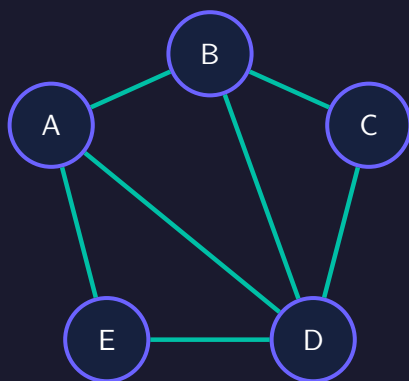


Graphes, puissances et suites matricielles

Réseaux ■ Chemins ■ Évolutions couplées



Des chemins aux puissances

Terminale — Option Mathématiques expertes — Programme officiel

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	🔍 Pourquoi ce chapitre ?	3
1.1	Le problème fondamental : compter les parcours d'un réseau	3
2	🧠 L'idée avant la formule	3
2.1	Un sommet intermédiaire organise tous les cas	3
2.2	Ce qu'on compte doit être annoncé	3
2.3	Déplacer l'origine simplifie une évolution affine	4
3	🎓 Le cours formel	4
3.1	Graphes : objets et vocabulaire	4
3.2	Chaînes, connexité et orientation	5
3.3	Matrice d'adjacence	6
3.4	Compter les chemins par des puissances	7
3.5	Calculer des puissances sans multiplier n fois	8
3.5.1	Matrices diagonales et nilpotentes	8
3.5.2	Une factorisation vérifiée	9
3.6	Suites de colonnes : cas homogène et affine	9
3.7	Parcours eulériens : un prolongement	12
4	🧰 Boîte à outils — relier réseau et évolution	12
4.1	Retrouver une matrice de transition de comptage	12
4.2	Une récurrence affine couplée complète	13
4.3	Sommer des puissances avec le bon ordre	13
5	✎ Exercices progressifs	15
6	🔗 Problème — Pour aller plus loin	17
7	Indices des exercices	18
8	✔ Corrigés détaillés	20
9	Corrigé du problème	24
10	Faire le point par une variante autonome	25
11	Fiche-mémoire	26
12	Indices des pauses et des preuves	27
13	Explications des pauses et des preuves	30

1 ? Pourquoi ce chapitre ?

1.1 Le problème fondamental : compter les parcours d'un réseau

Un plan de transport montre les liaisons disponibles. Tu voudrais compter les parcours qui relient deux stations en exactement cinq étapes, en autorisant les retours. Une énumération à la main devient vite longue. Les matrices vont organiser les possibilités d'une étape, puis composer ces choix.

Intuition | Le même geste explique les suites matricielles

À chaque étape, on applique la même règle. Dans un réseau, elle compte les déplacements ; dans une évolution couplée, elle transforme plusieurs quantités à la fois. La répétition de cette règle explique l'apparition de A^n .

Prérequis. Produit matriciel, puissances, inverse, suites géométriques et démonstration par récurrence. Les termes propres aux graphes sont définis avant utilisation.

Méthode | Objectifs

Modéliser par un graphe ; construire sa matrice d'adjacence ; compter des chemins ; calculer des puissances d'ordre 2 ou 3 ; résoudre une récurrence matricielle homogène ou affine.

Le socle comprend graphes, matrices, dénombrement de chemins et suites matricielles. Les parcours eulériens et le problème sur Fibonacci sont des prolongements guidés. Une réduction $A = PDP^{-1}$ sera vérifiée directement, sans supposer un cours de diagonalisation.

Méthode | Comment travailler cette fiche

Commence par l'idée avant la formule, puis travaille une notion à la fois. Dans le cours, reformule la définition avec tes mots et refais l'exemple sans regarder la dernière ligne. Les pauses te proposent une question, deux indices graduels et une explication ; tu peux chercher avec une aide sans renoncer au raisonnement.

Après le cours, la boîte à outils relie plusieurs notions dans des méthodes commentées. Les exercices passent des bases aux questions d'initiative. Si tu bloques, prends d'abord un indice ; après le corrigé, explique pourquoi la méthode convient et refais une variante. Le problème final construit un approfondissement à partir du cours, puis une dernière activité te permet de faire le point.

2 ? L'idée avant la formule

2.1 Un sommet intermédiaire organise tous les cas

Pour aller de A à C en deux étapes, choisis d'abord le sommet intermédiaire B. Le nombre de possibilités via B est « nombre de liaisons de A à B » multiplié par « nombre de liaisons de B à C ». Additionne ensuite sur tous les intermédiaires. Tu reconnais le produit ligne-colonne.

2.2 Ce qu'on compte doit être annoncé

Deux étapes signifient deux arêtes parcourues, même si tu reviens à ton point de départ. Les puissances compteront ici des parcours avec répétitions possibles, pas nécessairement des chemins sans retour ni des trajets les plus courts. La convention sera précisée avant chaque utilisation.

2.3 Déplacer l'origine simplifie une évolution affine

Une suite réelle $u_{n+1} = au_n + b$ se simplifie en soustrayant une valeur fixe. L'idée reste vraie pour une colonne : si $L = AL + C$, alors $U_{n+1} - L = A(U_n - L)$. La quantité mesurée par rapport à L suit une récurrence homogène. Le chapitre construira cette formule et les puissances dont elle dépend.

✂ Méthode | Relier les trois langages

Passe du texte au graphe, du graphe à la matrice, puis du calcul à une phrase sur le réseau. Pour une suite, précise plutôt la signification des coordonnées et le rang initial. La réponse finale doit garder les unités, l'ordre des états et le nombre d'étapes.

3 Le cours formel

3.1 Graphes : objets et vocabulaire

Définition | Graphe non orienté simple

Un graphe comporte un ensemble fini de sommets et des arêtes reliant des paires de sommets. Dans un graphe simple, aucune arête ne relie un sommet à lui-même, et deux sommets sont reliés par au plus une arête. Son ordre est le nombre de sommets. Deux sommets sont adjacents lorsqu'une arête les relie.

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes. Le graphe complet K_n relie chaque paire de sommets distincts ; chaque degré vaut $n-1$, et son nombre d'arêtes vaut $n(n-1)/2$.

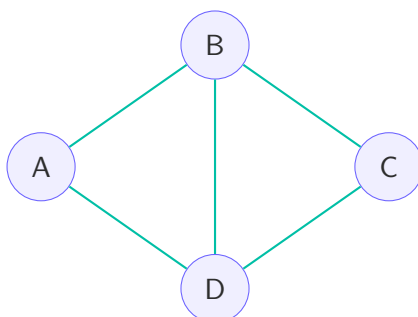
★ Théorème | Somme des degrés

Dans un graphe non orienté simple, la somme des degrés vaut deux fois le nombre d'arêtes. Le nombre de sommets de degré impair est donc pair.

Démonstration | Compter deux fois

Choisissons une arête reliant A à B . Elle ajoute 1 au degré de A , et 1 au degré de B : sa contribution totale est 2. Chaque arête possède exactement deux extrémités dans un graphe simple non orienté. Additionner tous les degrés compte donc chaque arête deux fois, d'où $\sum \deg(S) = 2 \times \text{nombre d'arêtes}$.

Pour la conséquence sur la parité, écrivons chaque degré pair sous la forme $2k$, et chaque degré impair sous la forme $2\ell + 1$. Si r sommets ont un degré impair, leur somme totale s'écrit $2K + r$ pour un entier K . Le premier résultat dit que cette somme est paire. Donc r est pair. Le raisonnement ne dit pas que tous les degrés sont pairs : il dit que les degrés impairs viennent en nombre pair.



Une transition répétée devient une puissance.

Le graphe représenté a quatre sommets et cinq arêtes. Les degrés, dans l'ordre A,B,C,D, valent 2,3,2,3 ; leur somme 10 correspond bien à deux fois cinq arêtes.

À toi d'essayer : Compter les extrémités sans dessiner tout le graphe

Un graphe simple a pour degrés 3,3,2,2. Combien possède-t-il d'arêtes ? Les degrés 3,2,2,2 seraient-ils possibles ?

Pour démarrer. Additionne les degrés avant de diviser par le nombre d'extrémités d'une arête.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 27 Explication, p. 30

3.2 Chaînes, connexité et orientation

Définition | Chaîne et longueur

Une chaîne est une suite de sommets consécutivement adjacents. Sa longueur est le nombre d'arêtes parcourues, donc le nombre de transitions. Un graphe est connexe si deux sommets quelconques peuvent être reliés par une chaîne.

Dans un graphe orienté, les liens sont des arcs portant un sens. Un chemin respecte ce sens. Un graphe peut aussi être pondéré : chaque lien porte un nombre (distance, coût ou probabilité selon le modèle).

Attention | Convention de comptage

Dans cette fiche, les parcours comptés par les puissances d'adjacence peuvent repasser par un sommet et réutiliser une arête : ce sont des marches, souvent appelées chaînes ou chemins dans les exercices du programme. Une contrainte « sans répétition » doit être traitée séparément ; les puissances ne l'imposent pas.

Un parcours de longueur 0 reste sur son sommet initial. Dans un graphe simple, il n'y a pas de boucle ; une marche de longueur 2 peut pourtant revenir au départ en parcourant la même arête dans les deux sens.

Exemple | Lire un parcours

La liste A, B, D, C contient quatre sommets, mais trois transitions : $A \rightarrow B$, $B \rightarrow D$, $D \rightarrow C$. Les trois arêtes sont présentes sur le dessin, donc la chaîne a longueur 3. La longueur compte les arêtes parcourues, pas les sommets écrits.

La liste A, B, A, B utilise successivement la même arête dans les deux sens, puis encore une fois ; elle est aussi de longueur 3 selon notre convention qui autorise les répétitions. En revanche, A, C demanderait une arête directe AC , absente du graphe : ce n'est pas une chaîne de longueur 1. Cela n'interdit pas de relier A à C par un intermédiaire.

À toi d'essayer : Une flèche change l'accessibilité

Un graphe orienté possède seulement les arcs A vers B et B vers C . Peut-on aller de A à C ? Et de C à A ?

Pour démarrer. Écris les déplacements autorisés dans le sens des flèches, puis examine ceux qui partent de C .

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 27](#) [Explication, p. 30](#)

3.3 Matrice d'adjacence**📖 Définition | Coder le graphe**

Fixe un ordre des sommets $S_1, \dots, S_n$. La matrice d'adjacence M a pour coefficient $m_{ij} = 1$ si l'on peut aller en une étape de S_i vers S_j , et 0 sinon. Pour un graphe non orienté, M est symétrique. Pour un graphe simple, sa diagonale est nulle.

💡 Exemple | Même graphe, tableau explicite

Fixons l'ordre A, B, C, D pour les lignes et les colonnes. Depuis A , on peut atteindre B, D en une étape : sa ligne est $(0, 1, 0, 1)$. Depuis B , les voisins sont A, C, D : $(1, 0, 1, 1)$. Depuis C , les voisins sont B, D : $(0, 1, 0, 1)$. Depuis D , les voisins sont A, B, C : $(1, 1, 1, 0)$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La diagonale est nulle puisque personne n'est relié à lui-même. La matrice est symétrique parce que chaque arête se parcourt dans les deux sens. Les sommes des lignes sont 2, 3, 2, 3, les degrés attendus : ces deux contrôles permettent de repérer une erreur de transcription.

Pour un graphe avec plusieurs arcs entre une paire de sommets, le coefficient peut compter les arcs. Pour un graphe pondéré, remplacer 1 par un poids change le sens du calcul : une puissance additionne des produits de poids ; elle ne donne pas automatiquement un nombre de trajets.

À toi d'essayer : Trois sommets en ligne

Écris la matrice du graphe $A-B-C$ dans l'ordre A, B, C .

Pour démarrer. Construis une ligne par sommet, avec une colonne pour chaque arrivée possible.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 27](#) [Explication, p. 30](#)

À toi d'essayer : Reconstruire le graphe à partir du tableau

Interprète $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans l'ordre U,V,W comme graphe non orienté simple.

Pour démarrer. Lis les cases (U, V) , (U, W) et (V, W) , une seule fois par arête.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 27 Explication, p. 30

3.4 Compter les chemins par des puissances

★ Théorème | Interprétation de M^k

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le coefficient $(M^k)_{ij}$ est le nombre de marches de longueur k allant de S_i à S_j .



Démonstration | Preuve par récurrence

Ce que nous comptons. Une marche peut réutiliser sommets et arêtes. Pour une longueur $k + 1$, nous séparons ses k premières étapes de sa toute dernière étape.

Initialisation, longueur 0. Sans aucune transition, il existe une marche de S_i à lui-même, et aucune vers un autre sommet. La matrice de ces nombres est exactement $I = M^0$: 1 sur la diagonale, 0 ailleurs.

Hypothèse. Supposons que $(M^k)_{i\ell}$ compte les marches de longueur k de S_i à S_ℓ , pour chaque paire de sommets.

Construire une marche de longueur $k + 1$. Fixons le sommet S_ℓ atteint juste avant la dernière étape. On dispose de $(M^k)_{i\ell}$ choix pour y arriver. Si $m_{\ell j} = 0$, aucune de ces marches ne peut être prolongée vers S_j ; si $m_{\ell j} = 1$, chacune a exactement un prolongement. Le nombre correspondant est donc le produit $(M^k)_{i\ell} m_{\ell j}$. Si plusieurs arcs sont autorisés, ce même produit compte les choix du dernier arc.

Chaque marche a un unique avant-dernier sommet. Les cas obtenus pour des ℓ différents ne se chevauchent donc pas, et tous les parcours sont couverts. On additionne leurs nombres : $\sum_\ell (M^k)_{i\ell} m_{\ell j}$. Par la définition du produit ligne-colonne, c'est $(M^k M)_{ij} = (M^{k+1})_{ij}$. La propriété est donc transmise du rang k au rang $k + 1$, puis vraie pour toute longueur par récurrence.



Exemple | Longueur deux dans un graphe en ligne

La matrice du graphe est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour la ligne de A dans M^2 , les produits donnent $0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 = 1$, $0 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$, et $0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 = 1$. La ligne de B donne 0, 2, 0, et celle de C , identique à celle de A , donne 1, 0, 1.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les parcours de B vers B sont B, A, B et B, C, B , donc la case centrale vaut 2. De A vers C , il n'y a que A, B, C , donc la case vaut 1. Un coefficient diagonal de M^2 compte un retour en deux étapes ; il n'indique pas une boucle d'une seule étape dans M .

Pour un graphe non orienté à n sommets, il est connexe exactement lorsque chaque paire distincte est reliée par une marche d'au plus $n-1$ étapes. On peut en effet retirer les boucles d'une marche jusqu'à obtenir un parcours sans sommet répété. Ainsi les coefficients hors diagonale de $I + M + \dots + M^{n-1}$ permettent de vérifier la connexité.

⚠ Attention | Longueur et distance minimale

$(M^k)_{ij} > 0$ signifie qu'un parcours de longueur exactement k existe. La distance minimale est le premier k pour lequel ce coefficient devient positif. Il ne s'agit ni de la valeur du coefficient ni d'une somme de poids kilométriques.

À toi d'essayer : Décomposer par l'étape intermédiaire

Pour la matrice précédente, calcule $(A^2)_{VW}$ puis interprète-le.

Pour démarrer. Pour chaque intermédiaire U, V, W , compte la possibilité d'aller de V à cet intermédiaire puis à W .

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 28](#) [Explication, p. 31](#)

3.5 Calculer des puissances sans multiplier n fois

3.5.1 Matrices diagonales et nilpotentes

Pour $D = \text{diag}(a, b, c)$, $D^n = \text{diag}(a^n, b^n, c^n)$. Les coefficients hors diagonale restent nuls.

💡 Exemple | Un exemple d'ordre 2

Pour $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, chaque case de N^2 est nulle : les seuls coefficients non nuls ne permettent aucun produit ligne-colonne non nul. Nous conjecturons $(I + N)^n = I + nN$.

Au rang 0, $(I + N)^0 = I$ et $I + 0N = I$. Supposons la formule vraie au rang n . Alors $(I + N)^{n+1} = (I + nN)(I + N) = I + N + nN + nN^2$. Comme $N^2 = 0$, cela devient $I + (n+1)N$. L'hérédité et l'initialisation prouvent la formule pour tous les entiers naturels. Le terme en N^2 a disparu grâce à un calcul vérifié, pas parce qu'on l'aurait négligé.

💡 Exemple | Un exemple d'ordre 3

Avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, le produit N^2 a seulement la case $(1, 3)$ égale à $0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 = 1$.

Toutes les autres sont nulles. Multiplier encore par N donne zéro, car la troisième ligne de N est nulle : $N^3 = 0$.

Comme I commute avec N , le binôme est autorisé. Tous les termes contenant N^k avec $k \geq 3$ sont nuls. Il reste $I + nN + \binom{n}{2}N^2$, où $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$; pour $n = 0, 1$, le dernier coefficient est nul.

On peut vérifier la transmission directement : multiplier $I + nN + [n(n-1)/2]N^2$ par $I + N$ donne $I + (n+1)N + [n + n(n-1)/2]N^2$. Le nouveau coefficient vaut $n(n+1)/2$, celui du rang $n+1$.

La matrice finale est $\begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.5.2 Une factorisation vérifiée

Si tu as vérifié $A = PDP^{-1}$, alors $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout n naturel. Les facteurs $P^{-1}P$ s'annulent entre deux copies successives; au rang 0, $PIP^{-1} = I$.

💡 Exemple | Deux modes d'évolution

Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, calculons $P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$. Donc $P^{-1} = P/2$. Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, le produit $AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Avec $D = \text{diag}(3, 1)$, PD donne exactement cette même matrice. Donc $AP = PD$, puis $A = PDP^{-1}$ en multipliant à droite par P^{-1} .
 Au rang 0, $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$. Si $A^n = PD^nP^{-1}$, alors $A^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, car les facteurs voisins $P^{-1}P$ valent I . Ainsi la formule vaut à tout rang.
 Comme $D^n = \text{diag}(3^n, 1)$, $PD^n = \begin{pmatrix} 3^n & 1 \\ 3^n & -1 \end{pmatrix}$. Le produit par $P/2$ donne $A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$. Chaque coefficient résulte d'une somme de deux produits; aucune théorie supplémentaire n'a été supposée.

À toi d'essayer : Un carré ne suffit pas pour toutes les puissances

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, conjecture A^n , puis explique l'étape de récurrence.

Pour démarrer. Calcule les quatre cases du produit de la formule supposée par A .

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 28](#) [Explication, p. 31](#)

3.6 Suites de colonnes : cas homogène et affine

★ Théorème | Récurrence homogène

Si $U_{n+1} = AU_n$ avec une colonne initiale U_0 , alors $U_n = A^nU_0$. La preuve est une récurrence : le rang 0 vaut IU_0 , puis $AU_n = AA^nU_0 = A^{n+1}U_0$.

💡 Exemple | Deux suites couplées

La première récurrence donne les coefficients $(2, 1)$ et la seconde $(1, 2)$, donc $U_{n+1} = AU_n$ avec $U_n = (x_n, y_n)^T$. Pour $U_0 = (1, 0)^T$, multiplier A^n par cette colonne sélectionne sa première colonne. On obtient $x_n = (3^n + 1)/2$ et $y_n = (3^n - 1)/2$.

Retrouvons les mêmes résultats autrement. Posons $s_n = x_n + y_n$: en additionnant les récurrences, $s_{n+1} = 3x_n + 3y_n = 3s_n$, et $s_0 = 1$, donc $s_n = 3^n$. Posons $d_n = x_n - y_n$: soustraire donne $d_{n+1} = x_n - y_n = d_n$, donc $d_n = 1$. Enfin $s_n + d_n = 2x_n$ et $s_n - d_n = 2y_n$, ce qui redonne les deux formules. Cette seconde méthode explique ce que représentent les deux puissances scalaires.

★ Théorème | Récurrence affine

Si $U_{n+1} = AU_n + C$, alors

$$U_n = A^n U_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^k C.$$

La somme est vide, donc nulle, pour $n=0$. Si une colonne L vérifie $L = AL + C$, alors

$$U_n = L + A^n(U_0 - L).$$

Démonstration | Deux méthodes

1. La somme des apports. Au rang 0, $A^0 U_0 = U_0$ et la somme vide vaut zéro, donc la formule est vraie. Supposons-la vraie au rang n : $U_n = A^n U_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^k C$. Dans la récurrence,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= A \left(A^n U_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^k C \right) + C \\ &= A^{n+1} U_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^{k+1} C + C \\ &= A^{n+1} U_0 + \sum_{j=1}^n A^j C + A^0 C \\ &= A^{n+1} U_0 + \sum_{j=0}^n A^j C. \end{aligned}$$

Dans la troisième ligne, nous avons posé $j = k + 1$ et écrit $C = IC = A^0 C$. Les exposants vont maintenant de 0 à n : c'est la formule au rang suivant. La récurrence est établie.

2. Retirer un point fixe. Supposons $L = AL + C$. En soustrayant cette égalité de $U_{n+1} = AU_n + C$, les deux apports C s'annulent : $U_{n+1} - L = A(U_n - L)$. La suite $V_n = U_n - L$ vérifie donc $V_{n+1} = AV_n$. Au rang 0, $V_0 = U_0 - L$; par récurrence, $V_n = A^n V_0$. Rajouter L donne $U_n = L + A^n(U_0 - L)$. Pour trouver L , l'équation équivaut à $(I - A)L = C$. Si $I - A$ est inversible, multiplier à gauche par son inverse donne l'unique $L = (I - A)^{-1}C$. Si cet inverse n'existe pas, on étudie directement le système ; on ne peut pas employer cette dernière formule automatiquement.

Attention | Un point fixe ne garantit pas la convergence

La formule $U_n = L + A^n(U_0 - L)$ n'implique une convergence vers L que si la dernière colonne tend vers 0. Si A amplifie certaines directions, les termes peuvent s'éloigner. Si $I - A$ n'est pas inversible, la première formule reste valable, même sans point fixe.

À toi d'essayer : Déplacer l'équilibre

Soit $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + (2, 1)^T$. Trouve L et exprime $U_n - L$.

Pour démarrer. Isole $L/2$ dans l'équation du point fixe, puis soustrais cette équation à la récurrence.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 28](#) [Explication, p. 31](#)

À toi d'essayer : Pourquoi soustraire le point fixe ?

Soit $U_{n+1} = AU_n + C$ et $L = AL + C$. Écris la récurrence satisfaite par $V_n = U_n - L$ et sa solution.
Pour démarrer. Écris les deux membres soustraits avec leurs parenthèses pour faire apparaître l'annulation de C .

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 28 Explication, p. 31

3.7 Parcours eulériens : un prolongement

Un parcours eulérien utilise chaque arête exactement une fois. Les sommets peuvent être visités plusieurs fois. Si le parcours est fermé, on parle de circuit eulérien. Dans un graphe non orienté connexe, un circuit eulérien existe si et seulement si tous les degrés sont pairs. Un parcours eulérien ouvert existe si et seulement si exactement deux degrés sont impairs : ce sont ses extrémités.



Démonstration / Comprendre le critère

Nécessité. Dans un parcours sans réutilisation d'arête, chaque arrivée à un sommet intermédiaire doit être suivie d'un départ par une autre arête. Les arêtes utilisées à ce sommet se groupent par paires. Pour un parcours fermé, cela vaut aussi au sommet de départ, donc tous les degrés sont pairs. Pour un parcours ouvert, le départ a un degré de plus que d'arrivées et l'arrivée a une arrivée de plus ; exactement ces deux sommets ont un degré impair.

Suffisance si tous les degrés sont pairs. Partons d'un sommet et suivons une arête encore inutilisée tant que possible. À un sommet différent du départ, arriver utilise une arête ; les utilisations précédentes y étaient appariées. Comme le degré total est pair, une arête inutilisée reste disponible pour repartir. On ne peut donc se bloquer qu'au point de départ, et le trajet obtenu est fermé. Les arêtes sont en nombre fini et chacune n'est prise qu'une fois, donc ce trajet se termine.

S'il reste des arêtes, la connexité garantit qu'un sommet du circuit déjà construit est incident à une arête inutilisée : sinon aucune arête ne pourrait relier les sommets déjà atteints à la partie restante. Retirer les arêtes du circuit enlève un nombre pair d'arêtes à chaque sommet. Les degrés restants sont donc encore pairs. Depuis le sommet choisi, le même argument construit un autre circuit avec les arêtes restantes. On l'insère dans le premier au moment où l'on passe par ce sommet. Chaque insertion utilise au moins une nouvelle arête ; le nombre total étant fini, on finit par toutes les utiliser.

Deux sommets impairs. Ajoutons temporairement une arête entre eux, même si cela crée deux arêtes parallèles ; on distingue alors ces deux arêtes. Les deux degrés deviennent pairs, et l'argument précédent reste valable. Il produit un circuit utilisant l'arête ajoutée. Couper ce circuit à cette arête puis la retirer laisse un parcours ouvert entre les deux sommets impairs, utilisant chaque arête originale exactement une fois.

Ce problème diffère du comptage par M^n : la contrainte de ne pas réutiliser une arête n'est pas encodée dans la seule puissance d'adjacence.

4 Boîte à outils — relier réseau et évolution**4.1 Retrouver une matrice de transition de comptage**

Exemple | Deux types de mots binaires

Pour $n \geq 1$, a_n compte les mots valides finissant par 0 et b_n ceux finissant par 1. Un mot de longueur $n + 1$ finissant par 0 s'obtient en ajoutant 0 à n'importe quel mot valide de longueur n : cela ne crée jamais deux 1 consécutifs. Il y en a donc $a_n + b_n$. Pour finir par 1, le mot précédent

doit finir par 0 ; il y en a a_n . Retirer la dernière lettre inverse ces constructions, donc aucun mot n'est oublié ou compté deux fois.

Ainsi $a_{n+1} = a_n + b_n$, $b_{n+1} = a_n$, soit $U_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} U_n$. À longueur 1, les mots sont 0 et 1 :

$U_1 = (1, 1)^T$. Les étapes donnent $U_2 = (2, 1)^T$, $U_3 = (3, 2)^T$, $U_4 = (5, 3)^T$, donc huit mots de longueur 4.

La formule générale est $U_n = A^{n-1}U_1$: pour passer du rang 1 au rang n , on applique $n - 1$ transitions. Au rang 1, l'exposant zéro redonne bien la donnée initiale.

4.2 Une récurrence affine couplée complète

Soit $U_{n+1} = AU_n + C$ avec $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, $C = (1, 1)^T$. Le point fixe satisfait $L_2 = L_2/2 + 1$, donc $L_2 = 2$, puis $L_1 = L_1/2 + L_2/4 + 1$, donc $L_1 = 3$.

Écris $A = (1/2)(I + N)$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^2 = 0$. Alors $A^n = 2^{-n} \begin{pmatrix} 1 & n/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour $U_0 = (0, 0)^T$, on obtient

$$U_n = \begin{pmatrix} 3 - (n+3)2^{-n} \\ 2 - 2 \times 2^{-n} \end{pmatrix}.$$

Détaillons le produit : $U_0 - L = (-3, -2)^T$ et $A^n(U_0 - L) = 2^{-n}(-3 - n, -2)^T$. Ajouter $(3, 2)^T$ donne bien les deux coordonnées affichées. Au rang 0, elles valent $3 - 3 = 0$ et $2 - 2 = 0$, comme la donnée initiale.

Pour la limite, il reste à justifier $n2^{-n} \rightarrow 0$, pas seulement $2^{-n} \rightarrow 0$. Posons $v_n = n/2^n$ pour $n \geq 2$. Ce nombre est positif, et $v_{n+1}/v_n = (n+1)/(2n) = 1/2 + 1/(2n) \leq 3/4$. Donc $v_{n+1} \leq (3/4)v_n$. En répétant de 2 à n , $0 \leq v_n \leq v_2(3/4)^{n-2}$. La borne supérieure est une suite géométrique de raison entre 0 et 1, donc tend vers zéro ; le théorème des gendarmes donne $v_n \rightarrow 0$. Alors $(n+3)2^{-n} = n2^{-n} + 3 \times 2^{-n} \rightarrow 0$. Les deux coordonnées convergent ainsi vers 3 et 2.

4.3 Sommer des puissances avec le bon ordre

Posons $S = I + A + \dots + A^{n-1}$ pour $n \geq 1$. Le produit $AS = A + A^2 + \dots + A^n$ décale chaque exposant. Dans $S - AS$, les termes A à A^{n-1} se compensent, laissant $I - A^n$. Ainsi $(I - A)S = I - A^n$. Si $I - A$ est inversible, multiplier à gauche par son inverse donne $S = (I - A)^{-1}(I - A^n)$. Puis $SC = \sum_{k=0}^{n-1} A^k C$ représente les apports successifs de la récurrence affine. Cette preuve explique le sens de la multiplication et les deux termes qui restent après compensation.

Lorsque $I - A$ n'est pas inversible, l'identité de compensation demeure vraie, mais on ne peut pas la résoudre en multipliant par un inverse inexistant. La somme finie reste alors une expression valide et souvent utile.

À toi d'essayer : Ne pas décaler une suite

Si $U_2 = V$ et $U_{n+1} = AU_n$ pour $n \geq 2$, exprime U_n en fonction de V .

Pour démarrer. Compte combien de transitions séparent le rang 2 du rang n .

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 29](#) [Explication, p. 31](#)

À toi d'essayer : Un zéro ne suffit pas

Dans le graphe A–B–C, le coefficient (A,C) de M est nul. Les sommets sont-ils pourtant reliés ?

Pour démarrer. Cherche d'abord un trajet concret à deux étapes, puis retrouve-le dans M^2 .

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 29](#) [Explication, p. 32](#)

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases, 6 à 10 relient les notions et 11 à 15 demandent davantage d'initiative. Cherche d'abord, puis utilise un indice si tu en as besoin.

Exercice 1 — Ordre et degrés

Un graphe possède les sommets A,B,C,D et les arêtes AB,AC,BC,CD. Donne son ordre, les degrés et vérifie leur somme.

Exercice 2 — Graphe complet

Combien d'arêtes possède K_6 ? Quel est le degré de chaque sommet ?

Exercice 3 — Matrice d'un triangle

Écris la matrice d'adjacence du triangle A,B,C dans cet ordre.

Exercice 4 — Chemins de longueur deux

Calcule M^2 pour le triangle de l'exercice 3. Combien de marches de longueur deux vont de A à B ?

Exercice 5 — Connexité

Le graphe d'arêtes AB et CD sur quatre sommets est-il connexe ? Peut-il exister une marche de A à D ?

Exercice 6 — Graphe orienté

Les arcs sont A vers B, B vers C et C vers A. Écris M puis M^3 .

Exercice 7 — Puissance diagonale

Pour $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, donne D^n et le comportement des trois coordonnées de $D^n(1, 1, 1)^T$.

Exercice 8 — Une matrice triangulaire

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, conjecture puis démontre A^n .

Exercice 9 — Puissance d'ordre trois

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule A^5 .

Exercice 10 — Suite couplée

Soit $x_{n+1} = 2x_n + y_n$, $y_{n+1} = x_n + 2y_n$ avec $x_0 = 2$, $y_0 = 0$. Donne x_n et y_n .

Exercice 11 — Réurrence affine

Soit $U_{n+1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} U_n + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $U_0 = (0, 0)^T$. Calcule U_n et sa limite.

Une transition répétée devient une puissance.

Exercice 12 — Sans point fixe ★★ ★

Soit $U_{n+1} = U_n + C$ avec $C \neq 0$. Exprime U_n et explique pourquoi la méthode du point fixe échoue.

Exercice 13 — Compter les retours ★★ ★

Pour le triangle de l'exercice 3, calcule le nombre de marches de longueur trois de A à A, puis de A à B.

Exercice 14 — Parcours eulérien, prolongement ★★ ★

Le graphe de l'exercice 1 possède-t-il un parcours utilisant chaque arête une fois ? Donne-en un.

Exercice 15 — Une formule de puissances ★★ ★

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Démontre sans calculer P que $A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$.

6 Problème — Pour aller plus loin

Ce prolongement est accessible à partir du cours : les résultats supplémentaires sont guidés, et leur mémorisation n'est pas un préalable. Tu peux répartir la recherche sur plusieurs séances.

Fibonacci, pavages et matrice de transition

On définit $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Le but est de relier cette suite au nombre de pavages d'une bande et de démontrer une identité de produits. Durée indicative : 90 minutes.

Partie I — Une récurrence à deux coordonnées

1. Pose $U_n = (F_{n+1}, F_n)^T$. Montre $U_{n+1} = AU_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Calcule A^2 , A^3 et les six premiers termes de la suite.
3. Démonstre pour $n \geq 1$: $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$.

Partie II — Une formule d'addition

1. Utilise $A^{m+n} = A^m A^n$ pour démontrer, pour $m, n \geq 1$, $F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1}$.
2. Dédus une expression de F_{2n} puis calcule F_{10} à partir de F_4, F_5, F_6 .

Partie III — Un invariant alterné et des pavages

1. Pose $D_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$. Montre $D_{n+1} = -D_n$ puis déduis $D_n = (-1)^n$ pour $n \geq 1$.
2. On pave une bande de n cases avec des tuiles de longueur 1 ou 2. Si T_n est le nombre de pavages et $T_0 = 1$, justifie $T_1 = 1$ et $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$ pour $n \geq 2$.
3. Dédus $T_n = F_{n+1}$ et calcule le nombre de pavages d'une bande de 9 cases.

Pistes

Multiplie les matrices dans I. Dans II, lis un seul coefficient du produit. Dans III, remplace F_{n+1} par $F_n + F_{n-1}$ et classe les pavages selon la longueur de leur première tuile.

7 Indices des exercices

Exercice 1

Compte les arêtes incidentes à chaque sommet.

Chaque arête contribue deux fois à la somme.

Exercice 2

Chaque sommet voit tous les autres.

Évite de compter AB et BA comme deux arêtes.

Exercice 3

Le triangle est le graphe complet à trois sommets.

Chaque ligne contient deux 1.

Exercice 4

Calcule le coefficient ligne A, colonne B.

Énumère aussi le sommet intermédiaire.

Exercice 5

Cherche un lien entre les deux paires.

Une puissance ne crée pas de connexion absente.

Exercice 6

Les lignes désignent les départs.

Observe le cycle avant de multiplier.

Exercice 7

Les puissances agissent séparément sur les coefficients diagonaux.

Étudie chaque suite réelle.

Exercice 8

Calcule A^2 puis A^3 pour conjecturer.

Utilise ensuite une récurrence, pas seulement les premiers termes.

Exercice 9

Écris $A=I+N$.

Ici $N^3=0$ mais N^2 n'est pas nul.

Exercice 10

Additionne et soustrais les deux récurrences.

Reconstitue x et y à partir de somme et différence.

Exercice 11

Cherche une solution constante.

Étudie ensuite la suite obtenue en la soustrayant.

Exercice 12

Prends $A=I$ dans la formule générale.

Une solution constante imposerait C nul.

Exercice 13

Fixe le sommet juste avant la dernière étape.

Contrôle les coefficients par une liste de parcours.

Exercice 14

Les extrémités doivent être les sommets de degré impair.

Teste une chaîne partant du sommet D de degré 1.

Exercice 15

Vérifie le rang 0.

L'hérédité se réduit à deux types de coefficients.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

L'ordre compte les sommets, donc vaut 4. À A arrivent les arêtes AB, AC , donc son degré vaut 2. À B , AB, BC donnent 2. À C , AC, BC, CD donnent 3. À D , seule CD donne 1. La somme vaut $2 + 2 + 3 + 1 = 8$. Les quatre arêtes ont chacune deux extrémités, donc le double de leur nombre vaut aussi $2 \times 4 = 8$. Les degrés impairs se trouvent en C, D : deux sommets, conformément au théorème de parité.

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Dans K_6 , chaque sommet est relié à tous les autres, mais pas à lui-même : son degré vaut $6 - 1 = 5$. La somme des six degrés est donc $6 \times 5 = 30$. Une arête AB a été comptée une fois au sommet A et une fois au sommet B . Il faut donc diviser ce total par deux : le nombre d'arêtes vaut $30/2 = 15$. Le facteur 2 corrige exactement ce double comptage ; le graphe étant non orienté, AB et BA ne désignent pas deux arêtes différentes.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Fixons l'ordre A, B, C pour les lignes et les colonnes. Depuis A , il y a une arête vers B et une vers C , mais pas de boucle vers A : première ligne $(0, 1, 1)$. Depuis B , les voisins sont A, C , donnant $(1, 0, 1)$. Depuis C , les voisins sont A, B , donnant $(1, 1, 0)$.

Donc $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La symétrie contrôle l'absence d'orientation ; chaque ligne somme à 2, le degré attendu dans un triangle.

Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

La ligne A de M est $(0, 1, 1)$. Son produit par les colonnes A, B, C donne respectivement $0+1+1 = 2$, $0+0+1 = 1$, $0+1+0 = 1$. Le même calcul pour les deux autres lignes, avec le rôle des sommets

échangé, donne $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

La case (A, B) vaut 1 : le seul intermédiaire est C , donc la seule marche est A, C, B . Passer par A ou B demanderait une boucle inexistante. Pour revenir en A , les deux marches sont A, B, A et A, C, A , expliquant la case diagonale 2.

Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

Depuis A , la seule arête mène à B ; depuis B , la seule mène à A . Toute marche commencée en A reste donc dans l'ensemble $\{A, B\}$, quelle que soit sa longueur. Les sommets C, D forment une autre paire, reliée seulement entre eux.

Il n'existe donc aucune marche de A à D , et le graphe n'est pas connexe. Il a deux composantes $\{A, B\}$ et $\{C, D\}$. Les coefficients (A, D) de toutes les puissances d'adjacence sont nuls, car ils comptent des marches qui n'existent pas; augmenter la puissance ne crée pas d'arête entre les composantes.

Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

Les lignes représentent les départs. Depuis A , seul B est accessible; depuis B , seul C ; depuis C ,

seul A . Donc $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En deux étapes, on obtient les trajets uniques $A \rightarrow C$, $B \rightarrow A$, $C \rightarrow B$, donc $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

En une étape supplémentaire, chacun revient à son départ et aucun n'arrive ailleurs : $M^3 = I_3$. La diagonale de M est nulle, mais celle de M^3 vaut 1 parce qu'elle compte des retours en trois étapes, pas des boucles directes.

Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

Une matrice diagonale agit séparément sur chaque coordonnée. À chaque multiplication, la première est multipliée par 2, la deuxième par -1 , la troisième par $1/2$. Ainsi $D^n = \text{diag}(2^n, (-1)^n, 2^{-n})$, y compris au rang 0 où les trois termes valent 1.

Appliquée à $(1, 1, 1)^T$, elle donne $(2^n, (-1)^n, 2^{-n})^T$. La première coordonnée tend vers $+\infty$; la deuxième vaut alternativement 1 et -1 , donc ne converge pas; la troisième tend vers zéro car sa raison est $1/2$. Une colonne ne converge que si toutes ses coordonnées convergent vers des réels : ce n'est pas le cas ici.

Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

Les premiers produits donnent $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui suggère $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Au rang 0, cette expression est $I_2 = A^0$. Supposons-la vraie au rang n . Multiplier à droite par A donne les cases 1, $1 \times 3 + 3n \times 1 = 3(n+1)$, 0 et 1. On retrouve donc la formule au rang $n+1$. La récurrence prouve la conjecture pour tout $n \in \mathbb{N}$; les deux premiers produits seuls ne l'auraient pas fait.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Écrivons $A = I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Son carré a seulement un 1 en position $(1, 3)$; son cube est nul. Le binôme est permis car I commute avec N . Pour la puissance 5, seuls les trois premiers termes survivent : $A^5 = I + 5N + \binom{5}{2}N^2$.

Le coefficient $\binom{5}{2} = 5 \times 4/2 = 10$. Donc $A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le terme 10 vient des produits contenant deux fois N ; il ne disparaît pas puisque $N^2 \neq 0$. C'est seulement à partir de trois facteurs N que les termes deviennent nuls.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Posons $s_n = x_n + y_n$ et $d_n = x_n - y_n$. Additionner les récurrences donne $s_{n+1} = (2x_n + y_n) + (x_n + 2y_n) = 3s_n$. Comme $s_0 = 2$, la suite géométrique vaut $s_n = 2 \times 3^n$.

Soustraire donne $d_{n+1} = (2x_n + y_n) - (x_n + 2y_n) = x_n - y_n = d_n$. Donc $d_n = d_0 = 2$. Pour retrouver les inconnues, $s_n + d_n = 2x_n$ et $s_n - d_n = 2y_n$. Ainsi $x_n = 3^n + 1$ et $y_n = 3^n - 1$. Au rang 0, on retrouve $(2, 0)$; au rang 1, $(4, 2)$, conforme aux deux récurrences.

Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

Cherchons une colonne constante $L = (\ell_1, \ell_2)^T$. Les équations sont $\ell_1 = \ell_1/2 + 1$, donc $\ell_1/2 = 1$ et $\ell_1 = 2$; puis $\ell_2 = \ell_2/3 + 2$, donc $(2/3)\ell_2 = 2$ et $\ell_2 = 3$.

En retirant L , $U_n - L = A^n(U_0 - L)$. Comme A est diagonale, $A^n = \text{diag}(2^{-n}, 3^{-n})$; et $U_0 - L = (-2, -3)^T$. Donc $U_n = (2 - 2 \times 2^{-n}, 3 - 3 \times 3^{-n})^T$. Au rang 0, les deux coordonnées valent zéro. Les puissances $2^{-n}, 3^{-n}$ tendent vers zéro, donc $U_n \rightarrow (2, 3)^T$.

Corrigé 12

 *Démonstration / Solution expliquée*

Les premiers rangs sont $U_1 = U_0 + C$ et $U_2 = U_0 + 2C$. Au rang 0, la formule $U_n = U_0 + nC$ est vraie. Si elle vaut à n , alors $U_{n+1} = U_n + C = U_0 + (n+1)C$, ce qui la prouve par récurrence.

Un point fixe devrait vérifier $L = L + C$. En soustrayant L , cela donnerait $C = 0$, contraire à l'hypothèse. Il n'existe donc pas de point fixe. La formule générale par somme reste valide : avec $A = I$, chaque terme $A^k C$ est simplement C , et les n termes totalisent nC .

Corrigé 13

 *Démonstration / Solution expliquée*

La ligne A de M^2 vaut $(2, 1, 1)$. Pour revenir en A après une étape de plus, on la multiplie par la colonne $A = (0, 1, 1)^T$: $2 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$. Les marches sont A, B, C, A et A, C, B, A . Pour arriver en B , la colonne vaut $(1, 0, 1)^T$, donc le coefficient est $2 \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 3$. Les trois marches sont A, B, A, B ; A, B, C, B ; A, C, A, B . Chaque liste contient quatre sommets, donc trois transitions. Les répétitions sont autorisées ; les exclure changerait la question et le résultat.

Corrigé 14

 *Démonstration / Solution expliquée*

Le graphe est connexe : A, B, C sont reliés dans le triangle et D est relié à C . Les degrés sont $2, 2, 3, 1$; exactement C, D ont un degré impair. Le critère donne donc un parcours eulérien ouvert entre ces deux sommets.

La liste D, C, A, B, C utilise successivement DC, CA, AB, BC . Ce sont les quatre arêtes du graphe, chacune une seule fois : elle fournit un parcours concret. Le sommet C apparaît deux fois, ce qui est autorisé ; seule la répétition des arêtes est interdite. Un circuit fermé est impossible, car les deux degrés impairs devraient alors être pairs.

Corrigé 15

 *Démonstration / Solution expliquée*

Au rang 0, $3^0 = 1$ et la matrice proposée est $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I = A^0$. Supposons la formule vraie à n et notons $t = 3^n$. Le produit à droite par A donne

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2(t+1) + (t-1) & (t+1) + 2(t-1) \\ 2(t-1) + (t+1) & (t-1) + 2(t+1) \end{pmatrix}.$$

Les coefficients diagonaux se simplifient en $3t + 1$, les autres en $3t - 1$. Comme $3t = 3^{n+1}$, c'est exactement la formule au rang suivant. L'initialisation et l'hérédité prouvent toutes les puissances.

Au rang 1, on retrouve $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = A$, contrôle supplémentaire.

9 Corrigé du problème

Partie I — Mettre deux rangs dans une colonne

1. La colonne U_n contient F_{n+1} en haut et F_n en bas. Le produit par A donne $(F_{n+1} + F_n, F_{n+1})^T$. La relation de Fibonacci identifie le premier terme à F_{n+2} ; le produit est donc $(F_{n+2}, F_{n+1})^T = U_{n+1}$. La deuxième ligne copie l'ancien premier terme pour conserver les deux rangs consécutifs.

2. Le carré de A a pour cases $1 + 1 = 2$, $1 + 0 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 0 = 1$, donc $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Multiplier encore par A donne $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Les six premiers termes sont $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1 + 0 = 1$, $F_3 = 1 + 1 = 2$, $F_4 = 2 + 1 = 3$, $F_5 = 3 + 2 = 5$.

3. Au rang $n = 1$, la matrice annoncée est $\begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = A$. Supposons la formule vraie à un rang $n \geq 1$.

Alors

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}.$$

Les deux sommes sont F_{n+2} et F_{n+1} . C'est la formule au rang $n + 1$, donc elle est vraie pour tous les rangs $n \geq 1$ par récurrence. Le départ à 1 évite d'utiliser un terme F_{-1} non défini.

Partie II — Lire un coefficient utile

1. Dans A^{m+n} , la case $(1, 2)$ est F_{m+n} . Dans $A^m A^n$, elle est le produit de la ligne (F_{m+1}, F_m) par la colonne $(F_n, F_{n-1})^T$, donc $F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}$. Les matrices sont égales parce que les puissances d'une même matrice vérifient $A^{m+n} = A^m A^n$. Leurs cases correspondantes sont donc égales, ce qui démontre l'identité demandée.

2. Prenons $m = n$. On obtient $F_{2n} = F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$. Pour $n = 5$, les valeurs sont $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 5 + 3 = 8$, donc $F_{10} = 5(8 + 3) = 5 \times 11 = 55$.

Partie III — Justifier l'alternance puis les pavages

1. Partons de $D_{n+1} = F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2$. Remplaçons F_{n+2} par $F_{n+1} + F_n$:

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= F_{n+1}F_n + F_n^2 - F_{n+1}^2 \\ &= F_n^2 - F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) \\ &= F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = -D_n. \end{aligned}$$

La deuxième ligne met F_{n+1} en facteur ; la troisième utilise $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$. Au rang 1, $D_1 = F_2F_0 - F_1^2 = 1 \times 0 - 1 = -1$. Chaque pas change le signe : par récurrence, $D_n = (-1)^n$.

2. La bande vide possède un pavage vide, donc $T_0 = 1$. Une bande d'une case accepte uniquement une tuile de longueur 1, donc $T_1 = 1$. Pour $n \geq 2$, séparons les pavages selon leur première tuile. Si elle a longueur 1, il reste une bande de $n - 1$ cases, pavable de T_{n-1} façons. Si elle a longueur 2, il reste $n - 2$ cases, pavables de T_{n-2} façons. Retirer puis remettre la première tuile établit une correspondance exacte dans chaque cas. Les deux cas sont distincts et couvrent toutes les possibilités, donc $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$.

3. La suite $G_n = F_{n+1}$ a $G_0 = F_1 = 1$ et $G_1 = F_2 = 1$, comme T . Si $T_{n-1} = F_n$ et $T_{n-2} = F_{n-1}$, leur récurrence donne $T_n = F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$. Les deux valeurs initiales et cette transmission prouvent $T_n = F_{n+1}$ à tous les rangs. Pour neuf cases, $T_9 = F_{10} = 55$ pavages.

10 Faire le point par une variante autonome

Essaie cette variante sans relire le corrigé précédent. Explique le choix de ta méthode, puis utilise les contrôles pour décider quelle notion retravailler.

À toi d'essayer : De l'affine à une formule explicite

Soit $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + (1, 2)^T$ et $U_0 = (0, 0)^T$. Détermine un point fixe, puis U_n et sa limite.

Pour démarrer. Trouve L , calcule l'écart initial, puis remets le point fixe à la fin.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 29](#) [Explication, p. 32](#)

11 Fiche-mémoire

- Ordre : nombre de sommets ; degré : nombre d'arêtes incidentes ; longueur : nombre de transitions.
- Fixe l'ordre des sommets avant de construire une matrice d'adjacence.
- $(M^n)_{ij}$ compte les marches de longueur n , avec répétitions autorisées.
- $U_{n+1} = AU_n$ donne $U_n = A^n U_0$.
- Si $U_{n+1} = AU_n + C$ et $L = AL + C$, alors $U_n = L + A^n(U_0 - L)$.
- Si $A = PDP^{-1}$, alors $A^n = PD^nP^{-1}$; les facteurs doivent être vérifiés.

Contrôle. Ai-je confondu un nombre de parcours avec une distance ? Les répétitions sont-elles autorisées ? Ai-je vérifié le premier rang ? Une convergence est-elle effectivement prouvée, au-delà de l'existence d'un point fixe ?

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Compter les extrémités sans dessiner tout le graphe

Indice 1 — Une piste.

La somme des degrés compte chaque arête deux fois.

Indice 2 — Un pas de plus.

Le deuxième total est impair.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Une flèche change l'accessibilité

Indice 1 — Une piste.

Le sens de parcours doit suivre chaque flèche.

Indice 2 — Un pas de plus.

Il n'existe aucun arc partant de C.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Trois sommets en ligne

Indice 1 — Une piste.

Chaque ligne décrit les voisins d'un sommet.

Indice 2 — Un pas de plus.

A et C ont un seul voisin ; B en a deux.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Reconstruire le graphe à partir du tableau

Indice 1 — Une piste.

La matrice est symétrique et sa diagonale est nulle.

Indice 2 — Un pas de plus.

Lis seulement les cases au-dessus de la diagonale pour ne pas compter chaque arête deux fois.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Décomposer par l'étape intermédiaire

Indice 1 — Une piste.

Multiplie la ligne V par la colonne W.

Indice 2 — Un pas de plus.

Le seul intermédiaire possible est U.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Un carré ne suffit pas pour toutes les puissances

Indice 1 — Une piste.

Les premiers carrés donnent 2 puis 3 en haut à droite.

Indice 2 — Un pas de plus.

Multiplie la formule supposée au rang n par A.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Déplacer l'équilibre

Indice 1 — Une piste.

Résous $L = \frac{1}{2}L + (2, 1)^T$.

Indice 2 — Un pas de plus.

Soustrais ensuite cette relation à la récurrence.

[Revenir à la recherche, p. 11](#)

Pourquoi soustraire le point fixe ?

Indice 1 — Une piste.

Soustrais les deux égalités.

Indice 2 — Un pas de plus.

Les termes C se compensent.

[Revenir à la recherche, p. 12](#)

Ne pas décaler une suite**Indice 1 — Une piste.**

Calcule d'abord U_3 et U_4 .

Indice 2 — Un pas de plus.

À $n=2$, l'exposant doit valoir zéro.

[Revenir à la recherche, p. 14](#)

Un zéro ne suffit pas**Indice 1 — Une piste.**

Cherche une marche passant par B.

Indice 2 — Un pas de plus.

Examine le coefficient (A,C) de M^2 .

[Revenir à la recherche, p. 14](#)

De l'affine à une formule explicite**Indice 1 — Une piste.**

Résous $L = \frac{1}{2}L + (1, 2)^T$.

Indice 2 — Un pas de plus.

Soustrais L avant de chercher la puissance.

[Revenir à la recherche, p. 25](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Compter les extrémités sans dessiner tout le graphe

Pour les degrés 3, 3, 2, 2, la somme vaut 10. Chaque arête est comptée deux fois, donc le nombre d'arêtes est $10/2 = 5$. Pour la seconde liste, la somme est $3 + 2 + 2 + 2 = 9$, impair. Elle ne peut pas être le double d'un nombre entier d'arêtes : cette liste est impossible. Une somme paire est nécessaire, mais ne suffit pas pour n'importe quelle liste : par exemple un degré ne peut pas dépasser le nombre des autres sommets dans un graphe simple.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Une flèche change l'accessibilité

On dispose de l'arc $A \rightarrow B$ puis de l'arc $B \rightarrow C$, donc A, B, C est une marche orientée de longueur 2. Pour repartir de C , il faudrait un arc dont C est le départ. Il n'y en a aucun, donc on ne peut pas aller de C à A . Le segment dessiné entre B et C n'autorise pas automatiquement le retour $C \rightarrow B$: le sens fait partie des données. Le trajet aller n'implique donc pas l'existence du trajet retour.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Trois sommets en ligne

Dans l'ordre A, B, C , depuis A seul B est voisin, donc la ligne est $(0, 1, 0)$. Depuis B , les voisins sont A, C , donc $(1, 0, 1)$. Depuis C , seul B est voisin, donc $(0, 1, 0)$. Ainsi $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Les deux cases d'une même arête sont symétriques car le graphe est non orienté. Les zéros diagonaux correspondent à l'absence de boucle. Les sommes 1, 2, 1 sont bien les degrés.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Reconstruire le graphe à partir du tableau

La case (U, V) vaut 1, donc il y a l'arête UV . La case (U, W) vaut 1, donc il y a UW . La case (V, W) vaut 0, donc aucune arête VW . Les cases symétriques ne sont pas de nouvelles arêtes : elles décrivent les mêmes liaisons dans l'autre sens. Les degrés sont les sommes des lignes, soit 2, 1, 1. Leur somme vaut 4, donnant $4/2 = 2$ arêtes, en accord avec la liste. La diagonale nulle indique aucune boucle.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Décomposer par l'étape intermédiaire

La ligne V est $(1, 0, 0)$ et la colonne W est $(1, 0, 0)^T$. Leur produit-somme vaut $1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 1$. Le premier terme compte $V \rightarrow U \rightarrow W$, les deux autres sont nuls parce qu'il n'existe pas les étapes requises. Il y a donc exactement une marche de longueur 2 de V à W . La case directe $A_{VW} = 0$ indiquait seulement l'absence d'arête en une étape, et n'interdisait pas ce trajet via U .

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Un carré ne suffit pas pour toutes les puissances

Les premiers produits donnent 2 puis 3 dans la case supérieure droite, suggérant $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Au rang 0, cela donne l'identité. Supposons la formule au rang n . Le produit par A donne les cases $1 \times 1 + n \times 0 = 1$, $1 \times 1 + n \times 1 = n + 1$, $0 \times 1 + 1 \times 0 = 0$, $0 \times 1 + 1 \times 1 = 1$. C'est donc la même formule avec $n + 1$. La récurrence prouve tous les rangs ; les premiers calculs servaient à deviner, pas à prouver.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Déplacer l'équilibre

$L = L/2 + (2, 1)^T$ équivaut à $L/2 = (2, 1)^T$, donc $L = (4, 2)^T$. Soustraire cette égalité à la récurrence donne $U_{n+1} - L = (1/2)(U_n - L)$. Au rang 0, l'écart est $U_0 - L$; à chaque transition il est multiplié par $1/2$. Par récurrence, $U_n - L = 2^{-n}(U_0 - L)$. Chaque coordonnée de l'écart est une constante multipliée par une suite géométrique de raison $1/2$, donc tend vers zéro. Ainsi U_n tend vers L , quelle que soit la colonne initiale.

[Revenir à la recherche, p. 11](#)

Pourquoi soustraire le point fixe ?

$V_{n+1} = U_{n+1} - L = (AU_n + C) - (AL + C) = AU_n - AL = A(U_n - L) = AV_n$. Nous avons utilisé la distributivité et la relation du point fixe. Au rang 0, $V_0 = U_0 - L$. Si $V_n = A^n V_0$, le rang suivant vaut $AV_n = A^{n+1} V_0$; avec le rang 0, cela prouve $V_n = A^n V_0$. En revenant à U_n , $U_n = L + A^n(U_0 - L)$. Une convergence vers L exige encore que cette dernière colonne tende vers zéro ; le simple recentrement ne le prouve pas.

[Revenir à la recherche, p. 12](#)

Ne pas décaler une suite

Au rang 2, $U_2 = V$. Puis $U_3 = AV$ et $U_4 = A(AV) = A^2V$. On conjecture donc $U_n = A^{n-2}V$. Au rang 2, $A^0V = IV = V$, donc la formule est vraie. Si elle vaut à $n \geq 2$, $U_{n+1} = AA^{n-2}V = A^{n-1}V$, qui est bien l'exposant $(n+1) - 2$. La récurrence conclut. Écrire A^nV aurait effectué deux transitions supplémentaires et ne redonnerait pas forcément la donnée au rang 2.

[Revenir à la recherche, p. 14](#)

Un zéro ne suffit pas

Le graphe a les arêtes AB et BC , donc la marche A, B, C relie A à C en deux étapes. Sa matrice dans l'ordre A, B, C a première ligne $(0, 1, 0)$ et troisième colonne $(0, 1, 0)^T$. La case (A, C) de M^2 vaut $0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 = 1$. Il y a exactement cette marche de longueur 2. Le zéro dans M signifie absence de liaison directe ; il ne permet pas de conclure à une absence de connexion à toute longueur.

[Revenir à la recherche, p. 14](#)

De l'affine à une formule explicite

$L = L/2 + (1, 2)^T$ donne $L/2 = (1, 2)^T$, donc $L = (2, 4)^T$. Après soustraction, $U_n - L = 2^{-n}(U_0 - L) = 2^{-n}(-2, -4)^T$. Donc $U_n = (2 - 2 \times 2^{-n}, 4 - 4 \times 2^{-n})^T$, soit $(2 - 2^{1-n}, 4 - 2^{2-n})^T$. Au rang 0, les deux coordonnées valent zéro ; au rang 1, elles valent 1 et 2, conformément à la récurrence. Comme $2^{-n} \rightarrow 0$, la limite est $(2, 4)^T$. La limite a été obtenue à partir de l'écart, pas seulement devinée en résolvant le point fixe.

[Revenir à la recherche, p. 25](#)