donc la colonne des prix a trois lignes et une colonne. Le produit $(4 \times 3)(3 \times 1)$ est défini et donne une colonne de quatre coûts. Pour le magasin 2, on calcule $a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3$: chaque quantité est multipliée par le prix de la même colonne, puis les trois coûts sont additionnés. L'ordre des prix doit donc correspondre à celui des produits.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Le produit existe-t-il ?

Pour AB , les formats sont $(2 \times 3)(3 \times 1)$. La ligne de A contient trois coefficients et la colonne de B aussi : leur produit-somme est possible. Les dimensions extérieures donnent deux lignes et une colonne, donc 2×1 . Pour BA , on aurait $(3 \times 1)(2 \times 3)$; une ligne de B contient un coefficient tandis qu'une colonne de A en contient deux. Ils ne peuvent pas être appariés, donc BA n'est pas défini. L'existence du premier produit n'assure pas celle du second.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Contrôler une case indépendamment

La ligne 2 de A est $(2, 3)$ et la colonne 1 de B est $(4, -2)^T$. On associe les positions : $2 \times 4 = 8$ et $3 \times (-2) = -6$. Leur somme vaut $8 - 6 = 2$, donc $(AB)_{21} = 2$. Les indices $(2, 1)$ désignent la case finale ; l'indice intermédiaire parcourt les deux produits additionnés. La deuxième colonne de B n'intervient pas dans cette case : inutile de calculer tout le produit pour la vérifier.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

La distributivité conserve l'ordre

Le carré est $(A + B)(A + B) = A(A + B) + B(A + B)$. Distribuer encore donne $A^2 + AB + BA + B^2$. Les deux termes croisés ont un ordre différent : AB et BA . Si l'on sait en plus qu'ils sont égaux, on peut les regrouper en $2AB$. Sinon, cette simplification n'est pas autorisée. L'associativité permet seulement de déplacer des parenthèses dans un produit de trois matrices ; elle ne dit pas que deux facteurs peuvent être échangés.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Vérifier la perte d'information

Le produit a pour première coordonnée $1(-2) + 2(1) = 0$ et seconde $2(-2) + 4(1) = 0$. Donc $AX = 0$, alors que $X \neq 0$ puisque sa seconde coordonnée est 1. Supposons un inverse : multiplier par A^{-1} donnerait $X = (A^{-1}A)X = A^{-1}0 = 0$, contradiction. Ainsi A n'est pas inversible. Le déterminant $1 \times 4 - 2 \times 2 = 0$ confirme le même résultat. Le vecteur non nul explique la perte d'information : deux entrées distinctes, X et 0 , donnent la même image.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Un système triangulaire

La dernière ligne donne directement $z = 1$. Dans $y + z = 3$, remplaçons : $y + 1 = 3$, donc $y = 2$. Puis $x + y = 4$ devient $x + 2 = 4$, donc $x = 2$. La solution candidate est $(2, 2, 1)$. Contrôle simultané : $2 + 2 = 4$, $2 + 1 = 3$, et la dernière coordonnée vaut 1. Chaque étape a imposé une valeur unique, donc il n'y a pas d'autre solution. Avec des seconds membres généraux, la même remontée donne $z = w, y = v - w, x = u - v + w$.

[Revenir à la recherche, p. 10](#)

Le second membre participe au pivot

La nouvelle seconde équation est $(2x + 3y) - 2(x + y) = 8 - 2 \times 3$. En développant, $2x + 3y - 2x - 2y = 2$, donc $y = 2$. La première équation, conservée, donne $x + 2 = 3$, donc $x = 1$. Vérification dans le système original : $1 + 2 = 3$ et $2 \times 1 + 3 \times 2 = 8$. L'opération inverse consisterait à rajouter deux fois la première ligne : elle est réversible et conserve les solutions. Oublier de transformer le second membre 8 aurait changé le problème.

[Revenir à la recherche, p. 10](#)

Retrouver le produit par les étapes

Après S , le couple est $(x, -y)$. La règle $R(u, v) = (-v, u)$ donne alors $R(x, -y) = (-(-y), x) = (y, x)$. Les coordonnées sont échangées : c'est la symétrie par rapport à la droite $y = x$. En colonnes, la première étape donne SX , la seconde $R(SX) = (RS)X$. La matrice totale est donc RS , avec l'opération initiale à droite. Les points de la droite $y = x$ restent fixes, ce qui contrôle l'interprétation géométrique.

[Revenir à la recherche, p. 12](#)

Une étape de Gauss

La nouvelle seconde ligne est $(3x + 7y) - 3(x + 2y) = 18 - 3 \times 5$. Elle devient $3x + 7y - 3x - 6y = 3$, donc $y = 3$. La première ligne donne $x + 2 \times 3 = 5$, donc $x = -1$. Le contrôle initial donne $-1 + 6 = 5$ et $3(-1) + 7 \times 3 = -3 + 21 = 18$. Comme la première ligne a été conservée, ajouter trois fois cette ligne à la nouvelle seconde permet de retrouver l'ancienne : la transformation du système est réversible.

[Revenir à la recherche, p. 13](#)

Dans quel ordre revenir ?

Après les deux transformations, $Y = BAX$. Pour annuler B , multiplions à gauche par B^{-1} : $B^{-1}Y = (B^{-1}B)AX = AX$. Puis multiplions par A^{-1} : $A^{-1}B^{-1}Y = (A^{-1}A)X = X$. Le produit inverse est donc $A^{-1}B^{-1}$. Contrôle dans les deux ordres : $(A^{-1}B^{-1})(BA) = A^{-1}IA = I$ et $(BA)(A^{-1}B^{-1}) = BIB^{-1} = I$. Il faut inverser à la fois chaque opération et leur ordre.

[Revenir à la recherche, p. 13](#)

Un système et son contrôle

Le système est $AX = C$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = (x, y)^T$, $C = (8, 5)^T$. Le déterminant vaut $2 \times 1 - 1 \times 1 = 1$,

donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Le produit donne $x = 1 \times 8 - 1 \times 5 = 3$ et $y = -1 \times 8 + 2 \times 5 = 2$. Vérification : $2 \times 3 + 2 = 8$ et $3 + 2 = 5$. Le format $(2 \times 2)(2 \times 1)$ confirme que la solution est une colonne de deux coordonnées.

[Revenir à la recherche, p. 25](#)