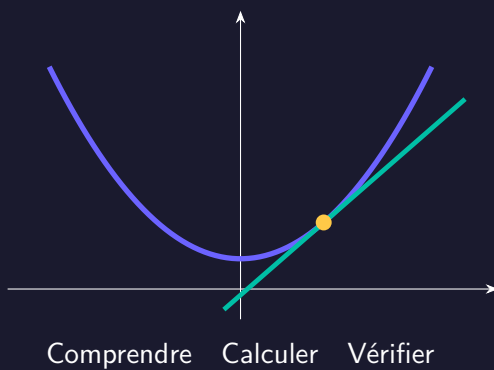


FICHE 06

Intérêts simples, coûts et résultat

Calculs professionnels ■ Comprendre et s'entraîner



Première professionnelle
Année scolaire 2026–2027

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	Pourquoi ce chapitre ?	3
2	L'idée avant la formule	3
3	Le cours formel	3
3.1	Les intérêts simples	3
3.2	Taux proportionnels et durées	4
3.3	Coût, recette et résultat	5
3.4	Coût marginal et dérivée	7
3.5	Coût moyen et choix de production	8
4	Boîte à outils	9
5	Exercices progressifs	11
6	Problème — Pour aller plus loin	13
7	Indices des exercices	14
8	Corrigés détaillés	16
9	Corrigé du problème	21
10	Variante autonome et bilan	23
11	Fiche-mémoire	23
12	Indices des pauses et des preuves	24
13	Explications des pauses et des preuves	26

1 Pourquoi ce chapitre ?

Une décision de production associe résultat, coût moyen, coût supplémentaire et financement. Chaque indicateur répond à une question précise. **Ton parcours.** Module destiné aux spécialités de baccalauréat professionnel ne comportant pas d'enseignement de physique-chimie. Vérifie cette condition dans le parcours de ta spécialité.

- Les intérêts simples.
- Taux proportionnels et durées.
- Coût, recette et résultat.
- Coût marginal et dérivée.
- Coût moyen et choix de production.

2 L'idée avant la formule

Le coût moyen répartit toutes les dépenses. Le coût marginal mesure ce qu'ajoute une unité. Leur distinction évite de comparer des nombres qui ne décrivent pas la même chose.

3 Le cours formel

3.1 Les intérêts simples

Intuition | Construire la notion pas à pas

Conserver la même base. À intérêts simples, chaque période calcule les intérêts sur le capital initial C . Les intérêts déjà obtenus ne produisent pas eux-mêmes d'intérêts. Avec un taux annuel t , une année produit Ct ; deux années produisent $2Ct$.

Rendre la durée compatible avec le taux. Pour un taux annuel, la durée d doit être exprimée en années. Six mois donnent $d = 6/12 = 0,5$; huit mois donnent $8/12$. On obtient alors $I = Ctd$, où I désigne uniquement les intérêts.

Distinguer intérêts et valeur acquise. La somme finale contient aussi le capital de départ : $V = C + I = C(1 + td)$. Une question portant sur les intérêts ne demande pas cette somme totale, et inversement.

Lire la convention pour les jours. Une durée de 45 jours peut être convertie en $45/360$ ou $45/365$ année selon le modèle donné. On ne choisit pas cette convention arbitrairement. Les exercices précisent les taux et les hypothèses ; le calcul ne remplace pas les conditions d'un contrat.

Définition | Comprendre la notion

À intérêts simples, les intérêts sont calculés sur le capital initial C pendant toute la durée. Avec un taux annuel t en écriture décimale et une durée d en années, $I = Ctd$. La valeur acquise est $C + I = C(1 + td)$. Si la durée est en mois, utilise $d = m/12$. Pour des jours, l'énoncé doit donner la convention, par exemple année de 360 ou de 365 jours ; on ne les intervertit pas. Le taux et la durée doivent se rapporter à la même unité de temps. Les intérêts simples forment un modèle linéaire en durée. Ils se distinguent des intérêts composés, où les intérêts s'ajoutent périodiquement au capital et produisent à leur tour des intérêts.

Exemple | Exemple commenté

Un capital de 2 000 euros est placé à intérêts simples au taux annuel de 3 pour cent pendant huit mois. Le taux décimal est 0,03 et la durée annuelle vaut $8/12 = 2/3$.

Les intérêts sont $I = 2\,000 \times 0,03 \times 2/3 = 60 \times 2/3 = 40$ euros. La valeur acquise est $2\,000 + 40 = 2\,040$ euros.

Le contrôle par taux mensuel proportionnel donne $3/12 = 0,25$ pour cent par mois, donc $2\,000 \times 0,0025 = 5$ euros mensuels. Huit mois donnent $8 \times 5 = 40$ euros. Les deux méthodes coïncident parce que la base initiale reste constante.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Le taux et la durée doivent parler de la même période. Un taux annuel multiplié par une durée exprimée directement en mois donne un résultat douze fois trop grand.

À toi d'essayer : Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Aux intérêts simples, les intérêts sont calculés sur...

1. Le capital augmenté chaque année
2. Le capital initial
3. La seule mensualité

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 26](#)

3.2 Taux proportionnels et durées

Intuition | Construire la notion pas à pas

Partager une année sans capitalisation. Dans un modèle simple, l'intérêt est proportionnel à la durée. Un mois représente un douzième d'année, donc le taux mensuel proportionnel est le taux annuel divisé par 12. Un trimestre représente un quart d'année, donc on divise par 4.

Garder les unités des taux. Un taux de 0,75 pour cent par mois s'écrit 0,0075 en décimal. Le nombre 0,75 n'est pas ce taux décimal : il correspondrait à 75 pour cent. Écrire l'unité « par mois » ou « par an » évite aussi de mélanger les périodes.

Ne pas remplacer une équivalence composée par une proportion. Si les intérêts s'ajoutent au capital chaque mois, les douze coefficients se multiplient. Le taux annuel effectif n'est alors généralement pas douze fois le taux mensuel. La division simple concerne la convention proportionnelle annoncée.

Appliquer une convention de jours donnée. Avec une année de 360 jours, 90 jours représentent un quart d'année. Avec 365 jours, la fraction serait $90/365$. Ces deux conventions produisent des calculs différents ; l'énoncé doit indiquer laquelle utiliser.

Définition | Comprendre la notion

Dans un modèle à intérêts simples, le taux proportionnel mensuel associé au taux annuel t est $t/12$, et le taux trimestriel $t/4$. Les durées s'additionnent sans capitalisation intermédiaire. Cette

proportionnalité ne donne pas le taux équivalent d'un placement à intérêts composés. Le mot employé et le mode de calcul doivent être lus avant de choisir une formule. Pour un calcul en jours, la base annuelle doit être précisée. Avec une convention de 360 jours, 90 jours représentent un quart d'année ; avec 365 jours, la fraction est $90/365$. Les conventions sont des données du modèle, pas des règles universelles à inventer.

Exemple | Exemple commenté

Un taux annuel simple de 6 pour cent correspond au taux mensuel proportionnel $6/12 = 0,5$ pour cent. Sur cinq mois, le taux applicable au capital initial est $5 \times 0,5 = 2,5$ pour cent.

Pour un capital de 2 400 euros, on peut calculer $I = 2\,400 \times 0,005 \times 5 = 60$ euros. La méthode annuelle donne $2\,400 \times 0,06 \times 5/12 = 60$ euros.

On ne calcule pas ici $2\,400(1,005)^5$: cette formule ajouterait une capitalisation mensuelle absente du modèle simple. Le choix de la formule dépend donc du mode de calcul des intérêts, pas seulement de l'unité du taux.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Un taux proportionnel et un taux équivalent composé répondent à deux conventions différentes. Lis le mode de capitalisation avant d'effectuer une division du taux annuel.

À toi d'essayer : Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Le taux trimestriel proportionnel à 12 % annuel est. . .

1. 4 %
2. 1 %
3. 3 %

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 26](#)

3.3 Coût, recette et résultat

Intuition | Construire la notion pas à pas

Séparer les trois grandeurs. Le coût C représente les charges retenues dans le modèle. La recette R représente les sommes issues des ventes. Le résultat B est ce qui reste après paiement de ces coûts : $B = R - C$. Une recette élevée ne garantit donc pas un bénéfice.

Construire une recette. Si toutes les x unités sont vendues au même prix p , $R(x) = px$. Cette formule suppose bien la vente de toute la production ; un stock invendu ou une variation du prix demanderait un autre modèle.

Lire le seuil. Le résultat est nul lorsque la recette compense exactement le coût. Résoudre $B(x) = 0$ donne un seuil mathématique, puis l'étude du signe indique les zones de perte et de bénéfice. Pour des quantités entières, on adapte la frontière aux productions réalisables.

Respecter la capacité. Une activité peut posséder un seuil théorique mais ne pas pouvoir l'atteindre. On doit donc étudier le résultat seulement sur le domaine autorisé et contrôler le meilleur résultat accessible. Les bases HT et TTC et le périmètre des charges doivent rester cohérents.

Définition | Comprendre la notion

Le coût total $C(x)$ rassemble les coûts fixes et les coûts variables pour une production x . Avec un prix unitaire constant p et toutes les unités vendues, la recette est $R(x) = px$. Le résultat est $B(x) = R(x) - C(x)$. Un résultat positif correspond à un bénéfice dans le périmètre des charges retenues ; un résultat négatif à une perte. Le seuil de rentabilité se recherche par $B(x) = 0$, puis par l'étude du signe. Respecte le domaine de production, la capacité maximale et le caractère entier éventuel de x . Une solution réelle sert d'abord de frontière mathématique ; la décision porte ensuite sur les quantités réalisables. Les montants HT/TTC ne doivent pas être mélangés.

Exemple | Exemple commenté

Le coût est $C(x) = 200 + 5x$ et chaque unité est vendue 9 euros. La recette est $R(x) = 9x$. Le résultat vaut $B(x) = 9x - (200 + 5x) = 4x - 200$.

Le terme 4 signifie que chaque unité vendue contribue à hauteur de 4 euros à couvrir les 200 euros fixes, puis au résultat positif. L'égalité $4x - 200 = 0$ donne $x = 50$. À 50 unités, le résultat est nul ; à 49, il vaut -4 euros ; à 51, il vaut 4 euros.

Avec des quantités entières, un bénéfice strict exige donc au moins 51 unités, si la capacité et les ventes le permettent. Le seuil 50 et le premier bénéfice 51 répondent à deux formulations différentes.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Le chiffre d'affaires est une recette, pas le bénéfice. Pour savoir si l'activité gagne ou perd, il faut soustraire les coûts et respecter leur périmètre.

À toi d'essayer : Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Le résultat se calcule par...

1. Recette + coût
2. Recette - coût
3. Coût - recette

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 26](#)

3.4 Coût marginal et dérivée

Intuition | Construire la notion pas à pas

Mesurer le coût d'un ajout. Le coût exact de passer de x à $x + 1$ unités est $C(x + 1) - C(x)$. Il faut soustraire le coût déjà engagé ; le seul montant $C(x + 1)$ est le coût total de toute la nouvelle production.

Relier différence et dérivée. Dans un modèle continu dérivable, la dérivée décrit le taux de variation local. Pour un petit accroissement h , $C(x + h) - C(x) \approx hC'(x)$. Prendre h égal à 1 donne une approximation du coût d'une unité supplémentaire, si cette unité est assez petite à l'échelle du modèle.

Distinguer coût marginal et coût moyen. Le coût moyen $C(x)/x$ répartit le total sur les unités existantes. Le coût marginal s'intéresse à l'augmentation du total. Ces deux questions ne donnent généralement pas le même nombre.

Passer au résultat. Avec un prix unitaire constant p , $B'(x) = p - C'(x)$. Si cette dérivée est positive, une petite augmentation de production améliore le résultat. Un maximum exige une étude du changement de signe et du domaine, et sa valeur peut rester négative.

Définition | Comprendre la notion

Pour une production entière x , le coût exact d'une unité supplémentaire est $C(x + 1) - C(x)$. Dans un modèle continu dérivable, $C'(x)$ approxime ce coût pour un accroissement d'une unité, si la variation locale est suffisamment régulière. La dérivée a les unités d'un coût par unité produite. Elle n'est pas le coût moyen $C(x)/x$. Pour un accroissement h petit, $C(x + h) - C(x) \approx hC'(x)$. Si chaque unité est vendue au prix p constant, la dérivée du résultat vaut $B' = p - C'$. Le signe indique localement si produire davantage améliore le résultat. Le maximum exige ensuite un contrôle de signe et des bornes, pas seulement la résolution d'une égalité.

Exemple | Exemple commenté

Pour $C(x) = x^2 + 10x + 100$, on a $C'(x) = 2x + 10$, donc $C'(20) = 50$. La dérivée estime à 50 unités monétaires le coût d'une unité supplémentaire près de 20.

Le coût exact est $C(21) - C(20) = (441 + 210 + 100) - (400 + 200 + 100) = 751 - 700 = 51$. L'écart d'une unité vient de la courbure du coût : le taux augmente pendant le passage de 20 à 21. On peut le voir directement en développant $C(x + h) - C(x) = (2x + 10)h + h^2$. L'approximation dérivée garde le premier terme et omet h^2 . Pour h égal à 1, le terme omis vaut 1 ; pour h très petit, il devient beaucoup plus faible.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Résoudre $B'(x) = 0$ ne suffit pas : il faut vérifier les variations, le domaine et la valeur de B. Un point stationnaire peut être un minimum, et un maximum peut rester négatif.

À toi d'essayer : Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Le coût exact d'une unité supplémentaire est...

1. $C(x+1) - C(x)$
2. $C(x+1)$
3. $C(x)/x$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 24 [Explication](#), p. 26

3.5 Coût moyen et choix de production

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Répartir un total. Produire x unités pour un coût total C revient en moyenne à un coût C/x par unité. Cette définition exige $x > 0$: on ne répartit pas un coût sur zéro unité.

Comprendre l'effet d'un coût fixe. Si $C(x) = F + vx$, la division donne $C_m(x) = F/x + v$. Le coût fixe F se répartit sur davantage d'unités lorsque x augmente ; sa part unitaire diminue. Le coût variable unitaire v reste inchangé.

Ne pas confondre baisse unitaire et baisse totale. Le coût moyen peut diminuer alors que le coût total augmente. Produire davantage mobilise plus de dépenses, mais les répartit sur un nombre encore plus grand d'unités.

Rechercher un minimum sur le domaine. Avec une formule plus complexe, le coût moyen peut d'abord baisser puis remonter. On étudie sa dérivée sur les quantités strictement positives autorisées, puis on contrôle les bornes et les productions entières si nécessaire. Minimiser le coût moyen ne répond pas automatiquement à la question du bénéfice total maximal.

📖 Définition | Comprendre la notion

Pour $x > 0$, le coût moyen par unité est $C_m(x) = C(x)/x$. Il répartit le coût total sur les unités produites. Les coûts fixes font souvent baisser ce coût moyen au début, car ils sont répartis sur davantage d'unités. Par exemple, si $C(x) = F + vx$, alors $C_m(x) = F/x + v$. Le terme F/x décroît pour $F > 0$, tandis que v représente le coût variable unitaire constant. Avec un coût quadratique, le coût moyen peut ensuite remonter. Étudie sa dérivée sur le domaine de production strictement positif et contrôle les bornes. Minimiser le coût moyen et maximiser le résultat total sont deux objectifs différents.

💡 Exemple | Exemple commenté

Le coût total est $C(x) = 200 + 4x$. Pour $x > 0$, le coût moyen vaut $200/x + 4$. À 20 unités, il est $200/20 + 4 = 14$ euros par unité ; à 100 unités, il est $200/100 + 4 = 6$ euros.

Les coûts totaux valent pourtant $C(20) = 280$ euros et $C(100) = 600$ euros. Ils augmentent tandis que les coûts moyens diminuent. La partie fixe par unité passe de 10 à 2 euros, alors que la partie variable reste 4 euros.

Les contrôles $20 \times 14 = 280$ et $100 \times 6 = 600$ retrouvent les coûts totaux. Le coût de la dernière unité, lui, vaut 4 euros dans ce modèle affine : il ne coïncide pas avec les coûts moyens 14 ou 6.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Le coût moyen et la dérivée du coût total ne représentent pas la même quantité. Le premier répartit une dépense passée ; la seconde décrit son augmentation locale.

À toi d'essayer : Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Le coût moyen est...

1. $x/C(x)$
2. $C(x)/x$
3. $C'(x)$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 25](#) [Explication, p. 26](#)

4 Boîte à outils

✂ Méthode | Les intérêts simples

1. Repère le capital initial, le taux et sa période de référence.
2. Convertis le taux en décimal et la durée dans la même unité de temps.
3. Calcule $I = Ctd$, ou résous cette relation si une donnée est inconnue.
4. Ajoute le capital seulement si la valeur acquise est demandée.
5. Contrôle les unités, la convention de durée et la proportionnalité du résultat.

✂ Méthode | Taux proportionnels et durées

1. Identifie le modèle simple et la convention proportionnelle.
2. Compte le nombre de périodes dans l'année : 12 mois, 4 trimestres ou la base de jours donnée.
3. Divise le taux annuel par ce nombre pour obtenir un taux par période.
4. Utilise un taux décimal et un nombre de périodes compatibles.
5. Contrôle le calcul en revenant à une fraction d'année.

✂ Méthode | Coût, recette et résultat

1. Définis x et son domaine : entier ou réel, capacité maximale et ventes possibles.
2. Écris coût et recette sur une même base monétaire.

3. Calcule $B = R - C$ en distribuant correctement le signe moins.
4. Résous $B = 0$ puis étudie le signe sur le domaine autorisé.
5. Contrôle les quantités proches du seuil et précise nul, positif ou négatif.

✂ Méthode | Coût marginal et dérivée

1. Distingue coût total, coût moyen et coût de l'unité supplémentaire.
2. Pour l'exact, calcule $C(x+1) - C(x)$ avec les parenthèses.
3. Pour l'approximation locale, calcule $C'(x)$ et précise l'accroissement utilisé.
4. Pour un résultat, étudie le signe de $p - C'(x)$ sur le domaine.
5. Calcule la valeur du résultat à l'optimum avant de parler de bénéfice.

✂ Méthode | Coût moyen et choix de production

1. Vérifie que la quantité produite est strictement positive.
2. Écris $C_m(x) = C(x)/x$ et simplifie terme par terme.
3. Calcule les valeurs demandées ou étudie la dérivée sur le domaine autorisé.
4. Pour un minimum, contrôle le changement de signe et les bornes.
5. Exprime le résultat par unité et distingue cet objectif du coût total ou du bénéfice.

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases ; 6 à 10 demandent plusieurs étapes ; 11 à 15 t'invitent à choisir, justifier et contrôler. Cherche avant de consulter les indices.

Exercice 1 — Un an ★★☆☆

Calcule les intérêts de 1 500 euros à 4 % annuel pendant un an.

Exercice 2 — Taux mensuel ★★☆☆

Calcule le taux mensuel proportionnel à 9 % annuel.

Exercice 3 — Construire la recette ★★☆☆

Un produit se vend 12 euros l'unité. Écris $R(x)$ et calcule $R(80)$.

Exercice 4 — Une différence de coûts ★★☆☆

$C(x) = 3x + 50$. Calcule le coût exact d'une unité supplémentaire.

Exercice 5 — Un coût unitaire moyen ★★☆☆

Le coût total de 50 unités vaut 800 euros. Calcule le coût moyen.

Exercice 6 — Une durée en mois ★★☆☆

Calcule les intérêts de 3 600 euros à 5 % annuel pendant 4 mois.

Exercice 7 — Durée trimestrielle ★★☆☆

Un capital de 4 000 euros est placé à 8 % annuel simple pendant deux trimestres. Calcule I .

Exercice 8 — Un seuil ★★☆☆

$C(x) = 300 + 6x$, $R(x) = 10x$. Trouve le seuil de rentabilité.

Exercice 9 — Comparer exact et approché ★★☆☆

$C(x) = 2x^2 + 5x + 20$. Compare $C(11) - C(10)$ à $C'(10)$.

Exercice 10 — Coûts fixes répartis ★★☆☆

$C(x) = 120 + 3x$. Compare les coûts moyens à 20 et 60 unités.

Exercice 11 — Retrouver une durée ★★★

À intérêts simples de 6 % annuel, 2 000 euros rapportent 90 euros. Trouve la durée en mois.

Exercice 12 — Convention journalière ★★★

Calcule les intérêts de 7 200 euros à 5 % simple pendant 45 jours, avec une année conventionnelle de 360 jours.

Exercice 13 — Une capacité limitée ★★★

$B(x) = 5x - 600$, avec une capacité de 100 unités. L'activité peut-elle être rentable dans ce modèle ?

Exercice 14 — Produire davantage ? ★★ ★

$C(x) = x^2 + 4x + 80$ et le prix unitaire est 20. Étudie le signe de la dérivée du résultat pour $x \geq 0$.

Exercice 15 — Un minimum ★★ ★

$C_m(x) = x + 100/x$ pour $x > 0$. Détermine son minimum.

6 Problème — Pour aller plus loin

Financer une production et étudier ses coûts

Le coût total est $C(x) = x^2 + 10x + 100$ euros pour $1 \leq x \leq 20$ unités. Chaque unité est vendue 40 euros. Un financement de 600 euros est disponible à 6 % annuel simple pendant 4 mois.

1. Calcule recette et résultat pour x unités.
2. Étudie le maximum du résultat sur le domaine.
3. Compare le coût exact de la 11e unité à la dérivée $C'(10)$.
4. Calcule le coût moyen en $x = 10$ et interprète.
5. Calcule les intérêts du financement et leur effet sur le résultat si cette charge n'est pas déjà incluse dans C .

7 Indices des exercices

Exercice 1

Indice 1. Convertis le pourcentage en nombre décimal.

Indice 2. Le capital initial ne change pas pendant le calcul.

Exercice 2

Indice 1. Une année compte 12 mois.

Indice 2. Conserve l'unité « par mois ».

Exercice 3

Indice 1. $\text{Recette} = \text{quantité vendue} \times \text{prix}$.

Indice 2. Ne confonds pas recette et résultat.

Exercice 4

Indice 1. Écris $C(x + 1)$ puis soustrais $C(x)$.

Indice 2. Les coûts fixes disparaissent.

Exercice 5

Indice 1. Divise le total par la quantité.

Indice 2. Indique « euros par unité ».

Exercice 6

Indice 1. Le taux est annuel.

Indice 2. Quatre mois représentent un tiers d'année.

Exercice 7

Indice 1. Deux trimestres font six mois.

Indice 2. La base de capital reste 4 000 euros.

Exercice 8

Indice 1. Forme $R - C$.

Indice 2. Distingue résultat nul et bénéfice strict.

Exercice 9

Indice 1. Calcule les deux grandeurs séparément.

Indice 2. La dérivée se prend au point de départ.

Exercice 10

Indice 1. Sépare fixe et variable après division.

Indice 2. Le terme 3 reste constant.

Exercice 11

Indice 1. Isole d dans $I = Ctd$.

Indice 2. Convertis ensuite les années en mois.

Exercice 12

Indice 1. Utilise la fraction $45/360$.

Indice 2. Le dénominateur est une donnée explicite.

Exercice 13

Indice 1. Calcule le seuil puis compare au domaine.

Indice 2. Une solution hors du domaine n'est pas réalisable.

Exercice 14

Indice 1. La dérivée de la recette est le prix unitaire.

Indice 2. Un maximum peut rester négatif.

Exercice 15

Indice 1. Utilise la dérivée de $1/x$.

Indice 2. La racine négative est hors du domaine.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le taux est annuel et la durée est exactement une année.

Construire la réponse.

1. On convertit 4 pour cent en $t = 0,04$ et l'on prend $d = 1$.
2. Les intérêts valent $I = 1\,500 \times 0,04 \times 1 = 60$ euros.
3. La valeur acquise serait $1\,500 + 60 = 1\,560$ euros.

Vérifier. $60/1\,500 = 0,04$ retrouve le taux de l'année. Le montant 1 560 contient le capital, alors que les intérêts seuls valent 60.

Conclure. Les intérêts sont de 60 euros.

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Une année contient douze mois et le taux demandé est proportionnel.

Construire la réponse.

1. Le taux mensuel est $9/12 = 0,75$ pour cent.
2. En écriture décimale, cela vaut $0,75/100 = 0,0075$.

Vérifier. Douze fois 0,75 pour cent redonnent 9 pour cent dans le modèle simple. Cette vérification porte sur l'addition des intérêts, pas sur une capitalisation.

Conclure. Le taux mensuel proportionnel est 0,75 pour cent, soit 0,0075.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Chaque unité vendue rapporte 12 euros et toutes les x unités sont supposées vendues à ce prix.

Construire la réponse.

1. La recette est le produit du prix par la quantité : $R(x) = 12x$.
2. Pour 80 unités, $R(80) = 12 \times 80 = 960$ euros.

Vérifier. $960/80 = 12$ retrouve le prix unitaire. Les coûts n'ont pas encore été déduits : 960 est une recette, pas un bénéfice.

Conclure. $R(x) = 12x$ et $R(80) = 960$ euros.

Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On cherche la différence entre deux coûts totaux consécutifs.

Construire la réponse.

1. $C(x+1) = 3(x+1) + 50 = 3x + 3 + 50$.
2. On soustrait $C(x) = 3x + 50$: $C(x+1) - C(x) = 3x + 3 + 50 - 3x - 50 = 3$.

Vérifier. La dérivée du coût affine vaut aussi 3. Dans ce cas, le taux est constant et l'approximation par dérivée est exactement la différence.

Conclure. Une unité supplémentaire coûte exactement 3 unités monétaires.

Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le coût moyen répartit les 800 euros entre les 50 unités.

Construire la réponse.

1. On calcule $C_m = 800/50 = 16$ euros par unité.

Vérifier. $50 \times 16 = 800$ reconstitue le coût total. Le résultat est une moyenne de répartition et ne révèle pas le coût exact de la cinquantième unité.

Conclure. Le coût moyen est de 16 euros par unité.

Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Quatre mois ne représentent pas quatre années ; il faut convertir la durée.

Construire la réponse.

1. La durée vaut $d = 4/12 = 1/3$ année.
2. Les intérêts annuels sur 3 600 euros seraient $3\,600 \times 0,05 = 180$ euros.
3. Pour un tiers d'année, $I = 180/3 = 60$ euros.

Vérifier. Un mois produit proportionnellement $180/12 = 15$ euros ; quatre mois donnent 60. Utiliser d égal à 4 aurait donné 720 euros, soit douze fois trop.

Conclure. Les intérêts pour quatre mois sont de 60 euros.

Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Deux trimestres représentent une demi-année et les intérêts sont simples.

Construire la réponse.

1. Le taux trimestriel proportionnel est $8/4 = 2$ pour cent, soit 0,02.
2. Pour deux trimestres, $I = 4\,000 \times 0,02 \times 2 = 160$ euros.

Vérifier. La méthode annuelle donne $4\,000 \times 0,08 \times (2/4) = 160$ euros. La base reste 4 000 euros pendant les deux trimestres.

Conclure. Les intérêts valent 160 euros.

Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le seuil de rentabilité correspond à un résultat nul.

Construire la réponse.

1. $B(x) = 10x - (300 + 6x) = 10x - 300 - 6x = 4x - 300$.
2. L'équation $4x - 300 = 0$ donne $4x = 300$, puis $x = 75$.
3. Comme le coefficient 4 est positif, le résultat est négatif avant 75 et positif après 75. Pour un bénéfice strict avec x entier, le premier choix est 76.

Vérifier. À 75, recette et coût valent tous deux 750 euros. À 76, le résultat vaut $304 - 300 = 4$ euros.

Conclure. Le seuil est 75 unités ; un bénéfice strict apparaît à partir de 76 unités vendues dans ce modèle.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On compare une différence exacte à une approximation locale au point 10.

Construire la réponse.

1. $C(11) = 2 \times 121 + 5 \times 11 + 20 = 242 + 55 + 20 = 317$.
2. $C(10) = 2 \times 100 + 50 + 20 = 270$. La différence exacte vaut $317 - 270 = 47$.
3. La dérivée est $C'(x) = 4x + 5$, donc $C'(10) = 40 + 5 = 45$.

Vérifier. Le développement de $C(x+1) - C(x)$ donne $4x + 7$, soit 47 en x égal à 10. La dérivée sous-estime donc ici la différence exacte de 2 unités monétaires.

Conclure. Le coût exact supplémentaire vaut 47, contre une approximation de 45 par la dérivée.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le coût comporte 120 euros fixes et 3 euros variables par unité.

Construire la réponse.

1. Pour $x > 0$, $C_m(x) = (120 + 3x)/x = 120/x + 3$.
2. À 20 unités, $C_m(20) = 120/20 + 3 = 6 + 3 = 9$ euros.
3. À 60 unités, $C_m(60) = 120/60 + 3 = 2 + 3 = 5$ euros.

Vérifier. Les coûts totaux sont 180 et 300 euros, retrouvés par 20×9 et 60×5 . La part fixe par unité baisse de 6 à 2 euros, expliquant la diminution du coût moyen.

Conclure. Le coût moyen passe de 9 à 5 euros par unité lorsque la production passe de 20 à 60.

Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La durée est inconnue ; on l'isole dans la formule des intérêts simples.
Construire la réponse.

1. On écrit $90 = 2000 \times 0,06 \times d = 120d$.
2. En divisant par 120, $d = 90/120 = 0,75$ année.
3. On convertit en mois : $0,75 \times 12 = 9$.

Vérifier. $2000 \times 0,06 \times 9/12 = 90$ euros retrouve les intérêts donnés.

Conclure. La durée est de 9 mois.

Corrigé 12

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La convention imposée est une année de 360 jours.

Construire la réponse.

1. La durée annuelle est $45/360 = 1/8$.
2. Les intérêts pour une année seraient $7200 \times 0,05 = 360$ euros.
3. Pour un huitième d'année, $I = 360/8 = 45$ euros.

Vérifier. Le calcul direct $7200 \times 0,05 \times 45/360$ redonne 45. Remplacer 360 par 365 ne respecterait pas la convention de l'énoncé.

Conclure. Les intérêts sont de 45 euros selon la base de 360 jours.

Corrigé 13

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le seuil théorique doit être comparé à la capacité maximale de 100 unités.

Construire la réponse.

1. $5x - 600 = 0$ donne $x = 600/5 = 120$. Ce seuil dépasse la capacité.
2. La fonction B est croissante puisque son coefficient 5 est positif. Son plus grand résultat sur $[0; 100]$ est donc $B(100) = 500 - 600 = -100$.
3. Même à capacité maximale, le résultat reste négatif.

Vérifier. Les productions inférieures à 100 donnent des résultats encore plus faibles. Trouver 120 dans l'équation ne rend pas cette quantité réalisable.

Conclure. Non : l'activité reste déficitaire sur tout le domaine autorisé par ce modèle.

Corrigé 14

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On étudie d'abord les variations du résultat, puis son signe à la meilleure production.

Construire la réponse.

1. La recette est $20x$ et le résultat $B(x) = 20x - (x^2 + 4x + 80) = -x^2 + 16x - 80$.

2. $B'(x) = 16 - 2x$. Cette dérivée est positive pour $0 \leq x < 8$, nulle en 8 et négative pour $x > 8$.
3. B augmente donc jusqu'à 8 puis diminue : son maximum sur les réels positifs est atteint en 8.
4. La valeur maximale est $B(8) = -64 + 128 - 80 = -16$.

Vérifier. La forme $B(x) = -(x - 8)^2 - 16$ confirme que le résultat ne dépasse jamais -16. Un maximum n'est donc pas nécessairement un bénéfice.

Conclure. Le meilleur résultat est atteint pour 8 unités, mais il reste une perte de 16 unités monétaires dans ce modèle.

Corrigé 15

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On recherche le minimum d'une fonction définie seulement pour x strictement positif.

Construire la réponse.

1. La dérivée est $C'_m(x) = 1 - 100/x^2 = (x^2 - 100)/x^2$.
2. Le dénominateur x^2 est positif. Au numérateur, $x^2 - 100 = (x - 10)(x + 10)$ et $x + 10 > 0$ sur le domaine.
3. Le signe est donc celui de $x - 10$: négatif avant 10, nul en 10, positif après 10.
4. La fonction décroît puis croît ; son minimum vaut $C_m(10) = 10 + 100/10 = 20$.

Vérifier. On peut vérifier directement $x + 100/x - 20 = (x - 10)^2/x \geq 0$ pour $x > 0$, avec égalité seulement en 10.

Conclure. Le minimum est 20, atteint pour x égal à 10.

9 Corrigé du problème

1. **Comprendre la question.** La recette est le prix unitaire multiplié par la quantité vendue ; le résultat retire ensuite tous les coûts du modèle.

Construire la réponse.

(a) Si toutes les unités sont vendues au prix de 40 euros, $R(x) = 40x$.

(b) Le résultat est $B(x) = R(x) - C(x) = 40x - (x^2 + 10x + 100)$.

(c) En distribuant le signe moins, $B(x) = -x^2 + 30x - 100$.

Vérifier. Les trois termes du coût doivent être soustraits, y compris le coût fixe 100.

Conclure. $R(x) = 40x$ et $B(x) = -x^2 + 30x - 100$ euros sur $[1; 20]$.

2. **Comprendre la question.** On cherche le meilleur résultat dans le domaine de production autorisé.

Construire la réponse.

(a) $B'(x) = -2x + 30 = -2(x - 15)$.

(b) La dérivée est positive avant 15 puis négative après : B croît puis décroît.

(c) $B(15) = -225 + 450 - 100 = 125$ euros.

(d) Aux bornes, $B(1) = -71$ et $B(20) = 100$ euros. La valeur 125 est la plus grande.

Vérifier. Le choix 15 est entier et appartient au domaine. Il reste donc réalisable même si la production doit être un nombre entier d'unités.

Conclure. Le résultat maximal est de 125 euros pour 15 unités.

3. **Comprendre la question.** Le coût exact d'une unité supplémentaire est une différence de coûts totaux ; la dérivée est une approximation locale.

Construire la réponse.

(a) $C(10) = 100 + 100 + 100 = 300$ euros.

(b) $C(11) = 121 + 110 + 100 = 331$ euros, donc la onzième unité ajoute $331 - 300 = 31$ euros.

(c) La dérivée est $C'(x) = 2x + 10$, d'où $C'(10) = 30$.

Vérifier. Le passage de 10 à 11 a une amplitude 1 : l'approximation par la tangente ne tient pas compte du terme quadratique supplémentaire, ici égal à 1 euro.

Conclure. Le coût exact supplémentaire est 31 euros ; l'approximation par la dérivée est 30 euros.

4. **Comprendre la question.** Le coût moyen répartit le coût total sur toutes les unités produites.

Construire la réponse.

(a) Pour dix unités, le coût total est 300 euros.

(b) Le coût moyen vaut donc $C(10)/10 = 300/10 = 30$ euros par unité.

(c) On peut aussi écrire $C(x)/x = x + 10 + 100/x$: la dernière fraction répartit le coût fixe.

Vérifier. Cette moyenne ne donne pas le coût exact de la dernière unité. Son égalité numérique avec la dérivée en 10 est particulière aux données choisies.

Conclure. À dix unités, le coût moyen est de 30 euros par unité.

5. **Comprendre la question.** Le taux est annuel et la durée quatre mois doit être convertie en années.

Construire la réponse.

(a) La durée vaut $4/12 = 1/3$ année.

(b) Les intérêts simples sont $600 \times 0,06 \times (1/3) = 12$ euros.

(c) Si ces intérêts ne figurent pas déjà dans C, le résultat net devient B moins 12.

(d) Cette charge constante ne change pas la quantité optimale 15, mais réduit le maximum à $125 - 12 = 113$ euros.

Vérifier. Le coût d'une année entière serait 36 euros ; quatre mois en représentent le tiers. Il faut éviter de soustraire deux fois une charge déjà incluse.

Conclure. Les intérêts sont 12 euros ; s'ils s'ajoutent aux coûts du modèle, le maximum net devient 113 euros.

10 Variante autonome et bilan

Pour $C(x) = 2x^2 + 50$ et un prix de 20 euros, trouve le résultat maximal sur $[1; 10]$.

À toi d'essayer : Vérifie ta démarche

Résous la variante, puis explique pourquoi ta méthode s'applique.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 25](#) [Explication, p. 26](#)

- Je peux expliquer : les intérêts simples.
- Je peux expliquer : taux proportionnels et durées.
- Je peux expliquer : coût, recette et résultat.
- Je peux expliquer : coût marginal et dérivée.
- Je peux expliquer : coût moyen et choix de production.

11 Fiche-mémoire

Les intérêts simples.

1. Repère le capital initial, le taux et sa période de référence.
2. Convertis le taux en décimal et la durée dans la même unité de temps.
3. Calcule $I = Ctd$, ou résous cette relation si une donnée est inconnue.
4. Ajoute le capital seulement si la valeur acquise est demandée.
5. Contrôle les unités, la convention de durée et la proportionnalité du résultat.

Taux proportionnels et durées.

1. Identifie le modèle simple et la convention proportionnelle.
2. Compte le nombre de périodes dans l'année : 12 mois, 4 trimestres ou la base de jours donnée.
3. Divise le taux annuel par ce nombre pour obtenir un taux par période.
4. Utilise un taux décimal et un nombre de périodes compatibles.
5. Contrôle le calcul en revenant à une fraction d'année.

Coût, recette et résultat.

1. Définis x et son domaine : entier ou réel, capacité maximale et ventes possibles.
2. Écris coût et recette sur une même base monétaire.
3. Calcule $B = R - C$ en distribuant correctement le signe moins.
4. Résous $B = 0$ puis étudie le signe sur le domaine autorisé.
5. Contrôle les quantités proches du seuil et précise nul, positif ou négatif.

Coût marginal et dérivée.

1. Distingue coût total, coût moyen et coût de l'unité supplémentaire.
2. Pour l'exact, calcule $C(x+1) - C(x)$ avec les parenthèses.
3. Pour l'approximation locale, calcule $C'(x)$ et précise l'accroissement utilisé.
4. Pour un résultat, étudie le signe de $p - C'(x)$ sur le domaine.
5. Calcule la valeur du résultat à l'optimum avant de parler de bénéfice.

Coût moyen et choix de production.

1. Vérifie que la quantité produite est strictement positive.
2. Écris $C_m(x) = C(x)/x$ et simplifie terme par terme.
3. Calcule les valeurs demandées ou étudie la dérivée sur le domaine autorisé.
4. Pour un minimum, contrôle le changement de signe et les bornes.
5. Exprime le résultat par unité et distingue cet objectif du coût total ou du bénéfice.

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Dans le modèle simple, les intérêts précédents ne sont pas capitalisés.

Indice 2 — Un pas de plus.

La base ne change pas d'une période à l'autre.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Une année contient quatre trimestres.

Indice 2 — Un pas de plus.

Le taux proportionnel partage le taux annuel entre ces quatre périodes.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Le résultat mesure ce qui reste après paiement des charges retenues.

Indice 2 — Un pas de plus.

On retire donc le coût des ventes encaissées.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Le coût de la nouvelle unité s'ajoute au coût déjà engagé.

Indice 2 — Un pas de plus.

On soustrait l'ancien total au nouveau.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve**Indice 1 — Une piste.**

Le coût total doit être partagé entre les x unités produites.

Indice 2 — Un pas de plus.

La quantité x est donc au dénominateur.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche**Indice 1 — Une piste.**

Repère les données utiles et l'inconnue. Reviens à la méthode correspondante dans la boîte à outils.

Indice 2 — Un pas de plus.

Contrôle les unités, les bornes et la plausibilité du résultat avant de lire la correction.

[Revenir à la recherche, p. 23](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Les intérêts sont calculés sur le capital initial.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

$12/4 = 3$ pour cent par trimestre.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

$B(x) = R(x) - C(x)$.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Le coût exact est $C(x+1) - C(x)$.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Pour $x > 0$, le coût moyen est $C(x)/x$.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche

Comprendre la question. La variante peut avoir un maximum sans produire un bénéfice positif.

Construire la réponse.

1. La recette est $20x$ et le résultat $B(x) = 20x - (2x^2 + 50) = -2x^2 + 20x - 50$.
2. La dérivée $20 - 4x$ s'annule en 5, est positive avant et négative après.
3. $B(5) = -50 + 100 - 50 = 0$. Aux bornes, $B(1) = -32$ et $B(10) = -50$.

Vérifier. La forme $B(x) = -2(x-5)^2$ confirme que le résultat ne peut pas dépasser zéro.

Conclure. Le maximum est zéro euro pour cinq unités : le modèle atteint seulement l'équilibre financier.

[Revenir à la recherche, p. 23](#)