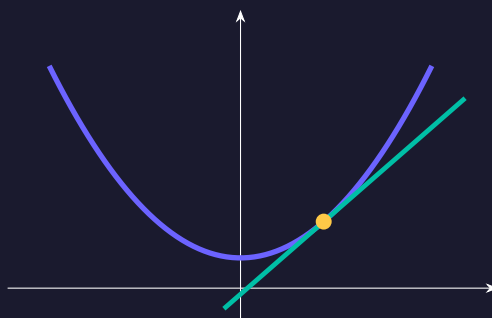


Équations et fonctions du second degré

Analyse ■ Comprendre et s'entraîner



Comprendre Calculer Vérifier

Première professionnelle
Année scolaire 2026–2027

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	Pourquoi ce chapitre ?	3
2	L'idée avant la formule	3
3	Le cours formel	3
3.1	Résoudre avec des courbes	3
3.2	Reconnaître une parabole et ses racines	4
3.3	Étudier le signe d'un produit	5
3.4	Modéliser avec le second degré	6
3.5	Chercher une racine par balayage	8
4	Boîte à outils	9
5	Exercices progressifs	11
6	Problème — Pour aller plus loin	13
7	Indices des exercices	14
8	Corrigés détaillés	16
9	Corrigé du problème	22
10	Variante autonome et bilan	23
11	Fiche-mémoire	23
12	Indices des pauses et des preuves	24
13	Explications des pauses et des preuves	26

1 Pourquoi ce chapitre ?

Un résultat quadratique peut augmenter puis diminuer. Tu vas distinguer ses seuils, son signe et sa meilleure valeur réalisable. **Ton parcours.** Module du programme professionnel pour les groupements A, B, C. Les automatismes, le raisonnement et les outils numériques se travaillent tout au long du parcours.

- Résoudre avec des courbes.
- Reconnaître une parabole et ses racines.
- Étudier le signe d'un produit.
- Modéliser avec le second degré.
- Chercher une racine par balayage.

2 L'idée avant la formule

La forme factorisée montre les zéros. Une écriture centrée sur le sommet montre la meilleure valeur. Les deux décrivent la même courbe.

3 Le cours formel

3.1 Résoudre avec des courbes

Intuition | Construire la notion pas à pas

Transformer une équation en rencontre. Résoudre $f(x) = g(x)$ signifie chercher les entrées qui produisent la même sortie pour les deux fonctions. Sur un graphique, les points correspondants appartiennent aux deux courbes : ce sont leurs intersections. Les solutions sont leurs abscisses, pas leurs ordonnées.

Transformer une inégalité en position. Pour $f(x) > g(x)$, on retient les abscisses où la courbe de f est au-dessus de celle de g . Aux intersections, les hauteurs sont égales : ces abscisses sont exclues pour une inégalité stricte et incluses pour une inégalité large.

Une lecture a une précision limitée. Une intersection située entre deux graduations ne fournit généralement qu'une valeur approchée. Une fenêtre graphique peut aussi masquer des solutions. Le domaine doit être entièrement examiné avant de conclure qu'on les a toutes.

Affiner par un encadrement. Pour une fonction continue qui change de signe entre a et b , il existe une racine entre ces bornes. Si elle est strictement monotone sur cet intervalle, cette racine est unique. Des essais numériques réduisent ensuite la largeur de l'intervalle ; ils ne transforment pas une approximation décimale en valeur exacte.

Définition | Comprendre la notion

Résoudre $f(x) = k$ consiste à chercher les abscisses où la courbe rencontre la droite horizontale $y = k$. Résoudre $f(x) = g(x)$ consiste à chercher les abscisses de leurs intersections. Pour $f(x) \leq g(x)$, repère les portions où la première courbe est sous la seconde, en incluant les intersections. Un graphique donne souvent une valeur approchée. Un solveur ou un balayage numérique permet d'affiner ; une substitution contrôle le résultat. Il faut rechercher toutes les intersections dans le domaine. Un zoom trop limité peut masquer une autre solution.

💡 Exemple | Exemple commenté

Pour résoudre $x^2 > 4$ sur $[-5; 5]$, on compare la parabole $y = x^2$ à la droite horizontale $y = 4$. Elles se coupent en x égal à -2 et à 2 . Entre -2 et 2 , la parabole est sous la droite : par exemple $0^2 < 4$. À l'extérieur, elle est au-dessus : $(-3)^2 > 4$ et $3^2 > 4$.

On conserve donc les portions $[-5; -2[$ et $]2; 5]$. Les bornes -2 et 2 sont exclues par le signe strict. Les bornes -5 et 5 restent incluses, car elles sont dans le domaine et satisfont effectivement l'inégalité. Le contrôle d'un point dans chaque portion aide à détecter une inversion, mais la conclusion sur tout l'intervalle repose sur la forme et les variations de la parabole.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

L'absence d'intersection dans une fenêtre ne prouve pas l'absence de solution sur tout le domaine. Vérifie les limites de la fenêtre, l'échelle et, si possible, la formule ou les variations.

À toi d'essayer : Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Les solutions de $f(x) = g(x)$ se lisent comme...

1. Les ordonnées des intersections
2. Les pentes des courbes
3. Les abscisses des intersections

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 26](#)

3.2 Reconnaître une parabole et ses racines

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Reconnaître le second degré. Une expression $ax^2 + bx + c$ est du second degré si $a \neq 0$. Sa courbe est une parabole. Une racine est une valeur de x qui annule l'expression : graphiquement, c'est une abscisse où la parabole rencontre l'axe horizontal.

Pourquoi la factorisation aide. Lorsque l'expression s'écrit $a(x - r_1)(x - r_2)$, le produit vaut zéro dès qu'un facteur vaut zéro. Comme a n'est pas nul, les racines sont r_1 et r_2 . Si ces deux nombres sont égaux, on obtient une racine double : la parabole touche l'axe sans le traverser.

Choisir la forme qui répond à la question. La forme développée donne directement le coefficient de x^2 et l'image de zéro. La forme factorisée donne directement les racines et facilite le signe. Passer de l'une à l'autre ne change pas la fonction ; cela rend seulement certaines informations plus visibles.

Exploiter la symétrie. Deux racines distinctes sont à la même distance de l'axe de la parabole. Cet axe a donc pour abscisse leur moyenne $(r_1 + r_2)/2$. Calculer l'image de cette moyenne donne l'ordonnée du sommet. Une formule générale de résolution n'est pas nécessaire lorsqu'une factorisation est disponible.

📖 Définition | Comprendre la notion

Un polynôme du second degré s'écrit $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Sa courbe est une parabole ; $c = f(0)$ est l'ordonnée à l'origine. Une racine est un réel dont l'image est nulle. La forme $a(x - r_1)(x - r_2)$ rend

les racines visibles : r_1 et r_2 , qui peuvent être égales. Si deux racines sont connues, leur moyenne $(r_1 + r_2)/2$ donne l'abscisse du sommet. Si elles ne sont pas connues, on peut les rechercher graphiquement ou avec un solveur. Le calcul par discriminant n'est pas attendu de ce parcours. Une parabole peut couper l'axe horizontal deux fois, une seule fois ou aucune fois.

💡 Exemple | Exemple commenté

Pour $f(x) = 2(x-1)(x-5)$, le facteur constant 2 n'est jamais nul. Le produit s'annule si $x-1 = 0$ ou $x-5 = 0$: les racines sont donc 1 et 5. L'axe de symétrie se situe au milieu : $x = (1+5)/2 = 3$. Au sommet, $f(3) = 2(3-1)(3-5) = 2 \times 2 \times (-2) = -8$. Le coefficient du carré vaut 2, positif : la parabole est tournée vers le haut et le sommet correspond à son minimum. Pour obtenir l'image de zéro, on peut garder la forme factorisée : $f(0) = 2(-1)(-5) = 10$. En développant, $(x-1)(x-5) = x^2 - 6x + 5$, donc $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$. La valeur constante 10 confirme le calcul de $f(0)$; remplacer x par 1 ou par 5 dans cette forme doit redonner zéro.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Une racine -2 correspond à un facteur $x + 2$, et non $x - 2$. Le contrôle le plus simple consiste à remplacer x par la racine : le facteur choisi doit alors devenir zéro.

À toi d'essayer : Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Les racines de $(x+1)(x-6)$ sont...

1. -1 et 6
2. 1 et 6
3. -1 et -6

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 24 [Explication](#), p. 26

3.3 Étudier le signe d'un produit

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Partir du signe des facteurs. Un produit de deux nombres de même signe est positif ; un produit de deux nombres de signes contraires est négatif. La forme $a(x-r_1)(x-r_2)$ permet d'utiliser cette règle intervalle par intervalle.

Les racines découpent la droite. Si $r_1 < r_2$, à gauche de r_1 les deux facteurs variables sont négatifs ; entre les racines, le premier est positif et le second négatif ; à droite, ils sont tous deux positifs. Le produit des deux facteurs est donc positif, négatif, positif. On tient ensuite compte du signe de a .

Traiter les zéros à part. Aux racines, le produit vaut zéro. Ces valeurs conviennent à une condition ≥ 0 ou ≤ 0 , mais jamais à une condition > 0 ou < 0 . Le choix des crochets traduit exactement cette différence.

Une racine double ne change pas le signe. Dans $a(x-r)^2$, le carré reste positif de chaque côté de r et s'annule seulement en r . Le signe de l'expression hors de r est donc celui de a . On ne doit pas alterner automatiquement les signes à chaque racine.

Définition | Comprendre la notion

Le signe d'un produit s'obtient en combinant les signes de ses facteurs. Deux facteurs de même signe donnent un produit positif; de signes opposés, un produit négatif. Pour $a(x-r_1)(x-r_2)$ avec $r_1 < r_2$, le signe est celui de a à l'extérieur des racines et le signe opposé entre elles. Aux racines, la valeur est nulle. Si la racine est double, $a(x-r)^2$ garde le signe de a sauf en r , où il vaut 0. Pour une inéquation, écris les intervalles et décide séparément si les racines doivent être incluses.

Exemple | Exemple commenté

Étudions $f(x) = -2(x-1)(x-4)$. Si $x < 1$, les deux facteurs variables sont négatifs, leur produit est positif, puis la multiplication par -2 donne un résultat négatif. Pour $1 < x < 4$, les facteurs sont de signes opposés; leur produit négatif, multiplié par -2 , devient positif. Pour $x > 4$, le résultat redevient négatif.

Aux deux bornes, $f(1) = f(4) = 0$. La condition $f(x) \geq 0$ est donc satisfaite entre les racines, bornes comprises : $[1; 4]$. Pour la condition stricte $f(x) > 0$, la réponse serait $]1; 4[$. En prenant x égal à 2, on obtient $-2 \times 1 \times (-2) = 4 > 0$, ce qui contrôle le signe dans la portion centrale.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Le signe du coefficient dominant est indispensable. $(x-1)(x-4)$ et $-2(x-1)(x-4)$ ont les mêmes racines, mais des signes opposés partout ailleurs.

À toi d'essayer : Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

$(x-1)(x-5) < 0$ pour...

1. $x < 1$ ou $x > 5$
2. Tout réel x
3. $1 < x < 5$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 26](#)

3.4 Modéliser avec le second degré

Intuition | Construire la notion pas à pas

Comprendre l'apparition du carré. Une aire est un produit de deux longueurs. Si ces deux longueurs dépendent de x , leur produit peut contenir x^2 . Une recette peut également multiplier une quantité vendue par un prix dépendant de cette quantité. Le second degré naît alors du modèle, pas d'une formule choisie au hasard.

Définir le domaine avant d'optimiser. Les longueurs doivent être positives ; une quantité produite peut être limitée par la capacité d'une machine. Un sommet de parabole situé hors de ces contraintes n'est pas une solution réalisable.

Relier sommet et objectif. Une parabole de coefficient dominant négatif monte puis descend : son sommet donne un maximum sur les réels. Avec un coefficient positif, le sommet donne un minimum. Sur un intervalle imposé, on étudie seulement la partie autorisée et on compare aussi les bornes.

Rendre le résultat interprétable. Un optimum doit préciser la valeur de x qui le réalise et la valeur maximale ou minimale obtenue, avec leurs unités différentes. Si x est une longueur en centimètres, une aire s'exprime en centimètres carrés. Si le modèle est approximatif, l'optimum est celui du modèle, sous ses hypothèses.

Définition | Comprendre la notion

Un produit de deux grandeurs qui varient avec x conduit souvent au second degré : aire, recette, énergie ou distance modélisée. Définis le domaine à partir du contexte avant d'étudier la parabole. La symétrie permet de repérer le sommet lorsque deux valeurs symétriques ou les racines sont connues. Si $a > 0$, le sommet donne un minimum ; si $a < 0$, un maximum. Sur un domaine restreint, vérifie que le sommet y appartient et compare aussi les bornes. Le modèle décrit les hypothèses données ; il ne prouve pas à lui seul qu'une prévision commerciale ou technique se réalisera.

Exemple | Exemple commenté

Un rectangle de périmètre 20 mètres a des côtés x et y vérifiant $2x + 2y = 20$. Diviser par 2 donne $x + y = 10$, puis $y = 10 - x$. Pour que les côtés soient strictement positifs, il faut $0 < x < 10$. L'aire est $A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$. On peut écrire $A(x) = 25 - (x - 5)^2$, car le développement redonne $25 - x^2 + 10x - 25 = 10x - x^2$. Un carré étant positif ou nul, $A(x) \leq 25$. L'égalité est obtenue pour $x = 5$, qui appartient bien au domaine ; l'autre côté vaut alors 5.

Le maximum vaut donc 25 mètres carrés pour un carré de côté 5 mètres. Le contrôle du périmètre donne $4 \times 5 = 20$ mètres. Ce contrôle vérifie que l'optimum respecte la contrainte initiale.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Le sommet donne un optimum sur les réels, mais il peut être hors du domaine du problème. Une réponse numérique plus grande n'est pas meilleure si elle exige une longueur ou une production non autorisée.

À toi d'essayer : Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Une parabole de racines 2 et 8 a son axe en...

1. $x = 10$
2. $x = 5$
3. $x = 6$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 26](#)

3.5 Chercher une racine par balayage

Intuition | Construire la notion pas à pas

Pourquoi utiliser un outil numérique. Certaines racines n'ont pas une écriture décimale finie. La calculatrice ou un programme permet de les approcher à la précision utile. On commence par localiser une zone, puis on réduit le pas pour obtenir un encadrement plus étroit.

Ce qu'apporte un changement de signe. Une fonction polynomiale est continue : sa courbe ne saute pas d'une hauteur à une autre. Si elle prend une valeur négative en a et positive en b , elle doit passer par zéro entre a et b . Si elle est en plus strictement monotone entre ces bornes, cette racine est unique.

Ce qu'un balayage peut manquer. Une racine double peut être touchée sans changement de signe : $(x-2)^2$ reste positif de chaque côté de 2. Un pas trop grand peut aussi franchir deux racines et retrouver le même signe. Le tableau numérique doit donc être interprété avec le graphique, les variations ou une factorisation.

Distinguer encadrement et approximation. Écrire $1,41 < r < 1,42$ fournit une information contrôlée de largeur 0,01. Écrire $r \approx 1,4142$ donne une approximation. Le symbole d'égalité ne convient que si la valeur est exacte ; on peut contrôler une approximation en recalculant l'image, qui doit être proche de zéro.

Définition | Comprendre la notion

Quand une factorisation n'est pas accessible, utilise un graphique pour repérer une zone, puis une table de valeurs à pas de plus en plus fin. Sur un intervalle où un polynôme est continu et monotone, un changement de signe entre deux bornes encadre une unique racine. On peut ensuite réduire le pas ou partager l'intervalle en deux. Un balayage peut manquer une racine double, car celle-ci ne change pas forcément le signe. Il ne garantit pas non plus d'avoir trouvé toutes les racines si le domaine examiné est incomplet. La réponse doit indiquer sa précision ; ne transforme pas une approximation du solveur en égalité exacte.

Exemple | Exemple commenté

Pour la racine positive de $f(x) = x^2 - 2$, on calcule $f(1,4) = 1,96 - 2 = -0,04$ et $f(1,5) = 2,25 - 2 = 0,25$. La fonction est continue et strictement croissante sur les positifs : la racine unique de cette portion est entre 1,4 et 1,5.

On affine au centième : $f(1,41) = 1,9881 - 2 = -0,0119$ et $f(1,42) = 2,0164 - 2 = 0,0164$. On obtient donc $1,41 < r < 1,42$. Un solveur peut ensuite afficher 1,41421356, mais cette chaîne

décimale reste une approximation de $\sqrt{2}$. La largeur de l'encadrement permet de dire quelle précision est réellement justifiée par les calculs effectués.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Un résultat affiché avec beaucoup de décimales n'est pas automatiquement exact. La précision dépend du calcul, du modèle et du réglage du solveur. Écris une approximation et contrôle l'image du nombre affiché.

À toi d'essayer : Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Un résultat de solveur 1,4142 doit généralement être écrit...

1. $x \approx 1,4142$
2. $x = 1,4142$ exactement
3. Il n'existe pas de solution

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 25](#) [Explication, p. 26](#)

4 Boîte à outils

✂ Méthode | Résoudre avec des courbes

1. Identifie les deux courbes à comparer et vérifie le domaine ainsi que la fenêtre.
2. Relève les abscisses de toutes les intersections visibles sur ce domaine.
3. Pour une inégalité, repère les intervalles où la bonne courbe est au-dessus, puis traite les bornes.
4. Indique la précision de lecture ; si nécessaire, encadre numériquement et justifie l'unicité.

✂ Méthode | Reconnaître une parabole et ses racines

1. Vérifie que le coefficient du carré est non nul.
2. Utilise la forme factorisée et la règle du produit nul pour rechercher les racines.
3. Contrôles le signe des nombres : $x + 2 = x - (-2)$ correspond à la racine -2.
4. Pour construire une expression, conserve le coefficient a ; développe seulement si cela est demandé.
5. Vérifie les racines par substitution et utilise leur moyenne pour l'axe de symétrie.

✂ Méthode | Étudier le signe d'un produit

1. Factorise si nécessaire et range les racines dans l'ordre croissant.
2. Détermine le signe de chaque facteur sur chaque intervalle, y compris le coefficient constant.
3. Multiplie les signes et place zéro aux racines.

4. Sélectionne les portions demandées, puis inclus ou exclus les racines selon le caractère large ou strict.

Méthode | Modéliser avec le second degré

1. Définis x , son unité et les contraintes avant d'écrire la fonction.
2. Exprime les autres quantités en fonction de x puis construis l'aire, la recette ou le bénéfice.
3. Repère le sommet et le sens des variations à partir d'une forme adaptée.
4. Vérifie si le sommet est autorisé ; sinon, compare les valeurs aux limites permises.
5. Donne la valeur de x et la valeur optimale avec leurs unités, puis contrôle les contraintes.

Méthode | Chercher une racine par balayage

1. Repère le domaine et une portion où les variations rendent la recherche compréhensible.
2. Calcule les valeurs aux deux bornes et cherche un changement de signe.
3. Justifie l'existence par la continuité et l'unicité par la stricte monotonie, si elle est connue.
4. Réduis le pas ou partage l'intervalle, puis donne un encadrement et une approximation correctement notés.
5. Vérifie qu'une racine double ou une fenêtre trop étroite n'a pas été oubliée.

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases ; 6 à 10 demandent plusieurs étapes ; 11 à 15 t'invitent à choisir, justifier et contrôler. Cherche avant de consulter les indices.

Exercice 1 — Lire une intersection donnée ★★☆☆

Les courbes de f et g se coupent aux points $(1; 5)$ et $(4; 2)$. Quelles solutions de $f(x) = g(x)$ lit-on ?

Exercice 2 — Lire les racines ★★☆☆

Donne les racines de $f(x) = 3(x + 2)(x - 4)$.

Exercice 3 — Un signe en un point ★★☆☆

Sans développer, détermine le signe de $(3 - 1)(3 - 5)$.

Exercice 4 — Construire une aire ★★☆☆

Un rectangle a pour côtés x et $8 - x$, en cm. Écris l'aire et son domaine pour un rectangle non aplati.

Exercice 5 — Contrôler une approximation ★★☆☆

Pour $f(x) = x^2 - 3$, calcule $f(1,7)$ et $f(1,8)$.

Exercice 6 — Au-dessus d'un seuil ★★★☆☆

Résous $x^2 > 4$ dans $[-5; 5]$.

Exercice 7 — Retrouver la forme factorisée ★★★☆☆

Un polynôme a pour racines 2 et 5 et pour coefficient de x^2 le nombre -2 . Écris sa forme factorisée puis développée.

Exercice 8 — Une inéquation factorisée ★★★☆☆

Résous $(x + 2)(x - 3) \leq 0$.

Exercice 9 — Trouver un sommet par symétrie ★★★☆☆

Un bénéfice est $B(x) = -2(x - 10)(x - 30)$ pour $x \in [0; 40]$. Pour quelle valeur est-il maximal ? Quelle est cette valeur ?

Exercice 10 — Un pas plus fin ★★★☆☆

On sait qu'une racine de $x^2 - 3$ est entre 1,7 et 1,8. Teste 1,73 et 1,74.

Exercice 11 — Un encadrement numérique ★★★☆☆

Pour $f(x) = x^2 - 5$, on trouve $f(2,23) = -0,0271$ et $f(2,24) = 0,0176$. Explique l'encadrement de la solution positive et une approximation au centième.

Exercice 12 — Tester et exploiter une racine ★★★☆☆

Pour $f(x) = x^2 - 7x + 12$, vérifie que 3 est une racine puis factorise et trouve l'autre racine.

Exercice 13 — Une racine double ★★ ★

Résous $-3(x-2)^2 \geq 0$, puis $-3(x-2)^2 > 0$.

Exercice 14 — Un domaine limité ★★ ★

$A(x) = x(12-x)$ décrit une surface, mais la fabrication impose $2 \leq x \leq 4$. Où est le maximum autorisé ?

Exercice 15 — Un changement de signe absent ★★ ★

Un programme cherche seulement les changements de signe de $f(x) = (x-2)^2$. Pourquoi peut-il annoncer à tort aucune racine ?

6 Problème — Pour aller plus loin

Zone de rentabilité

Le résultat d'une série en dizaines d'euros dépend de x lots. $B(x) = -(x - 1)(x - 7)$ sur $[0; 9]$.

1. Développe B et trouve ses zéros sans discriminant.
2. Étudie le signe de B et interprète sa zone positive.
3. Vérifie $B(x) = 9 - (x - 4)^2$ et déduis les variations.
4. Trouve le maximum et la quantité entière à retenir.
5. Calcule $B(0)$ et $B(9)$. Pourquoi ne peut-on pas promettre un résultat positif pour toute quantité ?

7 Indices des exercices

Exercice 1

Indice 1. L'inconnue est x .

Indice 2. Retiens la première coordonnée de chaque point.

Exercice 2

Indice 1. Une racine annule un facteur.

Indice 2. $x + 2 = 0$ donne $x = -2$.

Exercice 3

Indice 1. Calcule ou repère le signe de chaque facteur.

Indice 2. Un positif multiplié par un négatif donne un négatif.

Exercice 4

Indice 1. L'aire est le produit des côtés.

Indice 2. Les deux côtés doivent être positifs.

Exercice 5

Indice 1. Éleve au carré avant de soustraire 3.

Indice 2. Observe le changement de signe.

Exercice 6

Indice 1. Considère les deux branches de la parabole.

Indice 2. Intersections : $x = -2$ et $x = 2$.

Exercice 7

Indice 1. Place chaque racine dans un facteur $x - r$.

Indice 2. Développe les deux parenthèses avant de multiplier par -2 .

Exercice 8

Indice 1. Place -2 et 3 sur un axe.

Indice 2. Le produit est négatif quand les facteurs sont de signes opposés.

Exercice 9

Indice 1. Le sommet est à mi-chemin des racines.

Indice 2. Le signe négatif du coefficient indique un maximum.

Exercice 10

Indice 1. Calcule chaque image avec assez de chiffres.

Indice 2. Le signe doit être conservé ; un arrondi prématuré peut le masquer.

Exercice 11

Indice 1. Le changement de signe encadre la racine.

Indice 2. Un encadrement au centième ne suffit pas toujours à décider l'arrondi : teste le demi-centième.

Exercice 12

Indice 1. Après la vérification, écris $(x - 3)(x - r)$.

Indice 2. Compare le terme constant et contrôle le coefficient de x .

Exercice 13

Indice 1. Un carré ne peut pas être négatif.

Indice 2. Distingue l'égalité à zéro et la positivité stricte.

Exercice 14

Indice 1. Le sommet peut être hors du domaine autorisé.

Indice 2. Sur $[2; 4]$, on reste avant l'abscisse 6 du sommet.

Exercice 15

Indice 1. Calcule les signes avant et après 2.

Indice 2. Une racine double ne traverse pas forcément l'axe horizontal.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Une intersection fournit une entrée commune et une sortie commune ; l'équation porte sur les entrées.

Construire la réponse.

1. Au point $(1; 5)$, les deux fonctions ont la même image 5 pour l'entrée 1. Ainsi, $f(1) = g(1)$.
2. Au point $(4; 2)$, elles ont la même image 2 pour l'entrée 4. Ainsi, $f(4) = g(4)$.
3. On relève donc les abscisses 1 et 4. Les ordonnées 5 et 2 ne sont pas les solutions recherchées.

Vérifier. La liste est complète si les deux intersections annoncées sont toutes les intersections sur le domaine étudié. Une fenêtre partielle ne permettrait pas de conclure pour les abscisses hors écran.

Conclure. Les solutions correspondant aux intersections données sont 1 et 4.

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le produit $3(x + 2)(x - 4)$ est nul si l'un des deux facteurs variables est nul.

Construire la réponse.

1. Le nombre 3 n'est pas nul ; il ne fournit aucune solution.
2. $x + 2 = 0$ donne $x = -2$ en soustrayant 2.
3. $x - 4 = 0$ donne $x = 4$ en ajoutant 4. Ces deux cas épuisent la règle du produit nul.

Vérifier. Pour -2, le facteur $x + 2$ vaut zéro ; pour 4, c'est $x - 4$ qui vaut zéro. Dans les deux cas, le produit complet vaut zéro.

Conclure. Les racines sont -2 et 4.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On demande le signe en un point précis ; un calcul direct suffit.

Construire la réponse.

1. Pour x égal à 3, $x - 1 = 2 > 0$ et $x - 5 = -2 < 0$.
2. Le produit de ces signes est négatif. Numériquement, $(3 - 1)(3 - 5) = 2 \times (-2) = -4$.

Vérifier. Le nombre 3 est entre les racines 1 et 5 ; pour un coefficient dominant positif, l'expression est négative entre ses deux racines.

Conclure. La valeur est -4, donc le signe est négatif.

Corrigé 4 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. L'aire du rectangle est le produit de ses deux côtés, et chacun doit être positif.

Construire la réponse.

1. Les côtés valent x et $8 - x$. Leur produit donne $A(x) = x(8 - x)$.
2. En distribuant x , on obtient $A(x) = 8x - x^2$.
3. Le premier côté impose $x > 0$; le second impose $8 - x > 0$, soit $x < 8$. Les deux conditions doivent être satisfaites simultanément.

Vérifier. Pour x égal à 3, les côtés sont 3 et 5; l'aire géométrique vaut 15. La formule donne $8 \times 3 - 3^2 = 24 - 9 = 15$.

Conclure. $A(x) = 8x - x^2$ sur $]0; 8[$ pour un rectangle non dégénéré.

Corrigé 5 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On veut encadrer la racine positive de $x^2 - 3$ entre deux dixièmes.

Construire la réponse.

1. $f(1,7) = 1,7^2 - 3 = 2,89 - 3 = -0,11$.
2. $f(1,8) = 1,8^2 - 3 = 3,24 - 3 = 0,24$.
3. Le polynôme est continu et le carré est strictement croissant sur cet intervalle positif. Le changement de signe garantit une unique racine entre les deux bornes.

Vérifier. Les deux images sont de signes strictement opposés et aucune n'est nulle : la racine n'est donc égale à aucune des bornes.

Conclure. La racine positive vérifie $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$.

Corrigé 6 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On cherche les abscisses de $[-5; 5]$ dont le carré est strictement supérieur à 4.

Construire la réponse.

1. L'égalité $x^2 = 4$ donne les deux limites -2 et 2.
2. Le carré dépasse 4 lorsque $x < -2$ ou $x > 2$. On intersecte ces deux conditions avec $[-5; 5]$.
3. Les bornes -2 et 2 sont exclues, car leur carré vaut exactement 4. Les bornes -5 et 5 sont incluses, car leur carré vaut 25.

Vérifier. À zéro, l'inégalité est fausse; à -3 et à 3, elle est vraie. Cela confirme les portions retenues de part et d'autre.

Conclure. L'ensemble solution est $[-5; -2[\cup]2; 5]$.

Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les racines imposent les facteurs ; le coefficient du carré fixe le multiplieur.

Construire la réponse.

1. La racine 2 donne le facteur $(x - 2)$ et la racine 5 donne $(x - 5)$.
2. Le produit de ces facteurs a pour terme dominant x^2 . Pour obtenir le coefficient -2, on écrit $f(x) = -2(x - 2)(x - 5)$.
3. On développe : $(x - 2)(x - 5) = x^2 - 5x - 2x + 10 = x^2 - 7x + 10$.
4. On distribue -2 à chacun des trois termes : $f(x) = -2x^2 + 14x - 20$.

Vérifier. Le coefficient du carré est bien -2. Les deux facteurs montrent que $f(2) = f(5) = 0$; la forme développée donne également ces deux égalités.

Conclure. Une écriture factorisée est $-2(x - 2)(x - 5)$; l'écriture développée est $-2x^2 + 14x - 20$.

Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On cherche où le produit est négatif ou nul.

Construire la réponse.

1. Les racines sont -2 et 3. Pour $x < -2$, les deux facteurs sont négatifs : leur produit est positif.
2. Pour $-2 < x < 3$, $x + 2 > 0$ et $x - 3 < 0$: le produit est négatif.
3. Pour $x > 3$, les deux facteurs sont positifs : le produit est positif.
4. En -2 et en 3, le produit vaut zéro. Ces deux bornes sont admises par ≤ 0 .

Vérifier. À zéro, le produit vaut $2 \times (-3) = -6$, qui convient. À -3 et à 4, le produit est positif et ne convient pas.

Conclure. L'ensemble solution est $[-2; 3]$.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On maximise une parabole tournée vers le bas, tout en vérifiant le domaine imposé.

Construire la réponse.

1. Les racines de $B(x) = -2(x - 10)(x - 30)$ sont 10 et 30. Leur moyenne vaut $(10 + 30)/2 = 20$: c'est l'abscisse du sommet.
2. Le coefficient dominant -2 est négatif ; la fonction augmente jusqu'au sommet puis diminue.
3. Le nombre 20 appartient à $[0; 40]$. Le sommet est donc réalisable sur l'intervalle demandé.
4. On calcule $B(20) = -2(20 - 10)(20 - 30) = -2 \times 10 \times (-10) = 200$.

Vérifier. La forme $B(x) = 200 - 2(x - 20)^2$ montre que toute autre valeur donne au plus 200. Aux bornes 0 et 40, la valeur est -600, inférieure au maximum.

Conclure. Le maximum est 200, atteint pour x égal à 20.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On reprend la même recherche avec un pas dix fois plus petit.

Construire la réponse.

1. $1,73^2 = 2,9929$, donc $f(1,73) = -0,0071$.
2. $1,74^2 = 3,0276$, donc $f(1,74) = 0,0276$.
3. La continuité et la stricte croissance sur cet intervalle positif donnent une unique racine entre ces valeurs.

Vérifier. La largeur est $1,74 - 1,73 = 0,01$, contre 0,1 dans l'encadrement précédent. Les calculs ont donc réduit l'incertitude d'un facteur 10.

Conclure. $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$. Cet encadrement ne signifie pas que la racine vaut exactement 1,73.

Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On encadre la racine positive de $x^2 - 5$ et l'on justifie son arrondi au centième.

Construire la réponse.

1. $f(2,23) = 2,23^2 - 5 = 4,9729 - 5 = -0,0271$.
2. $f(2,24) = 2,24^2 - 5 = 5,0176 - 5 = 0,0176$. La fonction est continue et strictement croissante pour x positif : son unique racine positive se trouve entre ces deux nombres.
3. Pour choisir l'arrondi, on teste le milieu 2,235. Son image vaut $4,995225 - 5 = -0,004775 < 0$. La racine est donc supérieure à 2,235 et inférieure à 2,24.

Vérifier. La racine est $\sqrt{5} \approx 2,2360679$, bien dans l'intervalle obtenu. Le test du milieu était nécessaire : un simple encadrement entre deux centièmes ne décide pas toujours lequel est le plus proche.

Conclure. $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$ et l'arrondi au centième est 2,24.

Corrigé 12

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On vérifie d'abord la racine annoncée, puis on recherche le second facteur.

Construire la réponse.

1. Pour x égal à 3, $3^2 - 7 \times 3 + 12 = 9 - 21 + 12 = 0$: 3 est bien une racine.
2. On cherche une factorisation $(x - 3)(x - r) = x^2 - (3 + r)x + 3r$.
3. Le terme constant doit être 12 : $3r = 12$, donc $r = 4$. Le coefficient de x devient alors $-(3 + 4) = -7$, comme attendu.
4. Ainsi $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$; le second facteur s'annule pour x égal à 4.

Vérifier. $4^2 - 7 \times 4 + 12 = 16 - 28 + 12 = 0$. Le développement vérifie également l'identité pour tout x , pas uniquement aux racines.

Conclure. Les racines sont 3 et 4 et la factorisation est $(x - 3)(x - 4)$.

Corrigé 13

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le carré impose que l'expression soit toujours négative ou nulle ; la question distingue égalité et positivité stricte.

Construire la réponse.

1. Pour tout réel x , $(x - 2)^2 \geq 0$. Multiplier par -3 donne $-3(x - 2)^2 \leq 0$.
2. Pour que cette expression soit également supérieure ou égale à zéro, elle doit être exactement nulle.
3. Comme -3 n'est pas nul, il faut $(x - 2)^2 = 0$, donc $x = 2$.
4. Pour une inégalité strictement positive, aucune valeur ne convient : l'expression ne dépasse jamais zéro.

Vérifier. À x égal à 2, on obtient zéro. À 1 ou à 3, on obtient -3 ; la racine double ne fait pas changer le signe.

Conclure. Pour ≥ 0 , l'ensemble solution est $\{2\}$; pour > 0 , c'est l'ensemble vide.

Corrigé 14

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le sommet de la parabole n'appartient pas nécessairement à l'intervalle autorisé.

Construire la réponse.

1. $A(x) = x(12 - x) = -x^2 + 12x = 36 - (x - 6)^2$. Le sommet se situe en x égal à 6.
2. Or le domaine demandé est $[2; 4]$: 6 est exclu. Sur cet intervalle situé entièrement à gauche de 6, A est croissante.
3. Le maximum est donc atteint à la borne droite x égale à 4. On calcule $A(4) = 4(12 - 4) = 4 \times 8 = 32$.

Vérifier. À l'autre borne, $A(2) = 2 \times 10 = 20$. La valeur 36 obtenue en x égal à 6 serait plus grande, mais correspond à une situation interdite par la contrainte.

Conclure. Le maximum sur $[2; 4]$ est 32, atteint pour x égal à 4.

Corrigé 15

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Un algorithme qui ne repère que les changements de signe peut ignorer une racine où la courbe touche l'axe.

Construire la réponse.

1. Pour tout x , $(x - 2)^2 \geq 0$. La fonction ne prend donc aucune valeur négative.
2. En x égal à 2, la valeur est zéro ; de chaque côté, par exemple en 1,9 et 2,1, elle vaut $0,1^2 = 0,01 > 0$.
3. Un balayage qui ne teste pas exactement 2 et qui attend deux signes opposés ne déclenche aucune détection.
4. La factorisation permet pourtant de résoudre $(x - 2)^2 = 0$: l'unique racine est 2, double. Un graphique ou une étude du minimum signale également le contact avec l'axe.

Vérifier. Le même signe aux deux bornes n'est donc pas une preuve d'absence de racine ; ici, la racine est connue exactement malgré ce même signe.

Conclure. Il faut compléter le test de changement de signe par l'examen des zéros testés, des minima ou de la structure de la fonction.

9 Corrigé du problème

1. **Comprendre la question.** La forme factorisée donne les zéros ; le développement donne une autre écriture du même modèle.

Construire la réponse.

- (a) On développe d'abord $(x - 1)(x - 7) = x^2 - 8x + 7$.
- (b) Le signe moins porte sur tous les termes : $B(x) = -x^2 + 8x - 7$.
- (c) Le produit s'annule lorsque $x - 1 = 0$ ou $x - 7 = 0$, soit x égal à 1 ou 7.

Vérifier. Remplacer chaque racine dans la forme factorisée annule un facteur et donc tout le produit.

Conclure. Les zéros sont 1 et 7, et la forme développée est $-x^2 + 8x - 7$.

2. **Comprendre la question.** On cherche les quantités qui donnent un résultat positif.

Construire la réponse.

- (a) Avant 1, les deux facteurs sont négatifs : leur produit est positif et B est négative à cause du signe moins.
- (b) Entre 1 et 7, les facteurs sont de signes contraires : leur produit est négatif et B est positive.
- (c) Après 7, les deux facteurs sont positifs : B redevient négative. Aux deux racines, B vaut zéro.

Vérifier. Au milieu, x égal à 4, les facteurs sont opposés et le résultat positif, ce qui confirme le signe intérieur.

Conclure. Le résultat est strictement positif pour $1 < x < 7$, dans le domaine autorisé.

3. **Comprendre la question.** La forme centrée permet de lire les variations sans utiliser le discriminant ni la dérivée.

Construire la réponse.

- (a) On développe $9 - (x - 4)^2 = 9 - x^2 + 8x - 16 = -x^2 + 8x - 7$.
- (b) Lorsque x se rapproche de 4, le carré $(x - 4)^2$ diminue ; en le soustrayant, B augmente.
- (c) Après 4, le carré augmente et B diminue.

Vérifier. Le développement redonne exactement la forme initiale développée : il s'agit bien de la même fonction.

Conclure. B croît sur $[0; 4]$ puis décroît sur $[4; 9]$.

4. **Comprendre la question.** Il faut distinguer le choix optimal x et la valeur maximale $B(x)$.

Construire la réponse.

- (a) Le sommet $x = 4$ appartient à $[0; 9]$ et est entier.
- (b) On calcule $B(4) = -(4 - 1)(4 - 7) = 9$.
- (c) Les variations montrent que toute autre valeur du domaine donne un résultat inférieur ou égal.

Vérifier. La forme $9 - (x - 4)^2$ ne peut dépasser 9, car le carré soustrait est positif ou nul.

Conclure. Le choix optimal est 4 lots et le résultat maximal 9 dizaines d'euros.

5. **Comprendre la question.** Les bornes illustrent les limites de la zone de rentabilité.

Construire la réponse.

- (a) À zéro, $B(0) = -(-1)(-7) = -7$.
- (b) À $x = 9$, $B(9) = -(9 - 1)(9 - 7) = -16$.
- (c) Ces valeurs sont négatives : produire trop peu ou dépasser la plage rentable peut conduire à une perte dans ce modèle.

Vérifier. Les deux bornes sont situées en dehors de l'intervalle entre les racines, où l'étude de signe annonçait déjà des valeurs négatives.

Conclure. La positivité n'est garantie que dans la zone établie ; les résultats se lisent en dizaines d'euros.

10 Variante autonome et bilan

Étudie $D(x) = -(x - 3)(x - 9)$ sur $[0; 12]$: zéros, signe positif et maximum.

À toi d'essayer : Vérifie ta démarche

Résous la variante, puis explique pourquoi ta méthode s'applique.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 25](#) [Explication, p. 26](#)

- Je peux expliquer : résoudre avec des courbes.
- Je peux expliquer : reconnaître une parabole et ses racines.
- Je peux expliquer : étudier le signe d'un produit.
- Je peux expliquer : modéliser avec le second degré.
- Je peux expliquer : chercher une racine par balayage.

11 Fiche-mémoire

Résoudre avec des courbes.

1. Identifie les deux courbes à comparer et vérifie le domaine ainsi que la fenêtre.
2. Relève les abscisses de toutes les intersections visibles sur ce domaine.
3. Pour une inégalité, repère les intervalles où la bonne courbe est au-dessus, puis traite les bornes.
4. Indique la précision de lecture ; si nécessaire, encadre numériquement et justifie l'unicité.

Reconnaître une parabole et ses racines.

1. Vérifie que le coefficient du carré est non nul.
2. Utilise la forme factorisée et la règle du produit nul pour rechercher les racines.
3. Contrôle le signe des nombres : $x + 2 = x - (-2)$ correspond à la racine -2.
4. Pour construire une expression, conserve le coefficient a ; développe seulement si cela est demandé.
5. Vérifie les racines par substitution et utilise leur moyenne pour l'axe de symétrie.

Étudier le signe d'un produit.

1. Factorise si nécessaire et range les racines dans l'ordre croissant.
2. Détermine le signe de chaque facteur sur chaque intervalle, y compris le coefficient constant.
3. Multiplie les signes et place zéro aux racines.
4. Sélectionne les portions demandées, puis inclus ou exclus les racines selon le caractère large ou strict.

Modéliser avec le second degré.

1. Définis x, son unité et les contraintes avant d'écrire la fonction.
2. Exprime les autres quantités en fonction de x puis construis l'aire, la recette ou le bénéfice.
3. Repère le sommet et le sens des variations à partir d'une forme adaptée.
4. Vérifie si le sommet est autorisé ; sinon, compare les valeurs aux limites permises.
5. Donne la valeur de x et la valeur optimale avec leurs unités, puis contrôle les contraintes.

Chercher une racine par balayage.

1. Repère le domaine et une portion où les variations rendent la recherche compréhensible.
2. Calcule les valeurs aux deux bornes et cherche un changement de signe.
3. Justifie l'existence par la continuité et l'unicité par la stricte monotonie, si elle est connue.
4. Réduis le pas ou partage l'intervalle, puis donne un encadrement et une approximation correctement notés.
5. Vérifie qu'une racine double ou une fenêtre trop étroite n'a pas été oubliée.

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Les deux fonctions sont égales là où leurs courbes se rencontrent.

Indice 2 — Un pas de plus.

À chaque intersection, relève la coordonnée horizontale.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Un produit est nul lorsqu'au moins l'un de ses facteurs est nul.

Indice 2 — Un pas de plus.

Résous séparément $x + 1 = 0$ et $x - 6 = 0$.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Les racines sont 1 et 5, et le coefficient dominant est positif.

Indice 2 — Un pas de plus.

Entre les deux racines, un seul facteur est négatif.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

L'axe de symétrie est à égale distance des deux racines.

Indice 2 — Un pas de plus.

Calcule la moyenne de 2 et de 8.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve**Indice 1 — Une piste.**

Le solveur affiche un nombre décimal fini.

Indice 2 — Un pas de plus.

Compare la nature de ce nombre avec celle de la racine exacte $\sqrt{2}$.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche**Indice 1 — Une piste.**

Repère les données utiles et l'inconnue. Reviens à la méthode correspondante dans la boîte à outils.

Indice 2 — Un pas de plus.

Contrôle les unités, les bornes et la plausibilité du résultat avant de lire la correction.

[Revenir à la recherche, p. 23](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des intersections, puisque la même entrée y donne la même sortie.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Les racines sont -1 et 6 : chacun de ces nombres annule l'un des facteurs.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Le produit est strictement négatif pour $1 < x < 5$. Les deux racines sont exclues parce que le produit y vaut zéro.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

$(2 + 8)/2 = 5$: l'axe de la parabole a pour équation $x = 5$.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

1,4142 est une approximation de $\sqrt{2}$, donc on écrit $\sqrt{2} \approx 1,4142$, et non une égalité.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche

Comprendre la question. La variante se traite directement par les facteurs puis par une forme centrée.

Construire la réponse.

1. Le produit $D(x) = -(x - 3)(x - 9)$ s'annule en 3 et 9.
2. Les facteurs ont des signes contraires entre 3 et 9 : avec le signe moins, D est positive sur $]3; 9[$. Elle est nulle aux bornes et négative ailleurs dans $[0; 12]$.
3. Le développement donne $D(x) = -x^2 + 12x - 27 = 9 - (x - 6)^2$.
4. Le carré est minimal, égal à zéro, en 6. D atteint donc son maximum 9 en 6, valeur autorisée et entière.

Vérifier. $D(6) = -(6 - 3)(6 - 9) = -3(-3) = 9$. Les bornes donnent $D(0) = -27$ et $D(12) = -27$.

Conclure. Les zéros sont 3 et 9, la zone positive $]3; 9[$, et le maximum 9 est atteint en 6.

[Revenir à la recherche, p. 23](#)