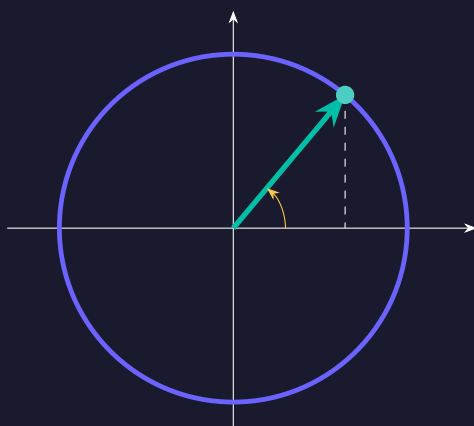


FICHE 09

Cercle trigonométrique et sinusoides

Géométrie ■ Comprendre et s'entraîner



Première professionnelle
Année scolaire 2026–2027

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	Pourquoi ce chapitre ?	3
2	L'idée avant la formule	3
3	Le cours formel	3
3.1	Mesurer les angles en radians	3
3.2	Lire sinus et cosinus sur le cercle	5
3.3	Angles associés et symétries	6
3.4	Comprendre les courbes sinus et cosinus	7
3.5	Amplitude, période et phase d'un signal	8
4	Boîte à outils	9
5	Exercices progressifs	11
6	Problème — Pour aller plus loin	13
7	Indices des exercices	14
8	Corrigés détaillés	16
9	Corrigé du problème	21
10	Variante autonome et bilan	23
11	Fiche-mémoire	23
12	Indices des pauses et des preuves	25
13	Explications des pauses et des preuves	27

1 Pourquoi ce chapitre ?

Une sinusoïde traduit les caractéristiques d'un mouvement périodique : amplitude, période et position moyenne. **Ton parcours.** Module du programme professionnel pour les groupements A, B. Les automatismes, le raisonnement et les outils numériques se travaillent tout au long du parcours.

- Mesurer les angles en radians.
- Lire sinus et cosinus sur le cercle.
- Angles associés et symétries.
- Comprendre les courbes sinus et cosinus.
- Amplitude, période et phase d'un signal.

2 L'idée avant la formule

La projection d'un point qui tourne sur un cercle oscille. Augmenter la vitesse raccourcit la période sans changer l'amplitude.

3 Le cours formel

3.1 Mesurer les angles en radians

Intuition | Construire la notion pas à pas

Mesurer un angle par un arc. Sur un cercle de rayon r , un angle au centre qui intercepte un arc de longueur r mesure un radian. Plus généralement, la mesure en radians est le rapport longueur de l'arc sur rayon. Ce rapport ne dépend pas de la taille du cercle.

Retrouver le tour complet. La circonférence vaut $2\pi r$. Un tour mesure donc $2\pi r / r = 2\pi$ radians. Le demi-tour vaut π radians, ce qui donne la correspondance $180^\circ = \pi$.

Convertir par proportionnalité. Pour passer des degrés aux radians, on multiplie par $\pi/180$. Dans l'autre sens, on multiplie par $180/\pi$. On conserve les fractions de π exactes lorsque c'est possible ; remplacer trop tôt π par 3,14 perd de la précision.

Distinguer mesure et position. Un angle orienté positif tourne dans le sens direct ; un angle négatif dans l'autre sens. Ajouter un tour complet modifie la mesure parcourue mais pas la position finale. Pour la mesure principale dans $] -\pi; \pi]$, on retire ou ajoute des multiples de 2π jusqu'à entrer dans cet intervalle.

Définition | Comprendre la notion

Un radian est l'angle qui intercepte sur un cercle un arc de longueur égale au rayon. Un tour complet correspond à 2π radians, donc $180^\circ = \pi$ radians. Pour convertir des degrés en radians, multiplie par $\pi/180$; dans l'autre sens, multiplie par $180/\pi$. Garde les multiples de π sous forme exacte quand c'est possible. Un angle orienté peut être positif ou négatif. Deux mesures qui diffèrent d'un multiple entier de 2π représentent la même position sur le cercle. La mesure principale appartient ici à $] -\pi; \pi]$: on retire ou ajoute des tours entiers.

Exemple | Exemple commenté

Pour convertir 60° , on écrit $60 \times \pi/180 = \pi/3$. On peut aussi raisonner en fraction de tour : 60 degrés représentent un sixième de tour, donc $2\pi/6 = \pi/3$.

L'angle $13\pi/6$ contient un tour complet $12\pi/6$ et un reste $\pi/6$. En retirant 2π , on obtient donc la même position au point d'angle $\pi/6$. Cette valeur appartient à $] -\pi; \pi]$: c'est la mesure principale. Pour $-\pi$, la convention de cet intervalle exige de prendre π , car la borne gauche est exclue et la droite incluse. Les deux mesures représentent la même direction, mais une seule appartient à l'intervalle choisi.

 Attention | Comprendre une erreur fréquente

Retirer π effectue un demi-tour et change généralement la position sur le cercle. Pour conserver la position, on ajoute ou retire des multiples de 2π .

À toi d'essayer : Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

90° correspond à...

1. 2π
2. π
3. $\pi/2$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 25](#) [Explication, p. 27](#)

3.2 Lire sinus et cosinus sur le cercle

Intuition | Construire la notion pas à pas

Relier un angle à un point. Sur le cercle de rayon 1, on part du point $(1;0)$ et l'on tourne de l'angle x . Le point atteint possède par définition les coordonnées $(\cos x; \sin x)$. Le cosinus est horizontal, le sinus vertical.

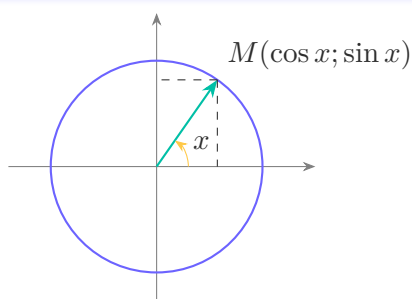
Comprendre les bornes. Un point du cercle unité a ses deux coordonnées entre -1 et 1 . Cela explique pourquoi sinus et cosinus ne peuvent dépasser ces limites. Les points extrêmes des axes donnent immédiatement les valeurs en $0, \pi/2, \pi$ et $3\pi/2$.

Retrouver une identité par Pythagore. La distance à l'origine vaut 1. Le carré de cette distance est la somme des carrés des coordonnées, donc $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Cette relation permet de retrouver la valeur absolue d'une coordonnée à partir de l'autre.

Choisir le signe avec la position. Résoudre une équation au carré donne souvent deux signes. Le quadrant de l'angle décide lequel convient. Sans indication de quadrant, une même abscisse peut correspondre à un point au-dessus et à un point au-dessous de l'axe.

Définition | Comprendre la notion

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1 dans un repère orthonormé direct. Le point associé à l'angle x a pour coordonnées $(\cos x; \sin x)$. Le cosinus est l'abscisse, le sinus l'ordonnée. Ainsi $-1 \leq \cos x \leq 1$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ par Pythagore. Pour $x = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$, les cosinus valent respectivement $1, \sqrt{3}/2, \sqrt{2}/2, 1/2, 0$; les sinus $0, 1/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{3}/2, 1$. En π , le point est $(-1; 0)$. Les signes se lisent selon le quadrant; la calculatrice doit être en mode radian pour une mesure en radians.



Exemple | Exemple commenté

Pour $x = \pi/3$, le point du cercle est $(1/2; \sqrt{3}/2)$. Son cosinus vaut donc $1/2$ et son sinus $\sqrt{3}/2$. Les deux nombres sont positifs, comme attendu dans le premier quadrant.

Le contrôle de la distance donne $(1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2 = 1/4 + 3/4 = 1$. Le point se situe bien sur le cercle unité.

Le point d'angle $-\pi/3$ a la même abscisse $1/2$, mais l'ordonnée opposée $-\sqrt{3}/2$. Connaître seulement le cosinus ne suffit donc pas à connaître le sinus sans préciser la position. La figure permet de comprendre les deux solutions avant de les calculer.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

L'identité de Pythagore donne un carré ; elle ne donne pas le signe du sinus ou du cosinus. Le signe doit venir du quadrant ou d'une information supplémentaire.

À toi d'essayer : Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Sur le cercle, le sinus est. . .

1. Le rayon
2. L'abscisse
3. L'ordonnée

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 25](#) [Explication, p. 27](#)

3.3 Angles associés et symétries

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Reconstruire les signes avec les symétries. Le point d'angle $-x$ est le reflet de celui d'angle x dans l'axe horizontal. L'abscisse reste identique et l'ordonnée change de signe : le cosinus est pair et le sinus impair.

Passer à l'autre côté du cercle. L'angle $\pi - x$ reflète le point par rapport à l'axe vertical : le cosinus change de signe, pas le sinus. Ajouter π effectue un demi-tour : les deux coordonnées changent de signe.

Échanger sinus et cosinus. Dans le premier quadrant, les angles x et $\pi/2 - x$ sont complémentaires. La symétrie par rapport à la droite $y = x$ échange les coordonnées : le cosinus du premier devient le sinus du second, et réciproquement.

Choisir un angle de référence simple. Pour calculer une valeur comme $\cos(5\pi/6)$, on repère l'angle remarquable $\pi/6$ et la symétrie qui mène au bon quadrant. On conserve la valeur absolue correspondante puis on vérifie le signe avec la position, plutôt que d'apprendre une formule isolée sans image.

📖 Définition | Comprendre la notion

Les symétries du cercle donnent $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$. Le point d'angle $\pi - x$ est symétrique par rapport à l'axe vertical : son cosinus est $-\cos x$ et son sinus $\sin x$. Le point d'angle $\pi + x$ est opposé : ses deux coordonnées changent de signe. Pour les angles complémentaires, $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$ et $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$. Enfin $\cos(\pi/2 + x) = -\sin x$ et $\sin(\pi/2 + x) = \cos x$.

Ces relations se comprennent sur la figure : mieux vaut reconstruire le signe avec le quadrant que mémoriser une liste sans repère.

💡 Exemple | Exemple commenté

L'angle $5\pi/6$ s'écrit $\pi - \pi/6$. Son point est le symétrique de celui de $\pi/6$ par rapport à l'axe vertical. L'abscisse change de signe et l'ordonnée reste la même.

Ainsi $\cos(5\pi/6) = -\cos(\pi/6) = -\sqrt{3}/2$ et $\sin(5\pi/6) = \sin(\pi/6) = 1/2$. Le deuxième quadrant possède bien une abscisse négative et une ordonnée positive.

À l'angle $7\pi/6 = \pi + \pi/6$, on aurait effectué un demi-tour depuis $\pi/6$: les deux coordonnées seraient négatives. Comparer ces deux angles voisins de π permet de contrôler lequel garde ou inverse le sinus.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Un demi-tour $\pi + x$ change les deux signes, alors que la symétrie $\pi - x$ conserve le sinus. Repère le quadrant final avant de décider des signes.

À toi d'essayer : Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

$\sin(-x) =$

1. $-\sin x$
2. $\sin x$
3. $\cos x$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 25](#) [Explication, p. 27](#)

3.4 Comprendre les courbes sinus et cosinus

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Transformer le mouvement du cercle en courbe. Quand l'angle x augmente, le point tourne sur le cercle. Sa hauteur donne $\sin x$ et son abscisse $\cos x$. En reportant ces valeurs en fonction de x , on obtient des courbes qui montent et descendent régulièrement.

Comprendre la période. Après un tour complet, le point retrouve ses coordonnées. On a donc $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. La période usuelle 2π permet de prolonger la courbe par répétition d'un motif.

Lire les variations sur des intervalles. Sur $[0; \pi]$, le point va de la droite vers la gauche et son abscisse diminue : le cosinus décroît de 1 à -1. Sur $[-\pi/2; \pi/2]$, l'ordonnée passe du bas vers le haut : le sinus croît de -1 à 1.

Éviter une généralisation locale. Une portion croissante ne rend pas la fonction croissante sur tous les réels. Le retour périodique oblige à alterner montées et descentes. Avant de comparer des valeurs avec les variations, on vérifie que les deux angles sont dans un même intervalle où le sens est connu.

Définition | Comprendre la notion

Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$ et de période 2π : ajouter un tour ne change pas leur valeur. Le cosinus est pair, le sinus impair. Sur $[0; \pi]$, le cosinus décroît de 1 à -1 . Sur $[-\pi/2; \pi/2]$, le sinus croît de -1 à 1, puis décroît de 1 à -1 sur $[\pi/2; 3\pi/2]$. Les valeurs restent entre -1 et 1. La relation $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ relie les deux courbes par un décalage horizontal. Une courbe périodique se prolonge en répétant le même motif, pas en continuant une seule branche croissante.

Exemple | Exemple commenté

Pour tracer un motif du sinus sur $[0; 2\pi]$, on place les points $(0; 0)$, $(\pi/2; 1)$, $(\pi; 0)$, $(3\pi/2; -1)$ et $(2\pi; 0)$. Entre eux, on suit un mouvement régulier : montée jusqu'à 1, descente jusqu'à -1 , puis remontée vers zéro.

La courbe reste toujours entre -1 et 1. On ne relie pas les points par des segments si l'on veut représenter la sinusoïde ; on utilise une courbe lisse cohérente avec le mouvement du cercle.

Le motif se répète après 2π . Pour x égal à $2\pi + \pi/6$, on revient donc à la hauteur de $\pi/6$, soit $1/2$. Cette répétition explique la périodicité sans refaire un calcul complet.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

La périodicité n'est pas une croissance répétée sans retour. Un motif complet contient les variations nécessaires pour revenir à la valeur initiale.

À toi d'essayer : Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

La période usuelle de sin et cos est...

1. π
2. 2π
3. 1

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 25 [Explication](#), p. 27

3.5 Amplitude, période et phase d'un signal

Intuition | Construire la notion pas à pas

Séparer hauteur et rythme. Dans $s(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ avec $A > 0$ et $\omega > 0$, A fixe l'écart maximal à zéro. La pulsation ω règle la vitesse à laquelle l'angle avance ; elle ne donne pas directement le nombre de cycles par seconde.

Construire la période. Un motif se répète lorsque l'angle a augmenté de 2π . Pendant une durée T , l'angle augmente de ωT . On impose donc $\omega T = 2\pi$, d'où $T = 2\pi/\omega$. Si t est en secondes, T est en secondes et la fréquence $f = 1/T$ en hertz.

Lire la phase initiale. À t égal à zéro, l'angle vaut φ . Le signal commence donc à $A \sin \varphi$, pas forcément à zéro. Modifier φ déplace le motif dans le temps sans changer son amplitude ni sa période.

Distinguer décalage horizontal et vertical. Ajouter une constante à l'extérieur du sinus déplacerait la valeur moyenne. Une phase ajoutée à l'intérieur change seulement l'instant des mêmes états. L'identification de la formule doit donc précéder la lecture des extrema.

Définition | Comprendre la notion

Un signal sinusoïdal peut s'écrire $s(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ ou $A \cos(\omega t + \varphi)$, avec $A > 0$ et $\omega > 0$ dans cette présentation. A est l'amplitude ; les valeurs sont comprises entre $-A$ et A . La pulsation ω s'exprime en rad/s lorsque t est en secondes. La période est $T = 2\pi/\omega$ et la fréquence $f = 1/T$. La phase initiale est φ et la phase instantanée $\omega t + \varphi$. La phase décale le motif dans le temps ; elle ne change ni amplitude ni période. Un décalage vertical supplémentaire modifierait la valeur moyenne du signal.

Exemple | Exemple commenté

Pour $s(t) = 3 \sin(4\pi t + \pi/2)$ avec t en secondes, l'amplitude est 3 et la pulsation 4π radians par seconde. La période vaut $T = 2\pi/(4\pi) = 0,5$ seconde et la fréquence $f = 1/0,5 = 2$ hertz. La phase initiale est $\pi/2$, donc $s(0) = 3 \sin(\pi/2) = 3$: le signal commence à son maximum. Une période plus tard, l'angle a augmenté de $4\pi \times 0,5 = 2\pi$ et le signal retrouve la même valeur. Le déphasage correspond à une avance de $\varphi/\omega = (\pi/2)/(4\pi) = 1/8$ seconde par rapport à $3 \sin(4\pi t)$, puisque $4\pi t + \pi/2 = 4\pi(t + 1/8)$.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

La pulsation n'est pas la fréquence : $\omega = 2\pi f$. Confondre les deux oublie qu'un cycle correspond à 2π radians.

À toi d'essayer : Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Pour $4 \sin(6\pi t)$, la période vaut...

1. 3
2. $1/3$
3. 6π

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 26](#) [Explication, p. 27](#)

4 Boîte à outils

Méthode | Mesurer les angles en radians

1. Identifie l'unité donnée et celle demandée.
2. Utilise $\pi/180$ pour degrés vers radians et $180/\pi$ dans l'autre sens.
3. Simplifie les fractions avant toute approximation.
4. Pour une mesure principale, ajoute ou retire des tours entiers de 2π .

5. Vérifie l'appartenance à l'intervalle et le mode angulaire de la calculatrice.

✂ Méthode | Lire sinus et cosinus sur le cercle

1. Place mentalement l'angle sur le cercle et identifie son quadrant.
2. Lis le cosinus horizontalement et le sinus verticalement.
3. Utilise les valeurs remarquables ou l'identité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
4. Si un carré donne deux signes, sélectionne avec le quadrant ou conserve les deux si rien ne les départage.
5. Contrôle les bornes entre -1 et 1 et le mode radian de l'outil.

✂ Méthode | Angles associés et symétries

1. Exprime l'angle à partir d'un angle remarquable et d'un tour, demi-tour ou quart de tour.
2. Identifie la symétrie et son effet sur les coordonnées.
3. Utilise les valeurs exactes de l'angle de référence.
4. Contrôle séparément le signe du sinus et celui du cosinus dans le quadrant.
5. Pour une justification, décris les coordonnées conservées ou échangées.

✂ Méthode | Comprendre les courbes sinus et cosinus

1. Repère les valeurs remarquables et les bornes -1 et 1.
2. Utilise la période pour ramener un angle à un motif connu.
3. Vérifie l'intervalle de monotonie avant de comparer deux images.
4. Utilise parité ou symétrie pour compléter les valeurs.
5. Pour réfuter une croissance globale, cherche deux angles ordonnés dont les images sont dans l'ordre inverse.

✂ Méthode | Amplitude, période et phase d'un signal

1. Identifie A, la pulsation et la phase dans l'argument du sinus ou cosinus.
2. Dédus les bornes du signal en l'absence de décalage vertical.
3. Calcule $T = 2\pi/\omega$ puis $f = 1/T$ avec les unités.
4. Calcule la valeur initiale en remplaçant t par zéro.
5. Pour un décalage temporel, factorise la pulsation et vérifie le sens de l'avance ou du retard.

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases ; 6 à 10 demandent plusieurs étapes ; 11 à 15 t'invitent à choisir, justifier et contrôler. Cherche avant de consulter les indices.

Exercice 1 — Convertir en radians ★☆☆

Convertis 45° et 120° en radians.

Exercice 2 — Les axes du cercle ★☆☆

Donne $(\cos 0; \sin 0)$ et $(\cos(\pi/2); \sin(\pi/2))$.

Exercice 3 — Un angle opposé ★☆☆

Calcule $\cos(-\pi/3)$ et $\sin(-\pi/3)$.

Exercice 4 — Utiliser une période ★☆☆

Calcule $\sin(2\pi + \pi/6)$.

Exercice 5 — Lire une amplitude ★☆☆

Pour $u(t) = 5 \cos(2\pi t)$, donne amplitude, minimum et maximum.

Exercice 6 — Convertir en degrés ★★☆☆

Convertis $5\pi/6$ en degrés.

Exercice 7 — Une valeur manquante ★★☆☆

$x \in [0; \pi/2]$ et $\cos x = 3/5$. Calcule $\sin x$.

Exercice 8 — Un demi-tour ★★☆☆

Calcule $\cos(7\pi/6)$ et $\sin(7\pi/6)$.

Exercice 9 — Une variation connue ★★☆☆

Compare $\cos(\pi/4)$ et $\cos(3\pi/4)$ sans calculatrice.

Exercice 10 — Période et fréquence ★★☆☆

$u(t) = 12 \sin(100\pi t)$, t en secondes. Calcule T et f .

Exercice 11 — Une mesure principale ★★★

Détermine la mesure principale de $17\pi/4$ dans $] -\pi; \pi]$.

Exercice 12 — Deux points possibles ★★★

Un point du cercle a pour abscisse $1/2$. Quelles sont ses ordonnées et les angles associés dans $] -\pi; \pi]$?

Exercice 13 — Retrouver une relation ★★★

Explique avec les coordonnées pourquoi $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$ pour un angle du premier quadrant.

Exercice 14 — Une croissance mal prolongée ★★ ★

Un élève affirme que le sinus est croissant sur $\mathbb{R}$ car il croît entre 0 et $\pi/2$. Donne un contre-exemple.

Exercice 15 — Une phase initiale ★★ ★

Compare $a(t) = 2 \sin(2\pi t)$ et $b(t) = 2 \sin(2\pi t + \pi/2)$: amplitude, période et valeurs initiales.

6 Problème — Pour aller plus loin

Régler un mouvement périodique

Le déplacement en cm est $s(t) = 7 + 3\sin(2\pi t/12)$, t en secondes.

1. Identifie valeur moyenne, amplitude, période et pulsation.
2. Calcule s aux temps 0, 3, 6 et 9.
3. Donne les extrêmes et trace une période avec ces repères.
4. Convertis un quart de tour en degrés et explique le réglage de la calculatrice.
5. Double la vitesse : écris une formule de même centre et de même amplitude.

7 Indices des exercices

Exercice 1

Indice 1. Multiplie chaque mesure par $\pi/180$.

Indice 2. Simplifie les fractions $45/180$ et $120/180$.

Exercice 2

Indice 1. Pars de l'axe horizontal positif.

Indice 2. Un quart de tour positif monte sur l'axe vertical.

Exercice 3

Indice 1. La symétrie horizontale conserve l'abscisse.

Indice 2. Elle change le signe de l'ordonnée.

Exercice 4

Indice 1. Retire un tour complet.

Indice 2. La valeur restante est remarquable.

Exercice 5

Indice 1. Le coefficient extérieur multiplie toutes les valeurs.

Indice 2. Le cosinus est borné par 1 en valeur absolue.

Exercice 6

Indice 1. Utilise le facteur inverse de la conversion précédente.

Indice 2. $180/6 = 30$.

Exercice 7

Indice 1. Utilise l'identité des carrés.

Indice 2. L'intervalle permet de choisir le signe positif.

Exercice 8

Indice 1. Écris l'angle comme π plus un angle remarquable.

Indice 2. Un demi-tour donne le point opposé.

Exercice 9

Indice 1. Place les angles dans un intervalle de monotonie.

Indice 2. Le cosinus y inverse l'ordre.

Exercice 10

Indice 1. La période est $2\pi/\omega$.

Indice 2. La fréquence est l'inverse de la période.

Exercice 11

Indice 1. Retire des multiples de 2π .

Indice 2. Deux tours valent $16\pi/4$.

Exercice 12

Indice 1. Une droite verticale peut couper le cercle en deux points.

Indice 2. Les deux angles sont symétriques par rapport à l'axe horizontal.

Exercice 13

Indice 1. Compare les deux angles complémentaires d'un triangle rectangle.

Indice 2. La symétrie selon $y = x$ échange les coordonnées.

Exercice 14

Indice 1. Regarde le quart de tour qui suit le maximum.

Indice 2. Compare les valeurs aux angles $\pi/2$ et π .

Exercice 15

Indice 1. Le terme constant dans l'angle modifie le point de départ.

Indice 2. $2\pi(t + 1/4) = 2\pi t + \pi/2$.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On utilise la correspondance entre 180 degrés et π radians.

Construire la réponse.

1. 45° donne $45\pi/180 = \pi/4$, car $45/180 = 1/4$.
2. 120° donne $120\pi/180 = 2\pi/3$, car $120/180 = 2/3$.

Vérifier. 45 degrés représentent un huitième de tour, soit $2\pi/8 = \pi/4$. 120 degrés représentent un tiers de tour, soit $2\pi/3$.

Conclure. $45^\circ = \pi/4$ rad et $120^\circ = 2\pi/3$ rad.

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les deux angles correspondent à des points situés directement sur les axes.

Construire la réponse.

1. À zéro, aucun déplacement angulaire n'a été effectué : le point est $(1; 0)$, donc $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$.
2. Après un quart de tour direct, à $\pi/2$, le point est $(0; 1)$, donc le cosinus vaut 0 et le sinus 1.

Vérifier. Les deux points ont une distance 1 à l'origine et leurs coordonnées vérifient la somme des carrés égale à 1.

Conclure. Les couples sont $(1; 0)$ et $(0; 1)$.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Passer de $\pi/3$ à $-\pi/3$ effectue une symétrie par rapport à l'axe horizontal.

Construire la réponse.

1. L'abscisse est conservée : $\cos(-\pi/3) = \cos(\pi/3) = 1/2$.
2. L'ordonnée change de signe : $\sin(-\pi/3) = -\sin(\pi/3) = -\sqrt{3}/2$.

Vérifier. L'angle négatif est dans le quatrième quadrant : cosinus positif et sinus négatif, ce qui confirme les deux résultats.

Conclure. $\cos(-\pi/3) = 1/2$ et $\sin(-\pi/3) = -\sqrt{3}/2$.

Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. L'angle donné dépasse $\pi/6$ d'un tour complet.

Construire la réponse.

1. La périodicité donne $\sin(2\pi + \pi/6) = \sin(\pi/6)$.
2. La valeur remarquable est $\sin(\pi/6) = 1/2$.

Vérifier. Le point du cercle retrouve la même position après un tour, donc la même ordonnée. Aucun arrondi n'est nécessaire.

Conclure. Le résultat est $1/2$.

Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le cosinus varie entre -1 et 1 et le facteur extérieur positif vaut 5.

Construire la réponse.

1. L'amplitude est donc 5.
2. En multipliant l'encadrement du cosinus par 5, on obtient $-5 \leq u(t) \leq 5$.
3. Ces bornes sont atteintes lorsque le cosinus vaut respectivement -1 et 1.

Vérifier. À t égal à zéro, $u(0) = 5$; à t égal à $1/2$, le cosinus vaut $\cos \pi = -1$ et le signal vaut -5.

Conclure. Amplitude : 5 ; minimum : -5 ; maximum : 5.

Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Pour convertir en degrés, on multiplie la mesure en radians par $180/\pi$.

Construire la réponse.

1. $(5\pi/6)(180/\pi) = 5 \times 180/6$.
2. Le facteur π se simplifie et $180/6 = 30$, donc le résultat est $5 \times 30 = 150$.

Vérifier. $5\pi/6$ est inférieur à π et supérieur à $\pi/2$; 150 degrés est bien entre 90 et 180 degrés.

Conclure. $5\pi/6$ radians correspondent à 150° .

Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le cosinus est connu et l'intervalle fixe le signe du sinus.

Construire la réponse.

1. L'identité donne $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - (3/5)^2 = 1 - 9/25 = 16/25$.
2. Les candidats issus du carré sont $\pm 4/5$.
3. Comme $x \in [0; \pi/2]$, le point est dans le premier quadrant et son ordonnée est positive ou nulle : on retient $4/5$.

Vérifier. $(3/5)^2 + (4/5)^2 = 9/25 + 16/25 = 1$. La solution négative aurait placé le point sous l'axe horizontal, hors du quadrant autorisé.

Conclure. $\sin x = 4/5$.

Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On écrit l'angle comme un demi-tour ajouté à un angle remarquable.

Construire la réponse.

1. $7\pi/6 = \pi + \pi/6$.
2. Le demi-tour change les deux signes. Puisque $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, on obtient $\cos(7\pi/6) = -\sqrt{3}/2$.
3. Puisque $\sin(\pi/6) = 1/2$, on obtient $\sin(7\pi/6) = -1/2$.

Vérifier. Le point est dans le troisième quadrant, où les deux coordonnées sont négatives. Leurs carrés totalisent $3/4 + 1/4 = 1$.

Conclure. Le cosinus vaut $-\sqrt{3}/2$ et le sinus $-1/2$.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les deux angles sont dans un intervalle où le cosinus est strictement décroissant.

Construire la réponse.

1. On a $0 \leq \pi/4 < 3\pi/4 \leq \pi$.
2. Sur $[0; \pi]$, l'ordre des images est inversé : $\cos(\pi/4) > \cos(3\pi/4)$.

Vérifier. Les valeurs exactes sont $\sqrt{2}/2$ et $-\sqrt{2}/2$, qui confirment l'inégalité stricte.

Conclure. $\cos(\pi/4)$ est supérieur à $\cos(3\pi/4)$.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La pulsation est le coefficient de t dans l'angle, soit 100π radians par seconde.

Construire la réponse.

1. La période vaut $T = 2\pi/(100\pi) = 2/100 = 0,02$ seconde.
2. Comme une seconde vaut 1 000 millisecondes, $T = 20$ ms.
3. La fréquence est $f = 1/0,02 = 50$ Hz.

Vérifier. En 0,02 seconde, l'angle avance de $100\pi \times 0,02 = 2\pi$, exactement un tour. Cinquante périodes de 0,02 seconde remplissent une seconde.

Conclure. $T = 0,02$ s, soit 20 ms, et $f = 50$ Hz.

Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On cherche une mesure équivalente dans $] -\pi; \pi]$ en retirant des tours complets.

Construire la réponse.

1. Un tour vaut $2\pi = 8\pi/4$. Deux tours valent $16\pi/4$.
2. On soustrait : $17\pi/4 - 16\pi/4 = \pi/4$.
3. La valeur $\pi/4$ appartient à l'intervalle demandé.

Vérifier. La différence entre l'angle initial et le résultat vaut 4π , soit deux tours entiers. Les positions finales sont donc identiques.

Conclure. La mesure principale est $\pi/4$.

Corrigé 12

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Une abscisse de $1/2$ coupe le cercle en deux points symétriques par rapport à l'axe horizontal.

Construire la réponse.

1. L'équation du cercle donne $(1/2)^2 + y^2 = 1$, donc $y^2 = 3/4$.
2. Les deux ordonnées sont $y = \sqrt{3}/2$ et $y = -\sqrt{3}/2$.
3. Les angles correspondants dans $] -\pi; \pi]$ sont respectivement $\pi/3$ et $-\pi/3$.

Vérifier. Les deux angles ont le cosinus $1/2$ et des sinus opposés. Ils appartiennent tous deux à l'intervalle demandé.

Conclure. Les ordonnées sont $\pm\sqrt{3}/2$ et les angles $\pm\pi/3$.

Corrigé 13

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On veut expliquer une identité par l'échange des coordonnées, pas seulement la citer.

Construire la réponse.

1. Le point d'angle x a pour coordonnées $(\cos x; \sin x)$.
2. La symétrie par rapport à $y = x$ échange ces coordonnées et, dans le premier quadrant, transforme l'angle x en $\pi/2 - x$.
3. Le point image a donc pour ordonnée $\cos x$, mais cette ordonnée est aussi, par définition, $\sin(\pi/2 - x)$.

Vérifier. Pour x égal à zéro, les valeurs sont $\sin(\pi/2) = 1$ et $\cos 0 = 1$; pour x égal à $\pi/2$, elles valent toutes deux zéro. Ces cas limites sont cohérents avec la symétrie.

Conclure. $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$ parce que la symétrie échange abscisse et ordonnée.

Corrigé 14

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Un seul contre-exemple suffit à réfuter une affirmation de croissance sur tous les réels.

Construire la réponse.

1. On choisit les angles $\pi/2$ et π , avec $\pi/2 < \pi$.
2. Leurs images sont $\sin(\pi/2) = 1$ et $\sin \pi = 0$.

3. On obtient une image plus grande pour le plus petit angle, contrairement à la condition de croissance.

Vérifier. Le sinus décroît effectivement sur la portion allant de $\pi/2$ à π . Sa croissance entre zéro et $\pi/2$ ne se prolonge donc pas au-delà.

Conclure. L'affirmation est fausse ; les deux angles $\pi/2$ et π forment un contre-exemple.

Corrigé 15

Démonstration / Solution expliquée

Comprendre la question. Les deux formules ont les mêmes facteurs d'amplitude et de temps, mais des phases initiales différentes.

Construire la réponse.

1. Les deux amplitudes valent 2. La pulsation commune 2π donne une période de 1 seconde.
2. $a(0) = 2 \sin 0 = 0$, tandis que $b(0) = 2 \sin(\pi/2) = 2$.
3. On factorise $2\pi t + \pi/2 = 2\pi(t + 1/4)$, donc $b(t) = a(t + 1/4)$.

Vérifier. Le signal b réalise à l'instant t l'état que a réalisera un quart de seconde plus tard : b est donc en avance d'un quart de seconde. Le facteur de t n'a pas changé, donc la période non plus.

Conclure. Même amplitude 2 et période 1 s ; valeurs initiales 0 et 2 ; b est avancé de 0,25 s par rapport à a.

9 Corrigé du problème

1. **Comprendre la question.** On compare la formule donnée à la forme centre plus amplitude fois sinus.

Construire la réponse.

- (a) Dans $s(t) = 7 + 3 \sin(2\pi t/12)$, le terme constant 7 fixe la position moyenne, en cm.
- (b) Le coefficient positif 3 donne l'amplitude en cm.
- (c) L'argument est ωt avec $\omega = 2\pi/12$ rad/s. La période vaut $2\pi/\omega = 12$ secondes.

Vérifier. Sur une période complète, l'argument augmente de deux pi radians et le sinus retrouve les mêmes valeurs.

Conclure. Centre : 7 cm ; amplitude : 3 cm ; période : 12 s ; pulsation : deux pi divisés par 12 rad/s.

2. **Comprendre la question.** Les quarts de période correspondent aux angles repères du cercle trigonométrique.

Construire la réponse.

- (a) En zéro, l'argument vaut 0 et le sinus 0 : $s(0) = 7$.
- (b) En $t = 3$, l'argument vaut $\pi/2$ et le sinus 1 : $s = 10$.
- (c) En $t = 6$, l'argument vaut π et le sinus 0 : $s = 7$.
- (d) En $t = 9$, l'argument vaut $3\pi/2$ et le sinus -1 : $s = 4$.

Vérifier. Les valeurs alternent entre le centre, le maximum, le centre et le minimum, comme attendu pour un sinus sans décalage de phase.

Conclure. Les quatre déplacements sont 7, 10, 7 et 4 cm.

3. **Comprendre la question.** Le sinus reste entre -1 et 1 : on transforme cet encadrement.

Construire la réponse.

- (a) Multiplier par 3, positif, donne $-3 \leq 3 \sin(2\pi t/12) \leq 3$.
- (b) Ajouter 7 donne $4 \leq s(t) \leq 10$.
- (c) Pour tracer une période, place les quatre points calculés, puis (12; 7). Relie-les par une courbe sinusoidale lisse, avec des tangentes horizontales aux extrêmes.

Vérifier. Le milieu des extrêmes est 7 et leur demi-différence 3 : on retrouve le centre et l'amplitude.

Conclure. Le minimum est 4 cm et le maximum 10 cm. La période tracée va de 0 à 12 s.

4. **Comprendre la question.** Une même rotation possède deux mesures selon l'unité angulaire.

Construire la réponse.

- (a) Un tour vaut 2π radians ou 360° .
- (b) Un quart de tour vaut donc $2\pi/4 = \pi/2$ radians, soit $360^\circ/4 = 90^\circ$.
- (c) La formule contient pi et exprime son argument en radians : la calculatrice doit être réglée en radians pour être utilisée directement.

Vérifier. En mode radians, $\sin(\pi/2) = 1$. En mode degrés, la même saisie serait interprétée comme environ 1,57 degré et ne donnerait pas le maximum.

Conclure. Un quart de tour vaut $90^\circ = \pi/2$ radians ; le calcul de la formule se fait en radians.

5. **Comprendre la question.** Doubler la vitesse de répétition double la pulsation et divise la période par deux.

Construire la réponse.

- (a) La nouvelle pulsation est $2\omega = 4\pi/12$.
- (b) La nouvelle période vaut $12/2 = 6$ secondes.
- (c) On conserve le centre 7 et l'amplitude 3, donc $s_2(t) = 7 + 3 \sin(4\pi t/12)$.

Vérifier. Seul le coefficient du temps dans l'argument a changé. L'encadrement du sinus, donc les deux extrêmes, reste identique.

Conclure. Une formule adaptée est $s_2(t) = 7 + 3 \sin(4\pi t/12)$.

10 Variante autonome et bilan

Pour $g(t) = 3 + 2 \cos(\pi t)$, donne période, amplitude, extrêmes et valeur en $t = 1$.

À toi d'essayer : Vérifie ta démarche

Résous la variante, puis explique pourquoi ta méthode s'applique.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 26](#) [Explication, p. 27](#)

- Je peux expliquer : mesurer les angles en radians.
- Je peux expliquer : lire sinus et cosinus sur le cercle.
- Je peux expliquer : angles associés et symétries.
- Je peux expliquer : comprendre les courbes sinus et cosinus.
- Je peux expliquer : amplitude, période et phase d'un signal.

11 Fiche-mémoire

Mesurer les angles en radians.

1. Identifie l'unité donnée et celle demandée.
2. Utilise $\pi/180$ pour degrés vers radians et $180/\pi$ dans l'autre sens.
3. Simplifie les fractions avant toute approximation.
4. Pour une mesure principale, ajoute ou retire des tours entiers de 2π .
5. Vérifie l'appartenance à l'intervalle et le mode angulaire de la calculatrice.

Lire sinus et cosinus sur le cercle.

1. Place mentalement l'angle sur le cercle et identifie son quadrant.
2. Lis le cosinus horizontalement et le sinus verticalement.
3. Utilise les valeurs remarquables ou l'identité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
4. Si un carré donne deux signes, sélectionne avec le quadrant ou conserve les deux si rien ne les départage.
5. Contrôle les bornes entre -1 et 1 et le mode radian de l'outil.

Angles associés et symétries.

1. Exprime l'angle à partir d'un angle remarquable et d'un tour, demi-tour ou quart de tour.
2. Identifie la symétrie et son effet sur les coordonnées.
3. Utilise les valeurs exactes de l'angle de référence.
4. Contrôle séparément le signe du sinus et celui du cosinus dans le quadrant.
5. Pour une justification, décris les coordonnées conservées ou échangées.

Comprendre les courbes sinus et cosinus.

1. Repère les valeurs remarquables et les bornes -1 et 1.
2. Utilise la période pour ramener un angle à un motif connu.
3. Vérifie l'intervalle de monotonie avant de comparer deux images.
4. Utilise parité ou symétrie pour compléter les valeurs.
5. Pour réfuter une croissance globale, cherche deux angles ordonnés dont les images sont dans l'ordre inverse.

Amplitude, période et phase d'un signal.

1. Identifie A , la pulsation et la phase dans l'argument du sinus ou cosinus.
2. Dédus les bornes du signal en l'absence de décalage vertical.

3. Calcule $T = 2\pi/\omega$ puis $f = 1/T$ avec les unités.
4. Calcule la valeur initiale en remplaçant t par zéro.
5. Pour un décalage temporel, factorise la pulsation et vérifie le sens de l'avance ou du retard.

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

90 degrés représentent un quart de tour.

Indice 2 — Un pas de plus.

Un tour vaut 2π radians.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Le point associé à x s'écrit $(\cos x; \sin x)$.

Indice 2 — Un pas de plus.

La deuxième coordonnée se lit verticalement.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Les angles x et $-x$ correspondent à une symétrie dans l'axe horizontal.

Indice 2 — Un pas de plus.

Cette symétrie inverse l'ordonnée.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Un tour complet ramène le point à ses deux coordonnées initiales.

Indice 2 — Un pas de plus.

Ce tour mesure 2π radians.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve**Indice 1 — Une piste.**

La pulsation est 6π .

Indice 2 — Un pas de plus.

La période correspond à une augmentation d'angle de 2π .

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche**Indice 1 — Une piste.**

Repère les données utiles et l'inconnue. Reviens à la méthode correspondante dans la boîte à outils.

Indice 2 — Un pas de plus.

Contrôle les unités, les bornes et la plausibilité du résultat avant de lire la correction.

[Revenir à la recherche, p. 23](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Un quart de tour vaut $2\pi/4 = \pi/2$ radians.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Le sinus est l'ordonnée du point sur le cercle.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

$\sin(-x) = -\sin x$.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

La période usuelle du sinus et du cosinus est 2π .

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

$T = 2\pi/(6\pi) = 1/3$ unité de temps.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche

Comprendre la question. On identifie les paramètres de ce cosinus puis on évalue son argument au temps demandé.

Construire la réponse.

1. Dans $g(t) = 3 + 2\cos(\pi t)$, le centre est 3 et l'amplitude 2.
2. La pulsation vaut π , donc la période est $2\pi/\pi = 2$ unités de temps.
3. Comme le cosinus varie de -1 à 1, g varie de $3 - 2 = 1$ à $3 + 2 = 5$.
4. En t égal à 1, l'argument vaut π et son cosinus vaut -1 : $g(1) = 3 + 2(-1) = 1$.

Vérifier. En zéro, $g(0) = 5$; une demi-période plus tard, en 1, on atteint le minimum 1, puis en 2 on retrouve 5.

Conclure. La période est 2, l'amplitude 2, les extrêmes 1 et 5, et la valeur en 1 est 1.

[Revenir à la recherche, p. 23](#)