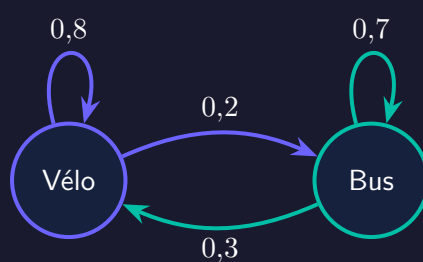


# Chaînes de Markov

Transitions ■ Distributions ■ Équilibres



$$\pi_{n+1} = \pi_n P$$

Terminale — Option Mathématiques expertes — Programme officiel

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

## Table des matières

|           |                                                                     |           |
|-----------|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>  | <b>🔍 Pourquoi ce chapitre ?</b>                                     | <b>3</b>  |
| 1.1       | Le problème fondamental : prévoir une évolution aléatoire . . . . . | 3         |
| <b>2</b>  | <b>🧠 L'idée avant la formule</b>                                    | <b>3</b>  |
| 2.1       | Une probabilité conditionnelle fixe le point de départ . . . . .    | 3         |
| 2.2       | Construire le calcul sur cent personnes . . . . .                   | 3         |
| 2.3       | Un équilibre possible n'est pas une convergence prouvée . . . . .   | 4         |
| <b>3</b>  | <b>🎓 Le cours formel</b>                                            | <b>4</b>  |
| 3.1       | États, propriété de Markov et homogénéité . . . . .                 | 4         |
| 3.2       | Graphe pondéré et matrice de transition . . . . .                   | 5         |
| 3.3       | Distribution initiale et une transition . . . . .                   | 6         |
| 3.4       | Interpréter les puissances de transition . . . . .                  | 7         |
| 3.5       | Distributions invariantes et limites . . . . .                      | 8         |
| 3.6       | Chaîne à deux états : étude complète . . . . .                      | 9         |
| 3.7       | Trois états : calcul, normalisation et exemple convergent . . . . . | 11        |
| 3.8       | Simulation et calcul exact : deux usages distincts . . . . .        | 12        |
| <b>4</b>  | <b>🧰 Boîte à outils — modéliser et interpréter</b>                  | <b>13</b> |
| 4.1       | Ce que décrit une distribution de population . . . . .              | 13        |
| 4.2       | Changer l'ordre des états sans changer le modèle . . . . .          | 13        |
| 4.3       | Temps d'attente avant une première sortie . . . . .                 | 13        |
| 4.4       | Tester la plausibilité d'un modèle homogène . . . . .               | 13        |
| <b>5</b>  | <b>✍ Exercices progressifs</b>                                      | <b>15</b> |
| <b>6</b>  | <b>🔊 Problème — Pour aller plus loin</b>                            | <b>17</b> |
| <b>7</b>  | <b>Indices des exercices</b>                                        | <b>18</b> |
| <b>8</b>  | <b>✔ Corrigés détaillés</b>                                         | <b>20</b> |
| <b>9</b>  | <b>Corrigé du problème</b>                                          | <b>24</b> |
| <b>10</b> | <b>Faire le point par une variante autonome</b>                     | <b>26</b> |
| <b>11</b> | <b>Fiche-mémoire</b>                                                | <b>27</b> |
| <b>12</b> | <b>Indices des pauses et des preuves</b>                            | <b>28</b> |
| <b>13</b> | <b>Explications des pauses et des preuves</b>                       | <b>31</b> |

## 1 ? Pourquoi ce chapitre ?

### 1.1 Le problème fondamental : prévoir une évolution aléatoire

Une personne choisit entre vélo et bus. Si son choix demain dépend de celui d'aujourd'hui, les jours ne sont pas indépendants. Un arbre de probabilités permet de calculer deux jours, mais devient encombrant après vingt jours. La matrice de transition conservera toutes les branches utiles dans un tableau de taille fixe.

#### Intuition | Une trajectoire et une distribution sont différentes

La personne est dans un seul état un jour donné. La distribution indique les probabilités de ces états, ou les proportions attendues dans une population soumise au même modèle. Le calcul matriciel prévoit une distribution ; il ne prédit pas avec certitude le choix d'une personne.

**Prérequis.** Probabilités conditionnelles, formule des probabilités totales, matrices et puissances, suites géométriques et limites. Le programme porte sur des chaînes à deux ou trois états.

#### Méthode | Objectifs

Traduire une situation en graphe pondéré ; construire une matrice de transition ; calculer une distribution après  $n$  étapes ; déterminer les distributions invariantes ; prouver une convergence dans des exemples précis et repérer un comportement périodique.

Les résultats sur les probabilités de transition et les distributions invariantes sont au programme. Le modèle d'Ehrenfest final est un prolongement guidé. Aucune théorie générale des chaînes de Markov n'est supposée.

#### Méthode | Comment travailler cette fiche

Commence par l'idée avant la formule, puis travaille une notion à la fois. Dans le cours, reformule la définition avec tes mots et refais l'exemple sans regarder la dernière ligne. Les pauses te proposent une question, deux indices graduels et une explication ; tu peux chercher avec une aide sans renoncer au raisonnement.

Après le cours, la boîte à outils relie plusieurs notions dans des méthodes commentées. Les exercices passent des bases aux questions d'initiative. Si tu bloques, prends d'abord un indice ; après le corrigé, explique pourquoi la méthode convient et refais une variante. Le problème final construit un approfondissement à partir du cours, puis une dernière activité te permet de faire le point.

## 2 L'idée avant la formule

### 2.1 Une probabilité conditionnelle fixe le point de départ

« 80 pour cent des cyclistes reprennent le vélo » décrit ce qui arrive parmi les personnes à vélo aujourd'hui. Ce n'est pas encore la proportion totale de cyclistes demain. Il faut aussi compter les personnes venant du bus. La formule des probabilités totales additionne ces deux origines.

### 2.2 Construire le calcul sur cent personnes

Suppose 50 cyclistes et 50 usagers du bus. Si 80 pour cent des premiers restent à vélo et 30 pour cent des seconds y reviennent, l'effectif attendu à vélo demain est  $50 \times 0,8 + 50 \times 0,3 = 55$ . Diviser par 100 donne la probabilité 0,55. Une colonne de la matrice réunira ces contributions vers le même état d'arrivée.

## 2.3 Un équilibre possible n'est pas une convergence prouvée

Une distribution invariante se reproduit après une transition. Mais une population partie ailleurs peut osciller : si deux états s'échangent à chaque étape,  $(1/2, 1/2)$  reste fixe tandis que  $(1, 0)$  alterne avec  $(0, 1)$ . Nous séparerons donc la recherche d'un invariant et la preuve d'une limite.

### Méthode | Avant le premier produit

Nomme les états, fixe leur ordre et vérifie les hypothèses de mémoire et d'homogénéité. Puis contrôle chaque ligne : probabilités positives ou nulles, somme 1. Nous utiliserons des distributions en ligne ; la matrice sera multipliée à droite.

## 3 Le cours formel

### 3.1 États, propriété de Markov et homogénéité

#### Définition | Un modèle à mémoire courte

On note  $X_n$  l'état au temps  $n$ , parmi un ensemble fini d'états. La propriété de Markov signifie que, lorsque l'état actuel est connu, la loi du prochain état ne dépend pas du passé antérieur. Le modèle est homogène lorsque les probabilités de transition ne dépendent pas de  $n$ .

Pour une histoire de probabilité non nulle se terminant en  $i$ , le modèle impose  $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, \dots, X_0 = i_0) = p_{ij}$ . Les nombres  $p_{ij}$  définissent aussi la loi de l'étape suivante si l'on décide de démarrer en  $i$ , même lorsque la distribution initiale étudiée ne donne pas de masse à cet état.

#### Exemple | Deux modes de déplacement

Fixons les états :  $V$  signifie « vélo aujourd'hui » et  $B$  « bus aujourd'hui ». Depuis  $V$ , rester à vélo a probabilité 0,8 ; le seul autre choix a donc probabilité  $1 - 0,8 = 0,2$ . Depuis  $B$ , revenir au vélo a probabilité 0,3 ; rester au bus a probabilité  $1 - 0,3 = 0,7$ .

Ce sont quatre probabilités *conditionnelles* : le départ est connu. La probabilité 0,8 ne signifie donc pas que 80 % de toute la population utilise le vélo demain. Il faut encore connaître combien de personnes partent de chaque état.

On suppose que ces règles dépendent uniquement du mode actuel, et qu'elles sont identiques chaque jour. La première hypothèse donne la propriété de Markov ; la seconde donne l'homogénéité. Si, même à mode actuel identique, les choix dépendent encore du mode d'avant-hier, notre état ne contient pas assez d'information.

#### Attention | Dépendance et mémoire

La propriété de Markov n'affirme pas que les états successifs sont indépendants. Au contraire, connaître l'état présent modifie en général les probabilités du suivant. Elle dit quelle information du passé est utilisée par le modèle.

### À toi d'essayer : Identifier une hypothèse de modèle

Un client choisit demain en fonction de ses deux derniers achats. Le seul dernier achat suffit-il toujours à définir un modèle de Markov ?

**Pour démarrer.** Compare deux historiques qui ont le même dernier achat, mais pas le même avant-dernier.

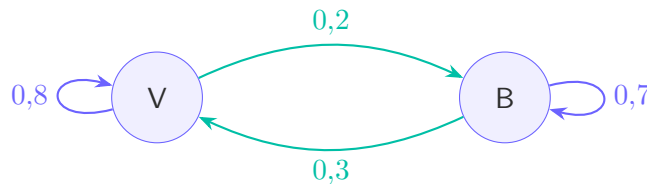
Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 28 Explication, p. 31

## 3.2 Graphe pondéré et matrice de transition

### 📖 Définition | Convention des lignes

Après avoir fixé l'ordre des états, la matrice  $P$  a pour coefficient  $p_{ij}$  la probabilité de passer de  $i$  à  $j$  en une étape. Chaque coefficient est positif ou nul et chaque ligne a pour somme 1 :  $P$  est une matrice stochastique par lignes.



Dans l'ordre  $V, B$ ,

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

La boucle  $V$  vers  $V$  vaut 0,8 ; l'arc  $B$  vers  $V$  se lit à la deuxième ligne, première colonne. Pour chaque sommet, les probabilités des arcs sortants totalisent 1. Un arc de probabilité nulle peut être omis du dessin.

### 🔧 Méthode | Passer du texte à la matrice

Écrivons d'abord l'ordre  $V, B$  au-dessus des colonnes et à gauche des lignes. Une ligne fixe le départ ; une colonne fixe l'arrivée. La ligne  $V$  est donc  $(0,8, 0,2)$  ; la ligne  $B$  est  $(0,3, 0,7)$ .

Pour contrôler, lis chaque case sous forme de phrase : « ligne  $B$ , colonne  $V$  : sachant que je prends le bus, probabilité de prendre le vélo au prochain pas ». Puis vérifie  $0,8 + 0,2 = 1$  et  $0,3 + 0,7 = 1$ , ainsi que la positivité de chaque case. Les colonnes n'ont pas à sommer à 1 : elles regroupent des départs conditionnels différents.

### À toi d'essayer : Compléter une ligne en gardant son sens

Depuis A, on reste dans A avec probabilité 0,6 et on va vers B avec probabilité 0,1. Quelle probabilité vers C ? Que représente la somme de la colonne A ?

**Pour démarrer.** Écris une égalité pour la somme des trois arrivées depuis le même départ A.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 28 Explication, p. 31

## 3.3 Distribution initiale et une transition

### 📖 Définition | Distribution en ligne

La distribution de  $X_n$  est la matrice ligne  $\pi_n = (P(X_n = S_1), \dots, P(X_n = S_r))$ , avec  $r=2$  ou  $3$ . Ses coefficients sont positifs ou nuls et leur somme vaut 1. La distribution initiale  $\pi_0$  est une donnée distincte de  $P$ .

### ★ Théorème | Évolution d'une distribution

Pour une chaîne homogène de matrice  $P$ ,  $\pi_{n+1} = \pi_n P$  et donc  $\pi_n = \pi_0 P^n$ .

#### ✍ Démonstration | Probabilités totales

**L'idée : classer les arrivées par leur origine.** Pour être dans l'état  $j$  demain, on doit être aujourd'hui dans l'un des états  $1, \dots, r$ . Ces possibilités sont incompatibles : on ne peut pas être dans deux états à la fois au même instant. Elles couvrent tous les cas, donc leurs probabilités s'additionnent. Pour une origine  $i$  de probabilité non nulle, la règle du produit des probabilités conditionnelles donne

$$P(X_n = i \text{ et } X_{n+1} = j) = P(X_n = i)P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(X_n = i)p_{ij}.$$

Le premier facteur est la probabilité d'être au départ  $i$  ; le second, la probabilité du déplacement vers  $j$  une fois ce départ connu. Si  $P(X_n = i) = 0$ , ce chemin apporte zéro, sans qu'il soit nécessaire de conditionner par un événement impossible.

En additionnant toutes les origines,  $P(X_{n+1} = j) = \sum_{i=1}^r P(X_n = i)p_{ij}$ . C'est exactement le produit de la ligne  $\pi_n$  par la colonne  $j$  de  $P$ . L'égalité vaut pour chaque arrivée  $j$ , donc  $\pi_{n+1} = \pi_n P$ .

**Passer d'une étape à  $n$  étapes.** Au rang 0,  $\pi_0 P^0 = \pi_0 I = \pi_0$ . Supposons  $\pi_n = \pi_0 P^n$ . Alors  $\pi_{n+1} = \pi_n P = (\pi_0 P^n)P = \pi_0 P^{n+1}$ , par associativité. L'initialisation et cette transmission prouvent  $\pi_n = \pi_0 P^n$  pour tout entier  $n \geq 0$ .

### 💡 Exemple | Une population initiale

La ligne  $\pi_0 = (0,6, 0,4)$  signifie que le départ est à vélo avec probabilité 0,6, en bus avec probabilité 0,4.

Pour arriver à vélo, les deux chemins sont  $V \rightarrow V$ , de probabilité  $0,6 \times 0,8 = 0,48$ , et  $B \rightarrow V$ , de probabilité  $0,4 \times 0,3 = 0,12$ . Leur somme vaut 0,60. Pour arriver au bus, les chemins donnent  $0,6 \times 0,2 = 0,12$  et  $0,4 \times 0,7 = 0,28$ , soit 0,40.

Ainsi  $\pi_1 = (0,6, 0,4) = \pi_0$ . Les probabilités sont conservées, même si chaque individu peut changer de mode. Depuis un départ certain à vélo,  $\pi_0 = (1, 0)$  donne au contraire  $(1 \times 0,8 + 0 \times 0,3, 1 \times 0,2 + 0 \times 0,7) = (0,8, 0,2)$ . La distribution initiale et la matrice décrivent donc deux informations distinctes.

### ⚠ Attention | Lignes et colonnes

Nous écrivons les distributions en ligne et multiplions à droite par  $P$ . Avec une convention en colonnes, il faudrait transposer la matrice :  $\pi_{n+1}^T = P^T \pi_n^T$ . Mélanger les conventions donne souvent des coefficients dont la somme n'est plus 1.

### À toi d'essayer : Deux étapes depuis V

En partant de V avec certitude, calcule la probabilité d'être dans V après deux transitions.

**Pour démarrer.** Dessine les deux états possibles après le premier pas ; chaque branche doit ensuite revenir vers V.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 28 Explication, p. 31

### À toi d'essayer : Deux origines pour une même arrivée

Pour  $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$  et  $\pi_0 = (0,2 ; 0,8)$ , calcule la probabilité d'être dans le premier état après une étape.

**Pour démarrer.** Écris séparément « partir de 1 et rester en 1 » et « partir de 2 et aller en 1 ».

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 28 Explication, p. 31

## 3.4 Interpréter les puissances de transition

### ★ Théorème | Transition en plusieurs étapes

Le coefficient  $(P^n)_{ij}$  est la probabilité d'être en  $j$  après  $n$  transitions lorsque l'on démarre en  $i$ . Chaque ligne de  $P^n$  est donc une distribution.

#### Démonstration | Une récurrence sur les trajectoires

**Ce que désigne une case.** Fixons un départ certain  $i$ . Nous cherchons la probabilité d'une arrivée en  $j$  après exactement  $n$  déplacements, quels que soient les états intermédiaires.

**Rang 0.** Sans déplacement, on est encore en  $i$  avec probabilité 1 et dans tout autre état avec probabilité 0. Ces nombres forment la ligne  $i$  de  $I = P^0$ .

**Hypothèse.** Supposons qu'après  $n$  transitions, la probabilité d'être dans chaque état  $k$ , depuis  $i$ , soit  $(P^n)_{ik}$ .

**Dernière transition.** Si l'avant-dernier état est  $k$ , la probabilité de prolonger vers  $j$  est  $p_{kj}$ . La propriété de Markov permet de ne conserver que cet état  $k$  ; l'homogénéité permet d'utiliser le même coefficient à chaque date. Le chemin passant par  $k$  à cet instant a donc pour probabilité  $(P^n)_{ik}p_{kj}$ . Les possibilités  $k$  sont incompatibles et couvrent tous les cas. Leur somme est

$$\sum_{k=1}^r (P^n)_{ik} p_{kj} = (P^n P)_{ij} = (P^{n+1})_{ij}.$$

C'est la propriété au rang suivant : elle est donc démontrée par récurrence. Pour un départ aléatoire de distribution  $\pi_0$ , on pondère ensuite chaque départ  $i$  par  $(\pi_0)_i$ . Cela donne  $\sum_i (\pi_0)_i (P^n)_{ij}$ , la coordonnée  $j$  de  $\pi_0 P^n$ .

### ✓ Propriété | Contrôle algébrique

Le produit de deux matrices stochastiques par lignes reste stochastique. Ses coefficients sont positifs ou nuls et

$$\sum_j (AB)_{ij} = \sum_j \sum_k a_{ik} b_{kj} = \sum_k a_{ik} \left( \sum_j b_{kj} \right) = \sum_k a_{ik} = 1.$$

Dans ce contrôle,  $(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$  est une somme de produits positifs ou nuls, donc reste positif ou nul. Pour la somme d'une ligne, on additionne ensuite sur  $j$ . Les sommes sont finies : on peut les échanger et mettre  $a_{ik}$  en facteur, car il ne dépend pas de  $j$ . La parenthèse vaut 1 puisque c'est la somme de la ligne  $k$  de  $B$ . La somme restante vaut 1 puisque c'est la ligne  $i$  de  $A$ . Les deux conditions sont ainsi vérifiées, et se transmettent à toutes les puissances par récurrence.

La puissance décrit une arrivée après exactement  $n$  transitions. Elle ne donne pas directement la probabilité d'avoir visité  $j$  au moins une fois avant  $n$  : cette autre question nécessite un événement ou un modèle adapté.

### À toi d'essayer : Une case, un départ et une durée

Que signifie  $(P^4)_{23} = 0,18$  dans une chaîne à trois états ? Est-ce une probabilité non conditionnée pour n'importe quel départ ?

**Pour démarrer.** Lis successivement l'exposant 4, l'indice de ligne 2 et l'indice de colonne 3.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 29](#) [Explication, p. 32](#)

## 3.5 Distributions invariantes et limites

### 📖 Définition | Distribution invariante

Une matrice ligne  $\pi$  est une distribution invariante si ses coefficients sont positifs ou nuls, leur somme vaut 1 et  $\pi P = \pi$ . Si  $\pi_0 = \pi$ , toutes les distributions suivantes sont égales à  $\pi$ .

### 🔧 Méthode | Résoudre le système

Pour deux états, écris  $\pi = (x, 1 - x)$  : la somme vaut déjà 1. Avec le modèle vélo/bus, la première coordonnée de  $\pi P = \pi$  impose  $0,8x + 0,3(1 - x) = x$ . Développer donne  $0,5x + 0,3 = x$ , donc  $0,3 = 0,5x$  et  $x = 0,6$ . La seconde coordonnée vaut  $1 - 0,6 = 0,4$ .

Vérifions aussi la seconde équation :  $0,2 \times 0,6 + 0,7 \times 0,4 = 0,12 + 0,28 = 0,4$ . Les deux coefficients sont positifs, de somme 1. L'unique candidat convient donc.

Pour trois états, écris  $(u, v, w)$ , calcule les trois colonnes du produit, puis ajoute  $u + v + w = 1$ . Si deux équations de transition disent la même chose, ce n'est pas une erreur : la normalisation est indispensable pour déterminer l'échelle. Une ligne solution du seul système homogène n'est pas automatiquement une distribution.

Supposons que chaque coordonnée de  $\pi_n$  converge vers la coordonnée correspondante de  $\ell$ . Une limite de nombres positifs ou nuls reste positive ou nulle. La somme comporte seulement deux ou trois termes ; sa limite est donc la somme des limites, égale à 1. Ainsi  $\ell$  est une distribution.

Pour chaque arrivée  $j$ , l'égalité d'évolution s'écrit  $(\pi_{n+1})_j = \sum_i (\pi_n)_i p_{ij}$ . À gauche, décaler le rang de 1 ne change pas la limite, qui vaut  $\ell_j$ . À droite, les  $p_{ij}$  sont constants et la somme est finie ; sa limite vaut  $\sum_i \ell_i p_{ij}$ . Donc  $\ell_j = (\ell P)_j$  pour chaque  $j$ , d'où  $\ell = \ell P$ .

Nous sommes partis de l'hypothèse de convergence : cette preuve donne une propriété de la limite si elle existe. Elle ne démontre pas cette existence. Les exemples périodiques ci-dessous montrent pourquoi l'implication ne peut pas être retournée.

### À toi d'essayer : Normaliser une solution de l'équation

Pour une matrice stochastique, une ligne non nulle  $L$  vérifie  $LP=L$ . Est-elle forcément une distribution ?

**Pour démarrer.** Essaie de multiplier une distribution invariante par 2 et vérifie les deux conditions.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 29 Explication, p. 32

## 3.6 Chaîne à deux états : étude complète

### ★ Théorème | Forme générale

Soit  $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$  avec  $0 \leq a, b \leq 1$ . Écris  $\pi_n = (x_n, 1-x_n)$ . Alors

$$x_{n+1} = (1-a-b)x_n + b.$$

Si  $a+b > 0$ , l'unique distribution invariante est  $\pi_* = (b/(a+b), a/(a+b))$  et

$$x_n = \frac{b}{a+b} + (1-a-b)^n \left( x_0 - \frac{b}{a+b} \right).$$

### Démonstration | Réduire à une suite géométrique

**1. Obtenir la récurrence.** La probabilité d'arriver dans le premier état vaut « départ du premier et maintien » plus « départ du second et retour ». Ainsi

$$x_{n+1} = x_n(1-a) + (1-x_n)b = x_n - ax_n + b - bx_n = (1-a-b)x_n + b.$$

La probabilité de l'autre état est  $1-x_{n+1}$ , car les deux arrivées épuisent les possibilités.

**2. Trouver la valeur qui ne bouge pas.** Posons  $x = (1-a-b)x + b$ . En soustrayant  $(1-a-b)x$ , il vient  $(a+b)x = b$ . Lorsque  $a+b > 0$ , on peut diviser et obtenir l'unique  $x_* = b/(a+b)$ . L'autre coordonnée vaut  $1-b/(a+b) = a/(a+b)$ . Ces deux nombres sont positifs ou nuls et leur somme vaut 1 : ils définissent bien une distribution.

**3. Mesurer l'écart à cette valeur.** Écrivons aussi  $x_* = (1-a-b)x_* + b$ . Soustraire cette égalité de la récurrence annule les deux termes  $b$  :

$$x_{n+1} - x_* = (1-a-b)x_n - (1-a-b)x_* = (1-a-b)(x_n - x_*).$$

Avec  $y_n = x_n - x_*$  et  $q = 1-a-b$ , on a  $y_{n+1} = qy_n$ . Donc  $y_1 = qy_0$ ,  $y_2 = q^2y_0$ . Au rang 0,  $y_0 = q^0y_0$  ; si  $y_n = q^n y_0$ , alors  $y_{n+1} = q^{n+1}y_0$ . La récurrence donne  $y_n = q^n y_0$  à tous les rangs.

**4. Revenir à la probabilité.** Rajoutons  $x_*$  :  $x_n = x_* + q^n(x_0 - x_*)$ . On retrouve la formule annoncée. Si  $q = 0$ , on lit séparément le rang initial  $x_0$  et les rangs  $n \geq 1$ , où  $x_n = x_*$  ; aucune ambiguïté sur  $0^0$  n'est nécessaire.

### ✓ Propriété | Tous les cas limites

Si  $0 < a + b < 2$ , alors  $|1 - a - b| < 1$  et  $\pi_n \rightarrow \pi_*$  quelle que soit  $\pi_0$ . Si  $a + b = 0$ , alors  $a=b=0$  et  $P=I$  : toute distribution est invariante. Si  $a + b = 2$ , alors  $a=b=1$  : les deux états alternent ; la suite converge uniquement lorsque  $x_0 = 1/2$ , auquel cas elle est constante.

### 💡 Exemple | Retour au vélo et au bus

Les probabilités de changer d'état sont  $a = 0,2$  et  $b = 0,3$ . Leur somme vaut  $0,5$ , donc  $x_* = 0,3/0,5 = 0,6$  et  $q = 1 - 0,2 - 0,3 = 0,5$ . Depuis  $V$  avec certitude,  $x_0 = 1$  et l'écart initial est  $1 - 0,6 = 0,4$ . Ainsi  $x_n = 0,6 + 0,4(0,5)^n$ .

Le facteur géométrique tend vers zéro, donc la limite est  $0,6$ . Pour rendre l'écart au plus égal à  $0,01$ , on résout  $0,4/2^n \leq 0,01$ . Multiplier par  $2^n > 0$ , puis diviser par  $0,01 > 0$ , donne  $2^n \geq 40$ . Comme  $2^5 = 32 < 40$  et  $2^6 = 64 \geq 40$ , le premier rang est  $6$ . L'écart y vaut  $0,4/64 = 0,00625$  ; au rang  $5$ , il vaut  $0,0125$ , encore trop grand. Les puissances  $2^n$  augmentent, donc tous les rangs suivants conviennent.

Justifions les cas limites annoncés. Si  $0 < a + b < 2$ , soustraire à  $1$  donne  $-1 < 1 - a - b < 1$ . Les puissances de ce nombre tendent vers zéro, donc l'écart explicite tend vers zéro. Si  $a + b = 0$ , la positivité impose  $a = b = 0$  :  $P = I$  et  $\pi_n = \pi_0$  pour tout  $n$ . Si  $a + b = 2$ , les bornes  $a \leq 1$ ,  $b \leq 1$  imposent  $a = b = 1$  :  $x_{n+1} = 1 - x_n$ , donc  $x_{2k} = x_0$  et  $x_{2k+1} = 1 - x_0$ . Ces deux valeurs sont égales seulement si  $x_0 = 1/2$ . Sinon deux sous-suites constantes ont des limites différentes, ce qui interdit une limite commune.

Si le coefficient  $1 - a - b$  est négatif, l'écart change de signe : on approche l'équilibre en alternant de part et d'autre. S'il est positif, on s'en approche du même côté. Si la distribution initiale est déjà invariante, l'écart est nul dès le départ.

### À toi d'essayer : Une limite trompeuse

Pour  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , trouve la distribution invariante et étudie le départ  $(1, 0)$ .

**Pour démarrer.** Multiplie une ligne  $(x, 1 - x)$  par la matrice, puis recommence avec  $(1, 0)$ .

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 29](#) [Explication, p. 32](#)

### À toi d'essayer : Relier le signe de la raison au comportement

Dans la formule du cours, prends  $a=0,8$  et  $b=0,5$ . Trouve le point fixe et décris les écarts successifs. **Pour démarrer.** Calcule séparément la valeur fixe et le nombre qui multiplie l'écart.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 29 Explication, p. 32

## 3.7 Trois états : calcul, normalisation et exemple convergent

### 💡 Exemple | Une transition et une distribution invariante

Prenons  $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ . Les lignes totalisent  $1/2 + 1/2 = 1$ ,  $1/4 + 1/2 + 1/4 = 1$  et

$1/2 + 1/2 = 1$ , avec des coefficients positifs ou nuls.

Depuis  $(1, 0, 0)$ , la première étape sélectionne la première ligne :  $(1/2, 1/2, 0)$ . La deuxième donne  $u_2 = (1/2)(1/2) + (1/2)(1/4) = 1/4 + 1/8 = 3/8$ ,  $v_2 = (1/2)(1/2) + (1/2)(1/2) = 1/2$  et  $w_2 = (1/2)0 + (1/2)(1/4) = 1/8$ . La somme vaut bien 1.

Pour l'invariance, les trois équations sont  $u = u/2 + v/4$ ,  $v = u/2 + v/2 + w/2$ ,  $w = v/4 + w/2$ . La première donne  $u/2 = v/4$ , donc  $u = v/2$ . La troisième donne de même  $w = v/2$ . La normalisation devient  $v/2 + v + v/2 = 1$ , donc  $2v = 1$  et  $v = 1/2$ ; d'où  $u = w = 1/4$ .

La deuxième équation est bien satisfaite :  $1/8 + 1/4 + 1/8 = 1/2$ . Les première et troisième le sont par construction, et les trois nombres sont positifs de somme 1. Il existe donc une distribution invariante,  $(1/4, 1/2, 1/4)$ ; la résolution montre qu'aucune autre n'est possible.

Pour étudier les distributions successives, le produit par  $P$  donne  $u_{n+1} = u_n/2 + v_n/4$ ,  $v_{n+1} = (u_n + v_n + w_n)/2 = 1/2$  et  $w_{n+1} = v_n/4 + w_n/2$ . Le total  $u_n + v_n + w_n$  vaut 1 à chaque rang.

Posons  $s_n = u_n + w_n$ . En additionnant les première et troisième formules,  $s_{n+1} = (u_n + w_n)/2 + v_n/2 = 1/2$ . Posons  $d_n = u_n - w_n$ . En les soustrayant, les deux termes  $v_n/4$  s'annulent :  $d_{n+1} = (u_n - w_n)/2 = d_n/2$ . La suite  $d$  est géométrique de raison  $1/2$ , donc  $d_n = (u_0 - w_0)/2^n$ .

Pour  $n \geq 1$ , on connaît  $s_n = 1/2$  et  $d_n$ . Leur somme vaut  $2u_n$ , leur différence vaut  $2w_n$ . En divisant par deux,

$$u_n = \frac{1}{4} + \frac{u_0 - w_0}{2^{n+1}}, \quad v_n = \frac{1}{2}, \quad w_n = \frac{1}{4} - \frac{u_0 - w_0}{2^{n+1}}.$$

La restriction  $n \geq 1$  est essentielle :  $v_0$  n'est pas forcément  $1/2$ . Comme  $u_0 - w_0$  est fixé et  $2^{-(n+1)} \rightarrow 0$ , les trois coordonnées convergent vers  $(1/4, 1/2, 1/4)$ . C'est cette étude de l'écart qui prouve la convergence pour toute distribution initiale.

### 💡 Exemple | Une autre puissance d'ordre 3

La matrice  $E$  a tous ses coefficients égaux à  $1/3$ . Dans son carré, chaque coefficient vaut  $(1/3)(1/3) + (1/3)(1/3) + (1/3)(1/3) = 3/9 = 1/3$ . Donc  $E^2 = E$ .

Posons  $H = I - E$ . Alors  $EH = E - E^2 = 0$ ,  $HE = E - E^2 = 0$ , et  $H^2 = I - 2E + E^2 = I - E = H$ . La matrice  $Q = \lambda I + (1 - \lambda)E$  s'écrit  $E + \lambda H$ .

Au rang 0,  $E + H = I = Q^0$ . Si  $Q^n = E + \lambda^n H$ , multiplier par  $Q$  donne  $E^2 + \lambda EH + \lambda^n HE + \lambda^{n+1} H^2 = E + \lambda^{n+1} H$ . La formule est donc prouvée par récurrence. Pour  $\lambda = 0$ , on écrit séparément  $Q^0 = I$  et  $Q^n = E$  pour  $n \geq 1$ .

Pour une distribution  $\pi_0 = (u, v, w)$ , chaque coordonnée de  $\pi_0 E$  est  $(u + v + w)/3 = 1/3$ . Donc, avec  $e = (1/3, 1/3, 1/3)$ ,  $\pi_0 Q^n = e + \lambda^n (\pi_0 - e)$ . Si  $0 < \lambda < 1$ , la puissance tend vers zéro, donc

la limite est  $e$ . Si  $\lambda = 0$ , on atteint déjà  $e$  après une étape. Cette formule démontre la convergence au lieu de la déduire du seul calcul de l'invariant.

### ⚠ Attention | Trois états ne garantissent aucun comportement universel

La matrice du cycle déterministe A vers B vers C vers A possède la distribution uniforme invariante, mais un départ certain tourne indéfiniment. La matrice identité possède une infinité de distributions invariantes. Il faut étudier les coefficients du modèle concret.

### À toi d'essayer : Une invariant unique ne suffit toujours pas

Dans un cycle déterministe à trois états, explique pourquoi la distribution uniforme est invariante et pourquoi un départ certain ne converge pas.

**Pour démarrer.** Écris trois étapes depuis  $(1, 0, 0)$  et compare avec le départ uniforme.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 30](#) [Explication, p. 32](#)

## 3.8 Simulation et calcul exact : deux usages distincts

Le produit  $\pi_0 P^n$  calcule une distribution théorique. Une simulation produit une trajectoire particulière. Les fréquences observées fluctuent ; elles ne sont pas une preuve de convergence générale.

```

1 def transition_distribution(pi, P):
2     r = len(pi)
3     return [sum(pi[i]*P[i][j] for i in range(r))
4             for j in range(r)]
5
6 from random import random
7
8 def etape(etat, P):
9     u = random()
10    cumul = 0.0
11    for j, proba in enumerate(P[etat]):
12        cumul += proba
13        if u < cumul:
14            return j
15    return len(P[etat]) - 1

```

Dans la première fonction,  $j$  désigne l'état d'arrivée. La somme parcourt chaque départ  $i$ , multiplie son poids initial  $\pi[i]$  par sa transition  $P[i][j]$ , puis additionne ces contributions. La liste finale contient une valeur par arrivée : c'est le produit  $\pi P$ .

La seconde fonction simule un état, pas une distribution. Le nombre  $u$  est tiré uniformément dans  $[0, 1[$ . Pour une ligne  $(0,2,0,3,0,5)$ , les cumuls deviennent 0,2, puis 0,5, puis 1. Si  $u < 0,2$ , on renvoie l'état 0 ; si  $0,2 \leq u < 0,5$ , l'état 1 ; sinon l'état 2. Les longueurs de ces intervalles sont précisément 0,2, 0,3, 0,5, donc les probabilités demandées. La boucle effectue automatiquement cette partition pour la ligne de l'état actuel.

Ces fonctions supposent une matrice de transition valide et des indices cohérents. La seconde partage l'intervalle  $[0, 1[$  selon les probabilités de la ligne de départ ; la dernière ligne protège contre un léger écart d'arrondi dans la somme. Avant une simulation, vérifie les coefficients et les sommes de lignes.

## 4 Boîte à outils — modéliser et interpréter

### 4.1 Ce que décrit une distribution de population

#### Exemple | Relier probabilités et effectifs attendus

La proportion initiale de vélos est  $x_0 = 0,9$ . Dans la formule du modèle, l'écart initial vaut  $0,9 - 0,6 = 0,3$ . Ainsi  $x_n = 0,6 + 0,3(0,5)^n$  et  $x_2 = 0,6 + 0,3 \times 0,25 = 0,675$ .

Pour 1 000 personnes, notons  $I_k$  le nombre qui vaut 1 si la personne  $k$  utilise un vélo, 0 sinon. Le nombre total de vélos est  $N = I_1 + \dots + I_{1000}$ . L'espérance d'un indicateur vaut sa probabilité :  $E(I_k) = 1P(I_k = 1) + 0P(I_k = 0) = P(I_k = 1)$ . L'addition des espérances donne donc  $E(N) = 1000 \times 0,675 = 675$ , lorsque la proportion moyenne du modèle vaut 0,675.

Cette valeur est une moyenne théorique, pas une promesse sur chaque observation. Additionner les espérances ne nécessite pas l'indépendance des personnes. Une loi binomiale pour l'effectif demanderait, elle, des hypothèses supplémentaires ; nous n'en avons pas besoin ici.

### 4.2 Changer l'ordre des états sans changer le modèle

Pour la même chaîne, la convention V,B donne  $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$ . La convention B,V donne  $Q = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$ . Il faut échanger à la fois les lignes, les colonnes et les coordonnées de la distribution initiale.

Par exemple,  $(0,9 ; 0,1)$  dans l'ordre V,B devient  $(0,1 ; 0,9)$  dans l'ordre B,V. Après une étape, les deux descriptions donnent respectivement  $(0,75 ; 0,25)$  et  $(0,25 ; 0,75)$ . Les nombres sont les mêmes, affectés aux états dans un autre ordre. Échanger seulement les lignes produirait un modèle différent.

### 4.3 Temps d'attente avant une première sortie

#### Exemple | Rester plusieurs jours dans le même état

Depuis V, rester à vélo pendant les  $n$  transitions signifie suivre uniquement le chemin  $V, V, \dots, V$ . La probabilité de chaque maintien, sachant les maintiens précédents, vaut 0,8 par la propriété de Markov. La règle du produit donne  $n$  facteurs, soit  $0,8^n$ . Pour  $n = 0$ , il n'y a aucune contrainte future : la probabilité vaut 1.

Une première sortie exactement à la transition  $k \geq 1$  impose  $k - 1$  maintiens, puis un passage vers B : sa probabilité est  $0,8^{k-1} \times 0,2$ . Par exemple, au troisième pas, le chemin est  $V, V, V, B$  et la probabilité  $0,8 \times 0,8 \times 0,2 = 0,128$ .

« Au moins une sortie avant ou au temps  $n$  » est le contraire de « aucun passage par B pendant ces  $n$  pas ». Sa probabilité est donc  $1 - 0,8^n$ . En revanche,  $x_n = 0,6 + 0,4(0,5)^n$  mesure seulement la présence à vélo au dernier instant : elle autorise une sortie suivie d'un retour. Il faut lire la question avant de choisir la formule.

### 4.4 Tester la plausibilité d'un modèle homogène

Un modèle avec les mêmes probabilités chaque jour peut être cohérent pour une période donnée. Si les transitions diffèrent systématiquement entre semaine et week-end, il faut soit utiliser des matrices dépendant du jour, soit élargir la description des états. Dans le premier cas, la distribution après deux étapes s'écrit  $\pi_0 P_0 P_1$ , et pas nécessairement  $\pi_0 P^2$ . L'hypothèse d'homogénéité explique précisément quand une seule puissance suffit.

**À toi d'essayer : Lire une autre convention**

Dans l'ordre B,V, quelle est la distribution invariante du modèle vélo/bus ?

**Pour démarrer.** Associe d'abord chaque probabilité au nom de son état, puis écris-les dans le nouvel ordre.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 30](#) [Explication, p. 33](#)

**À toi d'essayer : Une première sortie**

Depuis V, calcule la probabilité de prendre le bus pour la première fois à la troisième transition.

**Pour démarrer.** Écris les états aux temps 0, 1, 2 et 3 en interdisant toute sortie avant le dernier.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 30](#) [Explication, p. 33](#)

## 5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases, 6 à 10 relient les notions et 11 à 15 demandent davantage d'initiative. Cherche d'abord, puis utilise un indice si tu en as besoin.

### Exercice 1 — Matrice valide

Les matrices  $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1,2 & -0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$  sont-elles des matrices de transition ?

### Exercice 2 — Du texte au tableau

Un client fidèle le reste avec probabilité 0,9. Un client occasionnel devient fidèle avec probabilité 0,4. Écris P dans l'ordre F,O.

### Exercice 3 — Une transition

Avec la matrice de l'exercice 2 et  $\pi_0 = (0,5; 0,5)$ , calcule  $\pi_1$ .

### Exercice 4 — Départ certain

Avec P de l'exercice 2, donne la distribution après une étape depuis O avec certitude.

### Exercice 5 — Compléter trois transitions

Une ligne de transition vers A,B,C vaut  $(0,2; p; 0,5)$ . Détermine p et vérifie les conditions.

### Exercice 6 — Deux étapes

Pour  $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$ , calcule  $P^2$  et interprète son coefficient (1,2).

### Exercice 7 — Distribution invariante

Trouve la distribution invariante de la matrice de l'exercice 2.

### Exercice 8 — Formule explicite

Pour P de l'exercice 2 et un départ certain dans O, exprime la probabilité  $x_n$  d'être fidèle au temps n.

### Exercice 9 — Un seuil de proximité

Dans l'exercice 8, à partir de quel n a-t-on  $|x_n - 0,8| \leq 0,025$  ?

### Exercice 10 — Alternance autour de l'équilibre

Pour  $P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$  et  $x_0 = 1$ , exprime  $x_n$  et décris son comportement.

### Exercice 11 — État absorbant

Étudie  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$  depuis le second état. Donne la limite.

**Exercice 12 — Invariant sans convergence** ★★ ★

Pour  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , trouve la distribution invariante et étudie le départ  $(1, 0, 0)$ .

**Exercice 13 — Trois états symétriques** ★★ ★

Pour  $Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$  et  $\pi_0 = (1, 0, 0)$ , calcule  $\pi_n$  à l'aide de E, dont tous les coefficients valent  $1/3$ .

**Exercice 14 — Arrivée ou visite** ★★ ★

Pour P de l'exercice 6 en partant de l'état 1, compare la probabilité d'être en 2 après deux étapes à celle d'avoir visité 2 au moins une fois pendant ces deux étapes.

**Exercice 15 — Une limite doit être invariante** ★★ ★

Suppose qu'une suite  $\pi_n = \pi_0 P^n$  converge vers une ligne L. Prouve que L est une distribution invariante. Explique ce que cette preuve ne garantit pas.

## 6 Problème — Pour aller plus loin

Ce prolongement est accessible à partir du cours : les résultats supplémentaires sont guidés, et leur mémorisation n'est pas un préalable. Tu peux répartir la recherche sur plusieurs séances.

### Deux particules et un équilibre qui peut osciller

Deux particules sont réparties entre une boîte gauche et une boîte droite. À chaque étape, on choisit l'une des deux particules au hasard, de manière équiprobable, et on la change de boîte. L'état est le nombre de particules dans la boîte gauche, parmi 0,1,2. Durée indicative : 90 minutes.

#### Partie I — Construire le modèle

1. Décris les transitions depuis chacun des trois états. Écris la matrice  $P$  dans l'ordre 0,1,2 et le graphe pondéré.
2. Calcule  $P^2$  et la distribution après deux étapes depuis l'état 0.
3. Trouve l'unique distribution invariante.

#### Partie II — Comprendre la périodicité

1. En partant de l'état 0, donne les distributions aux temps impairs puis aux temps pairs strictement positifs.
2. La distribution converge-t-elle ? Pourquoi cela ne contredit-il pas l'existence d'un invariant ?

#### Partie III — Introduire une pause aléatoire

Désormais, à chaque étape, on ne fait rien avec probabilité  $1/2$  ; sinon on effectue le déplacement précédent. La matrice devient  $Q = (I + P)/2$ .

1. Écris  $Q$ . Vérifie que la distribution invariante précédente l'est encore pour  $Q$ .
2. Si  $\pi_n = (u_n, v_n, w_n)$ , pose  $s_n = u_n + w_n$  et  $d_n = u_n - w_n$ . Montre  $s_{n+1} = 1/2$  et  $d_{n+1} = d_n/2$ .
3. Dédus les trois coordonnées pour  $n \geq 1$ , puis leur limite pour toute distribution initiale.
4. Depuis l'état 0, à partir de quel rang chacune des trois coordonnées diffère-t-elle de celle de l'invariant d'au plus  $1/64$  ?

#### Pistes

Depuis l'état 1, les deux particules ne se trouvent pas dans la même boîte. La parité du nombre à gauche change à chaque déplacement. Pour  $Q$ , la pause permet aussi de conserver la parité.

## 7 Indices des exercices

### Exercice 1

Deux conditions sont nécessaires.

La somme 1 ne suffit pas sans positivité.

### Exercice 2

Les lignes sont les états de départ.

Complète chaque ligne.

### Exercice 3

Multiplie la ligne initiale par  $P$ .

Additionne les deux origines possibles pour chaque arrivée.

### Exercice 4

Un départ certain se code par un 1 et des 0.

Le produit sélectionne la ligne de départ.

### Exercice 5

Les arrivées forment tous les cas possibles.

Vérifie que le résultat n'est pas négatif.

### Exercice 6

Deux chemins contribuent à chaque coefficient.

Ce n'est pas la probabilité d'avoir visité l'état 2 au moins une fois.

### Exercice 7

Utilise la somme 1 pour réduire à une inconnue.

Résous l'équation fixe de la première coordonnée.

### Exercice 8

Soustrais 0,8.

La différence devient une suite géométrique.

### Exercice 9

Écris l'écart exact.

Vérifie le rang proposé et le rang précédent.

### Exercice 10

Le multiplicateur est  $1-a-b$ .

Le signe et le module de la raison jouent des rôles différents.

**Exercice 11**

Observe la première ligne.

La probabilité de rester dans le second état se multiplie par 0,8.

**Exercice 12**

La matrice réalise un cycle de longueur trois.

Compare les sous-suites selon le reste de  $n$  modulo trois.

**Exercice 13**

Vérifie le coefficient de  $I$  dans  $Q$ .

Utilise  $\pi_0 E = (1/3, 1/3, 1/3)$ .

**Exercice 14**

Pour une visite, pense au complément.

Le parcours 1,2,1 est compté dans un événement mais pas dans l'autre.

**Exercice 15**

Passe à la limite coordonnée par coordonnée.

Une implication ne peut pas être retournée sans preuve.

## 8 Corrigés détaillés

### Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Deux contrôles sont nécessaires : chaque coefficient doit être positif ou nul, et chaque ligne doit sommer à 1. Pour la première matrice,  $0,7 + 0,3 = 1$  et  $0,2 + 0,8 = 1$  ; les quatre coefficients sont positifs. Elle est donc valide.

Pour la seconde, les sommes valent bien  $1,2 - 0,2 = 1$  et  $0,4 + 0,6 = 1$ . Mais  $-0,2$  est négatif : une probabilité ne peut pas l'être. De plus,  $1,2$  dépasse 1. La seconde matrice n'est donc pas valide. Vérifier les seules sommes aurait laissé passer cette erreur.

### Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Fixons l'ordre  $F, O$  à la fois pour les lignes et pour les colonnes. La première ligne décrit un client actuellement fidèle. Il reste fidèle avec probabilité  $0,9$  et devient occasionnel avec probabilité  $1 - 0,9 = 0,1$ .

La seconde ligne décrit un client actuellement occasionnel. Il devient fidèle avec probabilité  $0,4$  et reste occasionnel avec probabilité  $1 - 0,4 = 0,6$ . Ainsi  $P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ . Les deux sommes valent 1 ; la case  $(2, 1)$  relit bien « de  $O$  vers  $F$  avec probabilité  $0,4$  ».

### Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Pour arriver en  $F$ , on peut être déjà fidèle et le rester, ou être occasionnel et devenir fidèle. Les probabilités de ces deux chemins sont  $0,5 \times 0,9 = 0,45$  et  $0,5 \times 0,4 = 0,20$ . Ils ont des origines distinctes, donc leurs probabilités s'additionnent :  $0,65$ .

Pour arriver en  $O$ , on calcule  $0,5 \times 0,1 + 0,5 \times 0,6 = 0,05 + 0,30 = 0,35$ . Ainsi  $\pi_1 = (0,65 ; 0,35)$ . Le contrôle  $0,65 + 0,35 = 1$  confirme qu'aucune masse n'a été perdue. Prendre directement  $0,9$  aurait supposé un départ certain en  $F$ , qui n'est pas celui de l'énoncé.

### Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

« Depuis  $O$  avec certitude » signifie  $P(X_0 = F) = 0$  et  $P(X_0 = O) = 1$ , donc  $\pi_0 = (0, 1)$ . Le produit donne comme première coordonnée  $0 \times 0,9 + 1 \times 0,4 = 0,4$  et comme seconde  $0 \times 0,1 + 1 \times 0,6 = 0,6$ . Ainsi  $\pi_1 = (0,4 ; 0,6)$ , la seconde ligne de  $P$ . Le facteur 0 efface les chemins partant de  $F$  ; le facteur 1 conserve les transitions partant de  $O$ . Cela explique pourquoi un départ certain sélectionne une ligne.

## Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

Les états  $A, B, C$  couvrent toutes les arrivées et s'excluent deux à deux. Leurs probabilités doivent donc sommer à 1 :  $0,2 + p + 0,5 = 1$ . Regrouper les termes connus donne  $p + 0,7 = 1$  ; soustraire 0,7 donne  $p = 0,3$ .

Les trois coefficients 0,2, 0,3, 0,5 sont positifs et leur somme vaut 1. La ligne est donc valide. Si la valeur obtenue avait été négative, les données n'auraient pas pu décrire une ligne de transition.

## Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

Chaque case de  $P^2$  additionne les deux états intermédiaires possibles. On obtient

$$(P^2)_{11} = 0,8 \times 0,8 + 0,2 \times 0,3 = 0,64 + 0,06 = 0,70,$$

$$(P^2)_{12} = 0,8 \times 0,2 + 0,2 \times 0,7 = 0,16 + 0,14 = 0,30,$$

$$(P^2)_{21} = 0,3 \times 0,8 + 0,7 \times 0,3 = 0,24 + 0,21 = 0,45,$$

$$(P^2)_{22} = 0,3 \times 0,2 + 0,7 \times 0,7 = 0,06 + 0,49 = 0,55.$$

Donc  $P^2 = \begin{pmatrix} 0,70 & 0,30 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$ , dont les lignes totalisent bien 1. La case (1, 2) décrit une arrivée en 2 après exactement deux pas depuis 1. Les chemins sont 1, 1, 2 et 1, 2, 2. Le chemin 1, 2, 1 visite 2 mais n'y termine pas : il n'est pas compté ici.

## Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

Écrivons  $\pi = (x, 1 - x)$  afin de respecter la somme 1. L'invariance de la première coordonnée impose  $x = 0,9x + 0,4(1 - x)$ . En développant,  $x = 0,5x + 0,4$ , donc  $0,5x = 0,4$  et  $x = 0,8$ . L'autre coordonnée est  $1 - 0,8 = 0,2$ .

Contrôlons le produit complet : la première coordonnée vaut  $0,8 \times 0,9 + 0,2 \times 0,4 = 0,72 + 0,08 = 0,8$  ; la seconde,  $0,8 \times 0,1 + 0,2 \times 0,6 = 0,08 + 0,12 = 0,2$ . La ligne est positive, de somme 1, et conservée. C'est l'unique distribution invariante car l'équation en  $x$  n'a qu'une solution.

## Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

Depuis  $O$ , la probabilité initiale d'être fidèle est  $x_0 = 0$ . Par probabilités totales,  $x_{n+1} = 0,9x_n + 0,4(1 - x_n) = 0,5x_n + 0,4$ . Le point fixe vaut 0,8, car  $0,5 \times 0,8 + 0,4 = 0,8$ .

Posons  $y_n = x_n - 0,8$ . Alors  $y_{n+1} = 0,5x_n + 0,4 - 0,8 = 0,5(x_n - 0,8) = 0,5y_n$ . La suite est géométrique, de premier terme  $y_0 = -0,8$ , donc  $y_n = -0,8(0,5)^n$ . En rajoutant 0,8,  $x_n = 0,8 - 0,8(0,5)^n$ .

Au rang 0, la formule donne 0 ; au rang 1, elle donne 0,4, la bonne transition depuis  $O$ . La puissance tend vers zéro, donc  $x_n \rightarrow 0,8$ . La distribution complète tend vers (0,8 ; 0,2).

**Corrigé 9** *Démonstration / Solution expliquée*

La formule précédente donne  $x_n - 0,8 = -0,8(0,5)^n$ . Sa valeur absolue est  $0,8/2^n$ , puisque la puissance est positive. L'inégalité demandée devient  $0,8/2^n \leq 0,025$ .

Multiplier par  $2^n > 0$  puis diviser par  $0,025 > 0$  conserve le sens :  $2^n \geq 0,8/0,025 = 32$ . Comme  $2^5 = 32$ , le rang 5 convient avec égalité. Au rang 4, l'écart vaut  $0,8/16 = 0,05 > 0,025$ . Les puissances  $2^n$  sont croissantes, donc 5 est le premier rang et tous les rangs suivants conviennent.

**Corrigé 10** *Démonstration / Solution expliquée*

La probabilité de quitter le premier état est  $a = 0,9$  ; celle de revenir depuis le second est  $b = 0,6$ . La récurrence est  $x_{n+1} = 0,1x_n + 0,6(1 - x_n) = -0,5x_n + 0,6$ . Le point fixe satisfait  $1,5x = 0,6$ , donc  $x_* = 0,4$ .

Soustraire 0,4 donne  $x_{n+1} - 0,4 = -0,5(x_n - 0,4)$ . L'écart initial vaut  $1 - 0,4 = 0,6$ , d'où  $x_n = 0,4 + 0,6(-0,5)^n$ . Les premiers termes sont 1, 0,1, 0,55 : au-dessus, au-dessous, puis au-dessus de 0,4.

Aux rangs pairs, la puissance est positive ; aux rangs impairs, négative. Son module vaut  $(0,5)^n \rightarrow 0$ . La suite oscille donc autour de 0,4 en s'en approchant, et converge vers cette valeur.

**Corrigé 11** *Démonstration / Solution expliquée*

La première ligne (1, 0) signifie qu'une fois dans l'état 1, on y reste forcément : cet état est absorbant. Pour être encore en 2 au temps  $n$ , il faut donc n'avoir jamais quitté 2. Chacun des  $n$  maintiens a probabilité conditionnelle 0,8, d'où  $P(X_n = 2) = 0,8^n$  depuis le départ certain en 2.

L'autre probabilité est le complément, donc  $\pi_n = (1 - 0,8^n ; 0,8^n)$ . Au rang 0, on retrouve (0, 1) ; au rang 1, (0,2, 0,8). Comme  $0,8^n \rightarrow 0$ , la limite est (1, 0).

Pour une ligne invariante  $(x, 1-x)$ , la seconde équation donne  $1-x = 0,8(1-x)$ , donc  $0,2(1-x) = 0$  et  $x = 1$ . L'invariant est unique et correspond bien à la limite calculée.

**Corrigé 12** *Démonstration / Solution expliquée*

Le produit ligne-colonne envoie  $(u, v, w)$  sur  $(w, u, v)$ . L'invariance impose donc  $u = w$ ,  $v = u$ ,  $w = v$ , soit trois nombres égaux. Leur somme doit être 1 : chacun vaut  $1/3$ . Cette distribution uniforme est l'unique invariant.

Depuis (1, 0, 0), on obtient (0, 1, 0), puis (0, 0, 1), puis (1, 0, 0) et le cycle recommence. Aux rangs  $3k$ , la première coordonnée vaut 1 ; aux rangs  $3k+1$ , elle vaut 0. Ces deux sous-suites ont des limites différentes, donc la première coordonnée, et ainsi la distribution, ne converge pas. L'invariant décrit un départ qui reste stable ; il ne garantit pas que tous les autres départs s'en approchent.

## Corrigé 13

 Démonstration / Solution expliquée

Dans  $Q = \lambda I + (1 - \lambda)E$ , une case hors diagonale vaut  $(1 - \lambda)/3$ . On impose  $(1 - \lambda)/3 = 1/4$ , donc  $1 - \lambda = 3/4$  et  $\lambda = 1/4$ . Une case diagonale vaut alors  $1/4 + 1/4 = 1/2$ , comme dans l'énoncé. Le cours a démontré, à partir de  $E^2 = E$ , que  $Q^n = E + 4^{-n}(I - E)$ . Le produit  $\pi_0 E$  vaut  $(1/3, 1/3, 1/3)$ , car  $\pi_0 = (1, 0, 0)$  sélectionne la première ligne. La différence  $\pi_0 - \pi_0 E$  vaut  $(2/3, -1/3, -1/3)$ . Ainsi

$$\pi_n = \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3} 4^{-n}, \frac{1}{3} - \frac{1}{3} 4^{-n}, \frac{1}{3} - \frac{1}{3} 4^{-n} \right).$$

Au rang 0, cela donne  $(1, 0, 0)$  ; au rang 1,  $(1/2, 1/4, 1/4)$ . La somme vaut  $1 + (2/3 - 1/3 - 1/3)4^{-n} = 1$ . La puissance tend vers zéro : la limite est donc la distribution uniforme.

## Corrigé 14

 Démonstration / Solution expliquée

L'arrivée en 2 au temps 2 compte les chemins 1, 1, 2 et 1, 2, 2, de probabilités  $0,8 \times 0,2 = 0,16$  et  $0,2 \times 0,7 = 0,14$ . Leur somme est 0,30.

Visiter 2 au moins une fois autorise aussi le chemin 1, 2, 1, qui y passe puis en repart. Pour calculer cet événement, son contraire est plus simple : ne jamais visiter 2 impose 1, 1, 1, de probabilité  $0,8^2 = 0,64$ . La probabilité d'au moins une visite vaut donc  $1 - 0,64 = 0,36$ .

La différence  $0,36 - 0,30 = 0,06$  est précisément la probabilité de 1, 2, 1, égale à  $0,2 \times 0,3$ . Ce contrôle explique concrètement pourquoi les événements ne sont pas identiques.

## Corrigé 15

 Démonstration / Solution expliquée

Notons  $L = (\ell_1, \dots, \ell_r)$ . Chaque  $(\pi_n)_j$  est positif ou nul ; sa limite  $\ell_j$  l'est donc aussi. La somme  $\sum_j (\pi_n)_j = 1$  comporte un nombre fini de termes, donc on peut prendre la limite terme à terme :  $\sum_j \ell_j = 1$ . La ligne  $L$  est bien une distribution.

Pour chaque  $j$ ,  $(\pi_{n+1})_j = \sum_i (\pi_n)_i p_{ij}$ . La limite du membre gauche est  $\ell_j$ , car décaler une suite convergente d'un rang ne change pas sa limite. Dans le membre droit, les  $p_{ij}$  sont constants et la somme est finie : la limite vaut  $\sum_i \ell_i p_{ij}$ . Donc  $\ell_j = (LP)_j$  pour chaque  $j$ , soit  $L = LP$ .

La preuve suppose la convergence au départ : elle ne peut pas servir à la prouver. Le cycle à trois états a un invariant unique mais certains départs ne convergent pas. Avec  $P = I$ , toutes les distributions sont invariantes, donc il n'y a pas unicité. Ces deux exemples distinguent les conclusions qui ont été démontrées de celles qui ne l'ont pas été.

## 9 Corrigé du problème

### Partie I — Traduire chaque déplacement

1. L'état compte les particules à gauche. Depuis 0, les deux sont à droite : quelle que soit celle choisie, une passe à gauche, donc on arrive en 1 avec probabilité 1. Depuis 2, les deux sont à gauche : en déplacer une laisse exactement une particule à gauche, donc on arrive aussi en 1 avec probabilité 1.

Depuis 1, il y a une particule de chaque côté. Choisir celle de gauche, de probabilité  $1/2$ , la fait partir et donne l'état 0. Choisir celle de droite, de probabilité  $1/2$ , la fait entrer et donne l'état 2. On ne peut pas rester en 1. Dans l'ordre 0, 1, 2,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le graphe a les arcs  $0 \rightarrow 1$  et  $2 \rightarrow 1$  de poids 1, ainsi que  $1 \rightarrow 0$  et  $1 \rightarrow 2$  de poids  $1/2$ . Aucun autre arc n'est nécessaire. Chaque ligne somme à 1.

2. La première ligne de  $P$  est  $(0, 1, 0)$  : son produit par  $P$  sélectionne la deuxième ligne,  $(1/2, 0, 1/2)$ . Pour la deuxième ligne, les trois produits sont  $(1/2)0 + 0(1/2) + (1/2)0 = 0$ ,  $(1/2)1 + 0 \times 0 + (1/2)1 = 1$ , et  $(1/2)0 + 0(1/2) + (1/2)0 = 0$ . La troisième ligne est identique à la première. Donc

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Depuis l'état 0,  $\pi_0 = (1, 0, 0)$  ; après deux pas, on lit la première ligne de  $P^2$ , soit  $(1/2, 0, 1/2)$ . Les chemins 0, 1, 0 et 0, 1, 2 ont chacun probabilité  $1 \times 1/2$ .

3. Pour  $\pi = (u, v, w)$ , le produit est  $\pi P = (v/2, u + w, v/2)$ . L'invariance impose  $u = v/2$ ,  $v = u + w$ ,  $w = v/2$ . Remplaçons  $u, w$  dans la somme 1 :  $v/2 + v + v/2 = 2v = 1$ . Donc  $v = 1/2$  et  $u = w = 1/4$ .

La deuxième équation est vérifiée, car  $u + w = 1/4 + 1/4 = 1/2 = v$ . Les coefficients sont positifs de somme 1. Le candidat  $\pi_* = (1/4, 1/2, 1/4)$  est donc un invariant, et les équations imposent ces valeurs de façon unique.

### Partie II — Expliquer pourquoi l'équilibre n'est pas atteint

1. Depuis 0,  $\pi_1 = (0, 1, 0)$  et  $\pi_2 = (1/2, 0, 1/2)$ . Multiplier cette dernière ligne par  $P$  donne  $(0, 1/2 + 1/2, 0) = (0, 1, 0)$ . Puis multiplier  $(0, 1, 0)$  redonne  $(1/2, 0, 1/2)$ . Les deux lignes s'échangent donc à chaque pas. Par récurrence,  $\pi_{2k+1} = (0, 1, 0)$  pour  $k \geq 0$ , et  $\pi_{2k} = (1/2, 0, 1/2)$  pour  $k \geq 1$ . Le rang 0 est exclu de la seconde formule car  $\pi_0 = (1, 0, 0)$ .

2. La probabilité de l'état 1 vaut 1 aux rangs impairs et 0 aux rangs pairs. Les deux sous-suites constantes ont des limites différentes, donc la suite ne converge pas. Cela ne contredit pas  $\pi_* P = \pi_*$  : cette égalité garantit la stabilité si l'on *démarre* en  $\pi_*$ . Ici, le départ certain  $(1, 0, 0)$  est différent. À chaque déplacement, le nombre à gauche change de 1 ; sa parité alterne obligatoirement, ce qui explique le phénomène.

### Partie III — Calculer l'effet de la pause

1. Avec probabilité  $1/2$ , on reste dans le même état : cela correspond à  $I/2$ . Avec probabilité  $1/2$ , on suit les transitions de  $P$  : cela correspond à  $P/2$ . On additionne les deux possibilités, donc

$$Q = \frac{I + P}{2} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Les probabilités diagonales viennent de la pause. L'invariant précédent vérifie  $\pi_* Q = (\pi_* I + \pi_* P)/2 = (\pi_* + \pi_*)/2 = \pi_*$ . Cette égalité utilise la distributivité du produit et l'invariance déjà prouvée pour  $P$ .

2. Le produit  $\pi_{n+1} = \pi_n Q$  donne

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{v_n}{4}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n + w_n}{2} = \frac{1}{2}, \quad w_{n+1} = \frac{v_n}{4} + \frac{w_n}{2}.$$

Pour  $s_n = u_n + w_n$ , on additionne les première et troisième relations :  $s_{n+1} = u_n/2 + v_n/2 + w_n/2 = 1/2$ , car la distribution somme à 1. Pour  $d_n = u_n - w_n$ , on les soustrait : les deux termes  $v_n/4$  se compensent et  $d_{n+1} = (u_n - w_n)/2 = d_n/2$ .

3. La suite  $d$  est géométrique, de raison  $1/2$  et de premier terme  $d_0 = u_0 - w_0$ . Donc  $d_n = (u_0 - w_0)/2^n$ . Pour  $n \geq 1$ ,  $s_n = 1/2$  et  $v_n = 1/2$ . En additionnant  $s_n = u_n + w_n$  et  $d_n = u_n - w_n$ , on obtient  $2u_n = s_n + d_n$  ; en les soustrayant,  $2w_n = s_n - d_n$ . Ainsi

$$u_n = \frac{1}{4} + \frac{u_0 - w_0}{2^{n+1}}, \quad v_n = \frac{1}{2}, \quad w_n = \frac{1}{4} - \frac{u_0 - w_0}{2^{n+1}}.$$

La valeur initiale  $u_0 - w_0$  est fixe ; la puissance  $2^{-(n+1)}$  tend vers zéro. Donc les trois coordonnées tendent respectivement vers  $1/4, 1/2, 1/4$ , pour toute distribution initiale. Nous avons démontré la convergence par des écarts explicites.

4. Depuis 0,  $u_0 = 1, v_0 = w_0 = 0$ , donc  $u_0 - w_0 = 1$ . Pour  $n \geq 1$ , les écarts absolus sont  $2^{-(n+1)}$ , 0 et  $2^{-(n+1)}$ . Les trois sont au plus  $1/64 = 2^{-6}$  exactement lorsque  $n + 1 \geq 6$ , c'est-à-dire  $n \geq 5$ .

Au rang 5, la distribution est  $(17/64, 1/2, 15/64)$  : les deux écarts extrêmes valent bien  $1/64$ . Au rang 4, ils valent  $1/32$ , trop grand. Le rang 0 ne convient pas non plus, puisque son écart sur la première coordonnée vaut  $3/4$ . Le premier rang est donc 5, et tous les suivants conviennent. Dans ce modèle, les pauses ont permis aux deux parités de se mélanger ; les formules quantifient cet effet.

## 10 Faire le point par une variante autonome

Essaie cette variante sans relire le corrigé précédent. Explique le choix de ta méthode, puis utilise les contrôles pour décider quelle notion retravailler.

### À toi d'essayer : Un modèle à deux états de A à Z

Pour  $P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$ , pars du premier état. Donne la récurrence de sa probabilité, l'invariant et la limite.

**Pour démarrer.** Écris  $x_{n+1}$  en distinguant maintien dans le premier état et retour depuis le second.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 30](#) [Explication, p. 33](#)

## 11 Fiche-mémoire

- $P$  est stochastique par lignes : coefficients positifs ou nuls, chaque somme de ligne égale à 1.
- Convention du cours : distributions en ligne ;  $\pi_{n+1} = \pi_n P$  et  $\pi_n = \pi_0 P^n$ .
- $(P^n)_{ij}$  décrit une arrivée en  $j$  après  $n$  transitions depuis  $i$ .
- Invariant :  $\pi P = \pi$  avec normalisation et positivité.
- Deux états :  $x_{n+1} = (1 - a - b)x_n + b$  ; si  $0 < a + b < 2$ , convergence vers  $b/(a + b)$ .
- Une limite éventuelle est invariante ; un invariant ne garantit pas une limite.

**Contrôle.** Ai-je fixé l'ordre des états ? Multiplié du bon côté ? Distingué visite et arrivée ? Vérifié chaque somme ? Démontré la convergence dans le modèle étudié ?

## 12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

### Identifier une hypothèse de modèle

#### Indice 1 — Une piste.

Le futur doit dépendre seulement de l'état choisi.

#### Indice 2 — Un pas de plus.

L'état peut contenir plus d'information qu'un seul achat.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

### Compléter une ligne en gardant son sens

#### Indice 1 — Une piste.

Les trois arrivées épuisent les possibilités depuis A.

#### Indice 2 — Un pas de plus.

Une colonne rassemble plusieurs départs conditionnels différents.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

### Deux étapes depuis V

#### Indice 1 — Une piste.

Il existe deux chemins : V,V,V et V,B,V.

#### Indice 2 — Un pas de plus.

Multiplie les probabilités le long de chaque chemin, puis additionne.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

### Deux origines pour une même arrivée

#### Indice 1 — Une piste.

Utilise les deux origines possibles, avec leurs poids initiaux.

#### Indice 2 — Un pas de plus.

Additionne  $0,2 \times 0,8$  et  $0,8 \times 0,3$ .

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

**Une case, un départ et une durée****Indice 1 — Une piste.**

L'indice 2 fixe l'état initial.

**Indice 2 — Un pas de plus.**

La puissance fixe le nombre exact de transitions.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

**Normaliser une solution de l'équation****Indice 1 — Une piste.**

Deux conditions concernent les coefficients eux-mêmes.

**Indice 2 — Un pas de plus.**

L'équation homogène admet aussi des multiples de solutions.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

**Une limite trompeuse****Indice 1 — Une piste.**

La matrice échange les deux coordonnées.

**Indice 2 — Un pas de plus.**

Compare les temps pairs et impairs.

[Revenir à la recherche, p. 10](#)

**Relier le signe de la raison au comportement****Indice 1 — Une piste.**

La raison vaut 1 moins a moins b.

**Indice 2 — Un pas de plus.**

Le point fixe de la première coordonnée est  $b/(a+b)$ .

[Revenir à la recherche, p. 11](#)

**Une invariant unique ne suffit toujours pas****Indice 1 — Une piste.**

Le produit fait tourner les trois coordonnées.

**Indice 2 — Un pas de plus.**

Compare les rangs de restes 0,1 et 2 modulo 3.

[Revenir à la recherche, p. 12](#)

**Lire une autre convention****Indice 1 — Une piste.**

Le modèle n'a pas changé, seul l'ordre change.

**Indice 2 — Un pas de plus.**

Échange les coordonnées de (0,6 ; 0,4) donné dans l'ordre V,B.

[Revenir à la recherche, p. 14](#)

**Une première sortie****Indice 1 — Une piste.**

Les deux premières transitions doivent conserver V.

**Indice 2 — Un pas de plus.**

Le dernier facteur est la probabilité de sortir de V.

[Revenir à la recherche, p. 14](#)

**Un modèle à deux états de A à Z****Indice 1 — Une piste.**

Pose la distribution au rang n égale à  $(x_n, 1 - x_n)$ .

**Indice 2 — Un pas de plus.**

La récurrence est  $x_{n+1} = 0,5x_n + 0,2$ .

[Revenir à la recherche, p. 26](#)

## 13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

### Identifier une hypothèse de modèle

Considérons les historiques  $A, A$  et  $B, A$  : le dernier achat est  $A$  dans les deux cas. Si le choix de demain dépend aussi de l'avant-dernier achat, il peut avoir probabilité 0,8 de  $A$  dans le premier cas, 0,3 dans le second. L'état « dernier achat  $A$  » ne permet alors pas de fixer une seule transition. Il ne définit donc pas nécessairement un modèle de Markov. En prenant comme état le couple des deux derniers achats, on distingue ces situations ; il reste à vérifier que le passé plus ancien n'intervient plus. Agrandir l'état peut résoudre le manque d'information, mais c'est une hypothèse à examiner.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

### Compléter une ligne en gardant son sens

Depuis  $A$ , les arrivées  $A, B, C$  sont incompatibles et couvrent tous les cas :  $0,6 + 0,1 + p = 1$ , donc  $p = 0,3$ . Les trois coefficients sont positifs et la ligne somme à 1. La colonne  $A$  contient au contraire les probabilités vers  $A$  conditionnées par trois départs différents. Les additionner sans poids n'est pas une probabilité d'arrivée de la population. Si les poids de départ sont  $u, v, w$ , cette arrivée vaut  $up_{AA} + vp_{BA} + wp_{CA}$ . Ce sont les poids qui permettent de mélanger correctement les origines.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

### Deux étapes depuis $V$

Au premier pas, soit on reste en  $V$ , soit on va en  $B$ . Dans le premier cas, le chemin  $V, V, V$  a probabilité  $0,8 \times 0,8 = 0,64$ . Dans le second, le chemin  $V, B, V$  a probabilité  $0,2 \times 0,3 = 0,06$ . Les deux chemins sont distincts et couvrent toutes les arrivées à vélo au temps 2, donc on additionne :  $0,64 + 0,06 = 0,70$ . On retrouve la case  $(V, V)$  de  $P^2$  par le produit de la ligne  $(0,8, 0,2)$  et de la colonne  $(0,8, 0,3)^T$ . Le terme  $0,8^2$  seul compterait uniquement ceux qui ne quittent jamais le vélo.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

### Deux origines pour une même arrivée

Le premier chemin a probabilité  $0,2 \times 0,8 = 0,16$  : 0,2 pour partir de 1, puis 0,8 pour y rester. Le second a probabilité  $0,8 \times 0,3 = 0,24$ . Les origines sont incompatibles, donc on additionne : 0,40. La seconde coordonnée vaut  $0,2 \times 0,2 + 0,8 \times 0,7 = 0,04 + 0,56 = 0,60$ . Le total vaut 1. Le coefficient 0,8 de la matrice seul répondrait à un départ certain de 1 ; ici, ce départ n'a que probabilité 0,2.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

## Une case, un départ et une durée

L'exposant 4 fixe quatre transitions. La ligne 2 fixe le départ certain dans l'état 2 ; la colonne 3 fixe l'arrivée. La case signifie donc : depuis 2, la probabilité d'être en 3 après quatre pas est 0,18. Pour un départ  $(u, v, w)$ , l'arrivée en 3 vaut  $u(P^4)_{13} + v(P^4)_{23} + w(P^4)_{33}$ . Le nombre 0,18 est seulement le deuxième terme avant pondération ; il ne donne pas le résultat pour toute distribution initiale. Il autorise aussi des visites intermédiaires à 3 suivies de départs et de retours.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

## Normaliser une solution de l'équation

Si  $\pi P = \pi$ , alors  $(2\pi)P = 2(\pi P) = 2\pi$ . La ligne  $2\pi$  satisfait donc la même équation, mais sa somme vaut 2 : ce n'est pas une distribution. L'équation  $LP = L$  doit être accompagnée de coefficients positifs ou nuls et d'une somme 1. Si les coefficients de  $L$  sont tous positifs ou nuls et leur somme  $s > 0$ , on peut diviser par  $s$  ; alors  $(L/s)P = L/s$  et la somme devient 1. Si  $L$  contient à la fois des coefficients positifs et négatifs, cette division positive ne supprime pas les signes négatifs. L'équation seule ne suffit donc pas.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

## Une limite trompeuse

Le produit vaut  $(1-x, x)$  : la matrice échange les deux coordonnées. Pour être invariant, il faut  $x = 1-x$ , donc  $2x = 1$  et  $x = 1/2$ . La distribution  $(1/2, 1/2)$  est l'unique invariant. Mais depuis  $(1, 0)$ , les étapes donnent  $(0, 1)$ , puis  $(1, 0)$ , puis  $(0, 1)$ , sans diminution de l'écart. Les rangs pairs restent  $(1, 0)$  et les rangs impairs  $(0, 1)$  ; ces deux sous-suites ne peuvent avoir une même limite. L'existence d'un départ stable ne rend donc pas tous les départs convergents.

[Revenir à la recherche, p. 10](#)

## Relier le signe de la raison au comportement

La somme  $a + b$  vaut 1,3. Le point fixe est  $0,5/1,3 = 5/13$ . La raison vaut  $1 - 0,8 - 0,5 = -0,3$ . Avec  $e_0 = x_0 - 5/13$ , la formule donne  $x_n - 5/13 = (-0,3)^n e_0$ . Les premiers écarts sont  $e_0, -0,3e_0, 0,09e_0, -0,027e_0$ . Si  $e_0 \neq 0$ , leurs signes alternent et leurs modules sont multipliés par  $0,3 < 1$ , donc tendent vers zéro. Si  $e_0 = 0$ , tous les écarts restent nuls. Dans tous les cas la première probabilité tend vers  $5/13$ .

[Revenir à la recherche, p. 11](#)

## Une invariant unique ne suffit toujours pas

Le cycle déplace la masse du premier état vers le deuxième, du deuxième vers le troisième et du troisième vers le premier. La ligne uniforme  $(1/3, 1/3, 1/3)$  est inchangée, car permuter trois coordonnées égales ne modifie rien. Plus généralement, l'invariance impose les trois coordonnées égales, donc cet invariant est unique. Depuis  $(1, 0, 0)$ , les lignes deviennent  $(0, 1, 0)$ , puis  $(0, 0, 1)$ , puis  $(1, 0, 0)$ . Aux rangs multiples de 3, la première coordonnée vaut 1 ; aux rangs suivants, elle vaut 0. Deux sous-suites ont des limites différentes : la suite entière ne converge pas, malgré l'unicité de l'invariant.

[Revenir à la recherche, p. 12](#)

### Lire une autre convention

L'invariant attribue probabilité 0,6 au vélo et 0,4 au bus. Dans l'ordre  $B, V$ , il s'écrit donc  $(0,4, 0,6)$ . La matrice dans cet ordre est  $Q = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$ . Le produit donne  $0,4 \times 0,7 + 0,6 \times 0,2 = 0,28 + 0,12 = 0,4$  pour le bus, puis  $0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,8 = 0,12 + 0,48 = 0,6$  pour le vélo. La ligne est bien conservée. Changer l'ordre exige de permuter ensemble les lignes, les colonnes et les coordonnées.

[Revenir à la recherche, p. 14](#)

### Une première sortie

Le départ est  $V$ . Une première sortie au troisième pas impose encore  $V$  aux temps 1 et 2, puis  $B$  au temps 3. Le seul chemin est  $V, V, V, B$ . Les deux maintiens ont probabilité conditionnelle 0,8, et la sortie 0,2. Le produit vaut  $0,8 \times 0,8 \times 0,2 = 0,64 \times 0,2 = 0,128$ . Une simple arrivée en  $B$  au temps 3 compterait aussi, par exemple,  $V, B, B, B$ , qui est exclu ici puisque la première sortie y a déjà lieu au temps 1.

[Revenir à la recherche, p. 14](#)

### Un modèle à deux états de A à Z

Les lignes totalisent  $0,7 + 0,3 = 1$  et  $0,2 + 0,8 = 1$ , donc  $P$  est valide. Depuis le premier état certain,  $x_0 = 1$ . Les probabilités totales donnent  $x_{n+1} = 0,7x_n + 0,2(1 - x_n) = 0,5x_n + 0,2$ . Le point fixe satisfait  $x = 0,5x + 0,2$ , donc  $0,5x = 0,2$  et  $x = 0,4$ . Soustraire cette valeur donne  $x_{n+1} - 0,4 = 0,5(x_n - 0,4)$ ; l'écart initial étant 0,6,  $x_n = 0,4 + 0,6(0,5)^n$ . Au rang 1, on retrouve 0,7. La puissance tend vers zéro, donc la distribution tend vers  $(0,4, 0,6)$ . Enfin  $(0,4, 0,6)P = (0,28 + 0,12, 0,12 + 0,48) = (0,4, 0,6)$  : la limite calculée est bien invariante.

[Revenir à la recherche, p. 26](#)