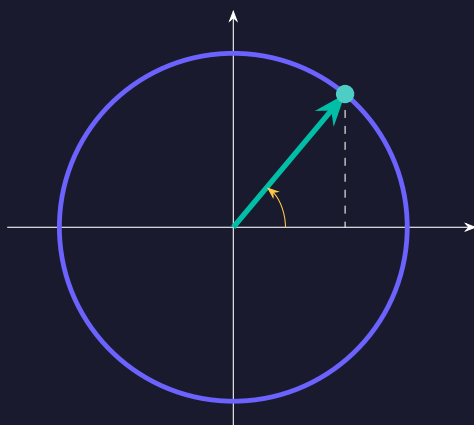


FICHE 02

Produit scalaire et applications

Géométrie ■ Comprendre et s'entraîner



Première STI2D — spécialité maths
Année scolaire 2026–2027

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	Pourquoi ce chapitre ?	3
2	L'idée avant la formule	3
3	Le cours formel	3
3.1	Calculer les coordonnées d'un vecteur du plan	3
3.2	Produit scalaire en coordonnées	4
3.3	Relier produit scalaire et angle	5
3.4	Projeter un vecteur sur un axe	7
3.5	Longueurs, angles et identité du parallélogramme	8
4	Boîte à outils	9
5	Exercices progressifs	11
6	Problème — Pour aller plus loin	13
7	Indices des exercices	14
8	Corrigés détaillés	16
9	Corrigé du problème	21
10	Variante autonome et bilan	22
11	Fiche-mémoire	22
12	Indices des pauses et des preuves	23
13	Explications des pauses et des preuves	25

1 Pourquoi ce chapitre ?

Le produit scalaire relie coordonnées, angles et projections. Il permet de quantifier la part d'un effort dans une direction et de vérifier une perpendicularité. **Ton parcours.** Partie mathématiques de la spécialité physique-chimie et mathématiques en STI2D. Cette fiche complète les cours de mathématiques communs ; elle ne remplace pas les enseignements de physique-chimie.

- Calculer les coordonnées d'un vecteur du plan.
- Produit scalaire en coordonnées.
- Relier produit scalaire et angle.
- Projeter un vecteur sur un axe.
- Longueurs, angles et identité du parallélogramme.

2 L'idée avant la formule

Seule la composante d'un vecteur dans la direction du déplacement contribue au produit scalaire. Deux vecteurs perpendiculaires donnent une contribution nulle.

3 Le cours formel

3.1 Calculer les coordonnées d'un vecteur du plan

Intuition | Construire la notion pas à pas

Comparer deux positions. Les coordonnées d'un point indiquent sa position dans un repère. Les coordonnées d'un vecteur indiquent les variations nécessaires pour aller du départ à l'arrivée. On calcule donc « arrivée moins départ » sur chaque axe.

Comprendre les signes. Une première composante positive indique un déplacement dans le sens positif du premier axe ; une seconde négative un déplacement dans le sens négatif du second. Soustraire une coordonnée négative peut produire une augmentation : $3 - (-1) = 4$.

Retrouver le point d'arrivée. Si A est connu et si $\overrightarrow{AB} = (u; v)$, on ajoute u à l'abscisse de A et v à son ordonnée. La soustraction inverse doit ensuite retrouver le vecteur donné.

Utiliser les égalités dans une figure. Dans un parallélogramme ABCD parcouru dans cet ordre, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. L'ordre des lettres compte : $\overrightarrow{CD}$ serait l'opposé de $\overrightarrow{AB}$.

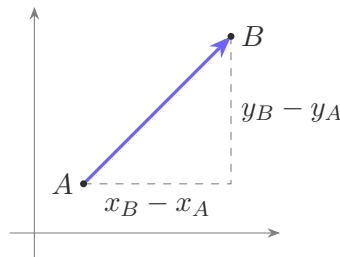
Ces calculs de coordonnées sont valables dans tout repère. Les formules de longueurs, en revanche, demandent un repère orthonormé.

Définition | Comprendre la notion

Dans un repère, les coordonnées d'un point indiquent sa position ; celles d'un vecteur décrivent un déplacement. Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$,

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A).$$

On soustrait toujours départ à arrivée. Deux vecteurs sont égaux lorsque leurs coordonnées correspondantes sont égales. Pour construire l'arrivée B depuis A avec un déplacement $(u; v)$, ajoute les coordonnées : $B(x_A + u; y_A + v)$. Ces règles ne demandent pas que le repère soit orthonormé ; les formules de longueur, elles, le demanderont.



💡 Exemple | Exemple commenté

Pour $A(2; -1)$ et $B(5; 3)$, on calcule $\overrightarrow{AB} = (5 - 2; 3 - (-1)) = (3; 4)$. Il faut avancer de trois unités selon le premier axe et de quatre selon le second.

Le contrôle depuis le départ donne $(2 + 3; -1 + 4) = (5; 3)$, les coordonnées de B. En inversant le trajet, $\overrightarrow{BA} = (2 - 5; -1 - 3) = (-3; -4)$: les deux composantes changent de signe.

La coordonnée verticale de B vaut 3, mais le déplacement vertical vaut 4 parce que l'on part de -1. Cela illustre la différence entre une position et une variation de position.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Pour un parallélogramme ABCD, compare AB avec DC, pas avec CD. Les côtés opposés de même vecteur doivent être orientés dans le même sens.

À toi d'essayer : Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Pour $A(2; 3)$, $B(5; 1)$, le vecteur AB vaut...

1. $(7; 4)$
2. $(3; -2)$
3. $(-3; 2)$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.2 Produit scalaire en coordonnées

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Transformer deux directions en un nombre. Le produit scalaire associe à deux vecteurs un nombre réel. Il permet notamment de reconnaître des directions perpendiculaires sans mesurer un angle sur le dessin.

Calculer dans un repère orthonormé. Pour $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$, on multiplie les coordonnées de même position puis on additionne : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$. Les conditions sur le repère sont essentielles : axes perpendiculaires et même unité sur les axes.

Comprendre le résultat nul. Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls est nul exactement lorsque leurs directions sont perpendiculaires. Les deux produits peuvent être non nuls et se compenser. Il ne faut donc pas exiger que chaque produit soit nul séparément.

Passer des points aux vecteurs. Pour tester un angle en A, calcule les deux vecteurs qui partent de A. Chaque coordonnée est celle de l'arrivée moins celle du départ. Tester AB et AC étudierait une autre paire de directions.

Le produit scalaire est symétrique : changer l'ordre des vecteurs ne change pas le nombre obtenu. De plus, $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2$, ce qui relie ce nouvel outil aux distances.

Définition | Comprendre la notion

Dans un repère orthonormé, le produit scalaire de $\vec{u} = (x; y)$ et $\vec{v} = (x'; y')$ est le réel $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$. Il est symétrique et bilinéaire : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, et $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$. Le produit d'un vecteur par lui-même vaut le carré de sa norme. Deux vecteurs sont orthogonaux exactement lorsque leur produit scalaire est nul. Le résultat du produit scalaire est un nombre, pas un vecteur.

Exemple | Exemple commenté

Prenons $\vec{u}(2; 3)$ et $\vec{v}(6; -4)$. Le produit des premières coordonnées vaut $2 \times 6 = 12$ et celui des secondes vaut $3 \times (-4) = -12$.

En additionnant, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12 - 12 = 0$. Les deux vecteurs étant non nuls, ils sont orthogonaux. Le signe négatif de -4 est décisif : le remplacer par 4 donnerait 24 et conduirait à une conclusion différente.

Un contrôle géométrique est possible : $\vec{v}$ est le double de $(3; -2)$, obtenu en tournant $(2; 3)$ d'un quart de tour. Cette observation confirme l'orthogonalité ; le calcul, lui, la démontre sans dépendre de la précision du dessin.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Le produit scalaire n'est ni $(xx'; yy')$, ni $xx' - yy'$. C'est le nombre $xx' + yy'$; un terme peut déjà être négatif à cause des coordonnées.

À toi d'essayer : Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

$$(1; 2) \cdot (3; 4) =$$

1. $(3; 8)$
2. 11
3. 10

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.3 Relier produit scalaire et angle

Intuition | Construire la notion pas à pas

Relier directions et longueurs. Pour deux vecteurs non nuls faisant un angle θ compris entre 0 et π , le produit scalaire vaut $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$. Le cosinus mesure la part de l'une des directions qui va dans le sens de l'autre.

Lire le signe avant de calculer l'angle. Les normes sont positives. Le signe du produit scalaire est donc celui du cosinus : positif pour un angle aigu, nul pour un angle droit et négatif pour un angle obtus. Un produit négatif ne signifie pas une longueur négative.

Retrouver un angle. Si les normes et le produit sont connus, divise le produit scalaire par le produit des normes. Tu obtiens le cosinus, pas encore l'angle. Utilise ensuite la fonction inverse du cosinus, en vérifiant le mode degrés ou radians de la calculatrice.

Vérifier les conditions. Le quotient doit appartenir à $[-1; 1]$. Sinon, les données ou le calcul sont incohérents. Si l'un des vecteurs est nul, son produit scalaire est nul mais on ne peut pas lui attribuer une direction ni calculer cet angle par division.

Définition | Comprendre la notion

Pour deux vecteurs non nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$, où $\theta \in [0; \pi]$ est leur angle non orienté. Si l'angle est aigu, le produit est positif ; s'il est droit, nul ; s'il est obtus, négatif. La formule permet de calculer un angle en isolant son cosinus, puis en utilisant la fonction réciproque de la calculatrice. Contrôle le mode degré ou radian et garde les valeurs exactes jusqu'au calcul final. La formule divisée par les normes n'est pas utilisable si un vecteur est nul, même si le produit scalaire lui-même reste défini.

Exemple | Exemple commenté

Pour $\vec{u}(1; 0)$ et $\vec{v}(1; 1)$, le produit scalaire est $1 \times 1 + 0 \times 1 = 1$. Les normes valent respectivement 1 et $\sqrt{2}$.

Ainsi $\cos \theta = 1 / (1 \times \sqrt{2}) = \sqrt{2}/2$. Sur $[0; \pi]$, cela donne $\theta = \pi/4$, soit 45° . Le produit est positif : l'angle aigu obtenu est cohérent.

Il ne faut pas entrer directement $\arccos(1)$: 1 est ici le produit scalaire, alors que l'argument de la fonction inverse doit être le quotient par les deux normes. La normalisation retire l'effet des longueurs pour ne garder que l'information de direction.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Une calculatrice peut afficher un résultat plausible dans le mauvais mode. 120° et 120 radians sont deux angles différents : indique toujours l'unité.

À toi d'essayer : Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Un produit scalaire strictement négatif entre vecteurs non nuls indique un angle. . .

1. Droit
2. Aigu
3. Obtus

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.4 Projeter un vecteur sur un axe

Intuition | Construire la notion pas à pas

Mesurer la part qui suit une direction. Un déplacement oblique peut se décomposer en une composante le long d'un axe et une composante perpendiculaire. La projection orthogonale conserve la première et retire la seconde.

Orienter l'axe. Un vecteur unitaire $\vec{e}$ fixe le sens positif et a une norme égale à 1. La composante algébrique de $\vec{u}$ sur cet axe est $a = \vec{u} \cdot \vec{e}$. Elle peut être positive, nulle ou négative. Sa valeur absolue donne la longueur projetée, tandis que son signe indique le sens.

Distinguer un nombre d'un vecteur. La composante a est un nombre. Le vecteur projeté est $a\vec{e}$, avec des coordonnées. Multiplier par $\vec{e}$ reconstitue une flèche dans la direction choisie.

Contrôler la projection. La différence $\vec{u} - a\vec{e}$ est perpendiculaire à l'axe. Son produit scalaire avec $\vec{e}$ doit donc être nul. Si le vecteur directeur donné n'est pas unitaire, normalise-le d'abord en le divisant par sa norme, ou utilise la formule adaptée avec le carré de sa norme au dénominateur.

Définition | Comprendre la notion

La projection orthogonale d'un vecteur sur un axe conserve sa composante selon cet axe et supprime la composante perpendiculaire. Si $\vec{e}$ est un vecteur unitaire orientant l'axe, la composante algébrique vaut $\vec{u} \cdot \vec{e} = \|\vec{u}\| \cos \theta$. Cette composante peut être négative : elle indique alors un sens opposé à celui de l'axe. Le vecteur projeté vaut $(\vec{u} \cdot \vec{e})\vec{e}$. On peut lire le produit scalaire comme la norme d'un vecteur multipliée par la projection algébrique de l'autre sur sa direction. Cette interprétation explique le travail nul d'une force perpendiculaire au déplacement.

Exemple | Exemple commenté

Un vecteur de norme 10 fait un angle de 60° avec l'axe orienté. Sa composante sur cet axe vaut $10 \cos 60^\circ = 5$. Le vecteur projeté est donc $5\vec{e}$.

Si l'angle devient 120° , la composante vaut $10 \cos 120^\circ = -5$. La longueur projetée est toujours 5, mais le vecteur projeté est $-5\vec{e}$: il pointe dans le sens opposé à l'orientation choisie.

Cette différence explique pourquoi une composante n'est pas toujours une distance. Pour un axe horizontal orienté vers la droite, une composante -5 représente cinq unités vers la gauche.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

La formule $(\vec{u} \cdot \vec{e})\vec{e}$ suppose que $\vec{e}$ est unitaire. Avec un vecteur directeur quelconque $\vec{v}$ non nul, la projection vaut $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v}/\|\vec{v}\|^2$.

À toi d'essayer : Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Une projection algébrique sur un axe orienté peut être négative. . .

1. Non
2. Seulement si la norme est négative
3. Oui

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.5 Longueurs, angles et identité du parallélogramme

Intuition | Construire la notion pas à pas

Prolonger le théorème de Pythagore. Dans un triangle qui n'est pas nécessairement rectangle, les deux côtés connus et l'angle compris entre eux déterminent le troisième côté. La formule d'Al-Kashi ajoute un terme qui tient compte de cet angle.

Pour les côtés AB et AC entourant l'angle A, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A$. Le côté isolé à gauche est celui qui fait face à l'angle utilisé.

Comprendre le terme croisé. Comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, développer le carré de la norme donne les deux carrés des longueurs moins deux fois le produit scalaire. La formule du produit scalaire fait apparaître le cosinus. À 90° , il s'annule et on retrouve Pythagore.

Lire la cohérence géométrique. À longueurs AB et AC fixées, ouvrir davantage l'angle augmente le côté opposé. Un angle aigu donne un carré inférieur à la somme des deux carrés ; un angle obtus donne un carré supérieur.

Dans un parallélogramme, les diagonales correspondent aux vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$. La somme de leurs carrés vaut $2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$, car les termes croisés se compensent.

Définition | Comprendre la notion

Dans un triangle ABC, le théorème d'Al-Kashi donne

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos(\widehat{BAC}).$$

Il vient de $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ et du développement du carré de sa norme par bilinéarité. Pour un angle droit, le cosinus est nul et on retrouve Pythagore. La même bilinéarité donne l'identité du parallélogramme :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2.$$

Les deux termes croisés s'annulent quand on additionne les développements.

Exemple | Exemple commenté

Avec $AB = 5$, $AC = 3$ et $\widehat{A} = 60^\circ$, le côté recherché BC est opposé à l'angle connu. On écrit

$$BC^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \cos 60^\circ = 25 + 9 - 15 = 19.$$

Une longueur étant positive, $BC = \sqrt{19} \approx 4,36$. La racine ne doit être prise qu'après avoir calculé toute l'expression du carré.

Le contrôle triangulaire donne $|5 - 3| < BC < 5 + 3$, soit $2 < 4,36 < 8$. De plus, l'angle aigu impose $BC^2 < 25 + 9$: 19 respecte cette condition. Ces contrôles ne remplacent pas le calcul mais détectent un signe erroné devant le terme croisé.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

L'angle de la formule est celui compris entre les deux côtés multipliés dans $2ab \cos \theta$. Utiliser un autre angle, même connu, change la relation.

À toi d'essayer : Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Dans Al-Kashi, le terme croisé contient...

1. Le cosinus de l'angle entre les deux côtés connus
2. Le sinus de n'importe quel angle
3. Toujours la valeur 1

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 25](#)

4 Boîte à outils

✂ Méthode | Calculer les coordonnées d'un vecteur du plan

1. Identifie le point de départ et le point d'arrivée.
2. Soustrais les coordonnées du départ à celles de l'arrivée, avec des parenthèses pour les valeurs négatives.
3. Pour une arrivée inconnue, ajoute le déplacement aux coordonnées du départ.
4. Pour une figure, écris une égalité de vecteurs avec les bonnes orientations.
5. Contrôle en recalculant la différence ou l'autre paire de côtés.

✂ Méthode | Produit scalaire en coordonnées

1. Vérifie que le repère est orthonormé.
2. Si tu pars de points, forme les vecteurs avec arrivée moins départ.
3. Multiplie les coordonnées correspondantes et additionne en gardant les signes.
4. Pour une perpendicularité, impose que la somme soit nulle.
5. Interprète un nombre réel, pas les coordonnées d'un nouveau vecteur.

✂ Méthode | Relier produit scalaire et angle

1. Identifie les deux normes, le produit scalaire et l'angle recherché.
2. Écris $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$.
3. Isole la grandeur inconnue sans supprimer le cosinus.

4. Pour un angle, contrôle le quotient dans $[-1; 1]$ et le mode de la calculatrice.
5. Contrôle aigu, droit ou obtus avec le signe du produit.

Méthode | Projeter un vecteur sur un axe

1. Choisis le sens positif de l'axe.
2. Vérifie que son vecteur directeur $\vec{e}$ est unitaire.
3. Calcule la composante $a = \vec{u} \cdot \vec{e}$.
4. Si un vecteur est demandé, calcule $a\vec{e}$.
5. Contrôle que $\vec{u} - a\vec{e}$ est perpendiculaire à l'axe.

Méthode | Longueurs, angles et identité du parallélogramme

1. Identifie les deux côtés entourant l'angle connu.
2. Place le côté opposé seul au carré.
3. Calcule les deux carrés et le terme $2ab \cos \theta$.
4. Prends la racine positive à la fin, puis arrondis.
5. Contrôle les inégalités triangulaires et le rôle aigu, droit ou obtus de l'angle.

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases ; 6 à 10 demandent plusieurs étapes ; 11 à 15 t'invitent à choisir, justifier et contrôler. Cherche avant de consulter les indices.

Exercice 1 — Un déplacement ★☆☆

$A(1; 4)$ et $B(6; 2)$. Calcule $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 2 — Calcul direct ★☆☆

$\vec{u} = (3; 2)$, $\vec{v} = (4; -1)$. Calcule leur produit scalaire.

Exercice 3 — À partir d'un angle ★☆☆

Deux vecteurs ont des normes 3 et 4 et un angle de 60° . Calcule leur produit scalaire.

Exercice 4 — Projection horizontale ★☆☆

Le vecteur $(4; -3)$ est exprimé dans un repère orthonormé. Donne sa projection sur l'axe horizontal.

Exercice 5 — Retrouver Pythagore ★☆☆

Que devient Al-Kashi si l'angle entre AB et AC vaut 90° ?

Exercice 6 — Retrouver une arrivée ★★☆☆

$A(-2; 3)$ et $\overrightarrow{AB} = (4; -5)$. Trouve B.

Exercice 7 — Une perpendicularité ★★☆☆

$A(1; 1)$, $B(4; 3)$, $C(-1; 4)$. Le triangle ABC est-il rectangle en A ?

Exercice 8 — Retrouver un angle ★★☆☆

Deux vecteurs ont des normes 2 et 5 et un produit scalaire -5 . Trouve leur angle.

Exercice 9 — Composante signée ★★☆☆

Un vecteur de norme 8 fait un angle de 120° avec un axe orienté. Calcule sa composante.

Exercice 10 — Une longueur oblique ★★☆☆

Deux côtés d'un triangle mesurent 4 et 7 cm, avec un angle compris de 60° . Calcule le troisième côté.

Exercice 11 — Un parallélogramme ★★★

$A(0; 1)$, $B(3; 2)$, $D(-1; 4)$. Trouve C pour que ABCD soit un parallélogramme.

Exercice 12 — Déterminer une coordonnée ★★★

Pour quelle valeur de t les vecteurs $(2; 3)$ et $(t; -4)$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 13 — Un travail de force ★★★

Une force de 40 N agit sur un déplacement de 3 m faisant un angle de 60° avec elle. Calcule le travail $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ et compare au cas parallèle.

Exercice 14 — Projection sur une direction oblique ★★ ★

$\vec{u} = (3; 1)$ et $\vec{e} = (1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$. Vérifie que e est unitaire puis calcule la projection vectorielle de u sur sa direction.

Exercice 15 — Diagonales d'un parallélogramme ★★ ★

Un parallélogramme a des côtés de 3 et 5 cm. Une diagonale mesure 6 cm. Calcule l'autre avec l'identité du parallélogramme.

6 Problème — Pour aller plus loin

Orientation d'un effort

Dans un repère orthonormé, $\vec{u} = (3; 4)$ et $\vec{v} = (4; 0)$. Les longueurs sont exprimées dans la même unité.

1. Calcule les normes et le produit scalaire.
2. Détermine le cosinus de l'angle entre les vecteurs et une valeur approchée en degrés.
3. Calcule la projection algébrique de u sur la direction de v .
4. Calcule la norme de $u - v$ par coordonnées puis avec la formule utilisant le produit scalaire.
5. Un vecteur $w = (-4; 3)$ est-il orthogonal à u ?

7 Indices des exercices

Exercice 1

Indice 1. Soustrais les coordonnées de A à celles de B.

Indice 2. La seconde différence est $2 - 4$.

Exercice 2

Indice 1. Il y a deux produits puis une somme.

Indice 2. Le second produit est négatif.

Exercice 3

Indice 1. Utilise la définition géométrique.

Indice 2. $\cos 60^\circ = 1/2$.

Exercice 4

Indice 1. L'axe horizontal correspond à la première coordonnée.

Indice 2. La composante verticale est supprimée.

Exercice 5

Indice 1. Calcule le cosinus de l'angle droit.

Indice 2. Le terme contenant le cosinus s'annule.

Exercice 6

Indice 1. Ajoute le déplacement au départ.

Indice 2. Traite les deux coordonnées séparément.

Exercice 7

Indice 1. Calcule les deux vecteurs issus du sommet A.

Indice 2. Le produit nul caractérise l'orthogonalité.

Exercice 8

Indice 1. Divise le produit par les deux normes.

Indice 2. Cherche l'angle non orienté dont le cosinus vaut $-1/2$.

Exercice 9

Indice 1. La formule utilise le cosinus.

Indice 2. La composante peut être négative, contrairement à une longueur.

Exercice 10

Indice 1. L'angle est entre les deux côtés connus.

Indice 2. Ne prends la racine qu'après la soustraction.

Exercice 11

Indice 1. Les côtés opposés ont des vecteurs égaux dans le bon sens.

Indice 2. Utilise $C = B + D - A$.

Exercice 12

Indice 1. Traduis l'orthogonalité par une équation.

Indice 2. Le produit vaut $2t - 12$.

Exercice 13

Indice 1. Le travail est un produit scalaire.

Indice 2. La projection de la force dans la direction du déplacement est réduite par le cosinus.

Exercice 14

Indice 1. Le coefficient de projection est le produit avec un vecteur unitaire.

Indice 2. Multiplie ensuite ce coefficient par e .

Exercice 15

Indice 1. La somme des carrés des diagonales vaut deux fois la somme des carrés des côtés.

Indice 2. Retire 6^2 de 68 avant la racine.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le déplacement va de A vers B ; on soustrait A à B.

Construire la réponse.

1. La composante horizontale vaut $6 - 1 = 5$.
2. La composante verticale vaut $2 - 4 = -2$.
3. On obtient $\overrightarrow{AB} = (5; -2)$.

Vérifier. En ajoutant ce déplacement à A, on retrouve $(1 + 5; 4 - 2) = (6; 2)$, soit B.

Conclure. $\overrightarrow{AB} = (5; -2)$.

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le résultat demandé est un scalaire.

Construire la réponse.

1. Le premier produit est $3 \times 4 = 12$.
2. Le second est $2 \times (-1) = -2$.
3. La somme vaut $12 - 2 = 10$.

Vérifier. En inversant l'ordre, $4 \times 3 + (-1) \times 2$ donne aussi 10.

Conclure. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$. Les deux vecteurs ne sont pas orthogonaux.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les longueurs et l'angle sont connus : on applique directement la formule.

Construire la réponse.

1. Le produit des normes est $3 \times 4 = 12$.
2. $\cos 60^\circ = 1/2$, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12 \times 1/2 = 6$.

Vérifier. Le résultat est positif pour un angle aigu et ne dépasse pas 12 en valeur absolue.

Conclure. Le produit scalaire vaut 6.

Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La projection horizontale supprime seulement la composante verticale.

Construire la réponse.

1. Le vecteur unitaire horizontal est $\vec{e} = (1; 0)$.
2. La composante vaut $(4; -3) \cdot (1; 0) = 4$.
3. Le vecteur projeté est $4(1; 0) = (4; 0)$.

Vérifier. Le reste vaut $(4; -3) - (4; 0) = (0; -3)$: il est vertical et donc perpendiculaire à l'axe horizontal.

Conclure. La projection vectorielle est $(4; 0)$.

Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On veut retrouver le cas particulier d'un triangle rectangle.

Construire la réponse.

1. La formule est $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A$.
2. Pour $A = 90^\circ$, $\cos A = 0$.
3. Le terme croisé disparaît : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Vérifier. BC est bien le côté opposé à l'angle droit, donc l'hypoténuse.

Conclure. Al-Kashi redonne exactement le théorème de Pythagore.

Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le départ et le déplacement sont connus ; on ajoute les deux composantes.

Construire la réponse.

1. L'abscisse d'arrivée est $x_B = -2 + 4 = 2$.
2. L'ordonnée d'arrivée est $y_B = 3 + (-5) = -2$.

Vérifier. La différence arrivée moins départ donne $(2 - (-2); -2 - 3) = (4; -5)$, exactement le vecteur imposé.

Conclure. $B(2; -2)$.

Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Un angle droit en A concerne les vecteurs AB et AC.

Construire la réponse.

1. $\overrightarrow{AB} = (4 - 1; 3 - 1) = (3; 2)$.
2. $\overrightarrow{AC} = (-1 - 1; 4 - 1) = (-2; 3)$.
3. Le produit scalaire vaut $3 \times (-2) + 2 \times 3 = -6 + 6 = 0$.

Vérifier. Les deux vecteurs sont non nuls. En outre, $AB^2 = 13$, $AC^2 = 13$ et $BC^2 = 26$, ce qui confirme Pythagore.

Conclure. Le triangle ABC est rectangle en A.

Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On doit d'abord obtenir le cosinus de l'angle.

Construire la réponse.

1. Le produit des normes vaut $2 \times 5 = 10$.
2. $\cos \theta = -5/10 = -1/2$.
3. Sur $[0^\circ; 180^\circ]$, $\theta = 120^\circ$.

Vérifier. $10 \cos 120^\circ = 10 \times (-1/2) = -5$. Le signe négatif annonçait un angle obtus.

Conclure. L'angle vaut 120° , soit $2\pi/3$ radians.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On cherche une composante signée sur un axe orienté.

Construire la réponse.

1. La composante vaut $8 \cos 120^\circ$.
2. Comme $\cos 120^\circ = -1/2$, on obtient $8 \times (-1/2) = -4$.

Vérifier. La valeur absolue 4 est inférieure à la norme 8. L'angle obtus explique le signe négatif.

Conclure. La composante est -4 : la projection va dans le sens opposé à l'axe orienté.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les côtés de longueurs 4 et 7 entourent l'angle de 60 degrés.

Construire la réponse.

1. On écrit $c^2 = 4^2 + 7^2 - 2 \times 4 \times 7 \cos 60^\circ$.
2. Comme le cosinus vaut $1/2$, $c^2 = 16 + 49 - 28 = 37$.
3. La longueur est $c = \sqrt{37} \approx 6,08$.

Vérifier. On a $7 - 4 < 6,08 < 7 + 4$. Le carré 37 est inférieur à 65 puisque l'angle est aigu.

Conclure. Le troisième côté mesure $\sqrt{37}$, soit environ 6,08 unités.

Corrigé 11

 Démonstration / Solution expliquée

Comprendre la question. Le parallélogramme est nommé dans l'ordre ABCD ; le déplacement de B à C doit reproduire celui de A à D.

Construire la réponse.

1. $\overrightarrow{AD} = (-1 - 0; 4 - 1) = (-1; 3)$.

2. On impose $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et l'on ajoute ce vecteur à B : $C = (3 - 1; 2 + 3) = (2; 5)$.

Vérifier. $\overrightarrow{DC} = (2 - (-1); 5 - 4) = (3; 1)$ et $\overrightarrow{AB} = (3 - 0; 2 - 1) = (3; 1)$. L'autre paire de côtés confirme le parallélogramme.

Conclure. Le point recherché est $C(2; 5)$.

Corrigé 12

 Démonstration / Solution expliquée

Comprendre la question. On cherche la valeur de t qui rend le produit scalaire nul.

Construire la réponse.

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2t + 3 \times (-4) = 2t - 12$.

2. L'équation $2t - 12 = 0$ donne $2t = 12$, puis $t = 6$.

Vérifier. Pour $t = 6$, $2 \times 6 + 3 \times (-4) = 0$. Le vecteur $(6; -4)$ est non nul.

Conclure. Les vecteurs sont orthogonaux exactement pour $t = 6$.

Corrigé 13

 Démonstration / Solution expliquée

Comprendre la question. Le travail de la force dépend de sa composante dans la direction du déplacement.

Construire la réponse.

1. On écrit $W = F d \cos \theta$.

2. Avec $F = 40$ N, $d = 3$ m et $\theta = 60^\circ$, $W = 40 \times 3 \times 1/2 = 60$.

3. Si la force avait été parallèle au déplacement et de même sens, le cosinus aurait valu 1 et le travail 120.

Vérifier. À 60° , seule la moitié de la force contribue dans la direction du déplacement : le résultat est bien la moitié de 120.

Conclure. Le travail vaut 60 joules.

Corrigé 14

 Démonstration / Solution expliquée

Comprendre la question. Il faut calculer le scalaire puis le vecteur projeté sur la direction de e .

Construire la réponse.

1. $\|\vec{e}\|^2 = (1/\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^2 = 1$: e est unitaire.

2. $a = (3; 1) \cdot (1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}) = 4/\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

3. $a\vec{e} = (2\sqrt{2}/\sqrt{2}; 2\sqrt{2}/\sqrt{2}) = (2; 2)$.

Vérifier. Le reste est $(3; 1) - (2; 2) = (1; -1)$, dont le produit scalaire avec e vaut $1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2} = 0$.

Conclure. La composante est $2\sqrt{2}$ et le vecteur projeté $(2; 2)$.

Corrigé 15

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. L'identité du parallélogramme relie les deux diagonales aux deux côtés.

Construire la réponse.

1. Notons d la diagonale inconnue. On a $6^2 + d^2 = 2 \times 3^2 + 2 \times 5^2$.
2. Le membre de droite vaut $18 + 50 = 68$. Ainsi $36 + d^2 = 68$, puis $d^2 = 32$.
3. La racine positive donne $d = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5,66$.

Vérifier. Les carrés des diagonales totalisent $36 + 32 = 68$, comme les deux doubles carrés des côtés.

Conclure. L'autre diagonale mesure $4\sqrt{2}$, soit environ 5,66 unités.

9 Corrigé du problème

1. **Comprendre la question.** Le repère orthonormé permet les formules de norme et de produit scalaire en coordonnées.

Construire la réponse.

(a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$

(b) $\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4.$

(c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4 + 4 \times 0 = 12.$

Vérifier. Les normes sont positives et les deux vecteurs non nuls. Le produit scalaire est un nombre, pas un vecteur.

Conclure. Les normes valent 5 et 4 ; le produit scalaire vaut 12.

2. **Comprendre la question.** L'angle s'obtient en normalisant le produit scalaire par les deux normes.

Construire la réponse.

(a) $\cos \theta = (\vec{u} \cdot \vec{v}) / (\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|) = 12 / (5 \times 4) = 3/5 = 0,6.$

(b) On utilise la fonction inverse du cosinus en mode degrés : $\theta = \arccos(0,6) \approx 53,13^\circ.$

Vérifier. Le quotient est entre -1 et 1. Le produit scalaire positif annonçait un angle aigu, comme le résultat obtenu.

Conclure. Le cosinus vaut $3/5$ et l'angle environ $53,13^\circ$.

3. **Comprendre la question.** La projection algébrique exige une direction orientée par un vecteur unitaire.

Construire la réponse.

(a) Le vecteur unitaire de la direction de v est $\vec{e} = \vec{v} / \|\vec{v}\| = (1; 0).$

(b) La composante de u vaut $\vec{u} \cdot \vec{e} = 3$. On retrouve aussi $(\vec{u} \cdot \vec{v}) / \|\vec{v}\| = 12/4 = 3.$

(c) Le vecteur projeté correspondant est $3\vec{e} = (3; 0).$

Vérifier. La composante est la coordonnée horizontale de u , cohérente avec la direction horizontale positive de v .

Conclure. La projection algébrique vaut 3 unités ; elle est positive dans le sens de v .

4. **Comprendre la question.** Deux méthodes indépendantes doivent donner la même distance.

Construire la réponse.

(a) Par coordonnées, $\vec{u} - \vec{v} = (3 - 4; 4 - 0) = (-1; 4)$, donc sa norme vaut $\sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17}.$

(b) Par produit scalaire, $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$

(c) On remplace par $25 + 16 - 2 \times 12 = 17$, puis prend la racine positive.

Vérifier. La formule avec l'angle donne aussi $25 + 16 - 2 \times 5 \times 4 \times (3/5) = 17$: c'est la même relation d'Al-Kashi.

Conclure. La norme de la différence vaut $\sqrt{17} \approx 4,12$ unités.

5. **Comprendre la question.** Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

Construire la réponse.

(a) On calcule $\vec{u} \cdot \vec{w} = 3(-4) + 4 \times 3 = -12 + 12 = 0.$

(b) Les deux vecteurs sont non nuls, donc le critère d'orthogonalité s'applique.

Vérifier. Le vecteur $(-4; 3)$ s'obtient en effectuant un quart de tour de $(3; 4)$, ce qui confirme l'interprétation géométrique.

Conclure. Oui, u et w sont orthogonaux.

10 Variante autonome et bilan

Reprends avec $u = (1; 2)$ et $v = (2; 1)$: produit scalaire, angle et norme de la différence.

À toi d'essayer : Vérifie ta démarche

Résous la variante, puis explique pourquoi ta méthode s'applique.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 24 Explication, p. 25

- Je peux expliquer : calculer les coordonnées d'un vecteur du plan.
- Je peux expliquer : produit scalaire en coordonnées.
- Je peux expliquer : relier produit scalaire et angle.
- Je peux expliquer : projeter un vecteur sur un axe.
- Je peux expliquer : longueurs, angles et identité du parallélogramme.

11 Fiche-mémoire

Calculer les coordonnées d'un vecteur du plan.

1. Identifie le point de départ et le point d'arrivée.
2. Soustrais les coordonnées du départ à celles de l'arrivée, avec des parenthèses pour les valeurs négatives.
3. Pour une arrivée inconnue, ajoute le déplacement aux coordonnées du départ.
4. Pour une figure, écris une égalité de vecteurs avec les bonnes orientations.
5. Contrôle en recalculant la différence ou l'autre paire de côtés.

Produit scalaire en coordonnées.

1. Vérifie que le repère est orthonormé.
2. Si tu pars de points, forme les vecteurs avec arrivée moins départ.
3. Multiplie les coordonnées correspondantes et additionne en gardant les signes.
4. Pour une perpendicularité, impose que la somme soit nulle.
5. Interprète un nombre réel, pas les coordonnées d'un nouveau vecteur.

Relier produit scalaire et angle.

1. Identifie les deux normes, le produit scalaire et l'angle recherché.
2. Écris $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$.
3. Isole la grandeur inconnue sans supprimer le cosinus.
4. Pour un angle, contrôle le quotient dans $[-1; 1]$ et le mode de la calculatrice.
5. Contrôle aigu, droit ou obtus avec le signe du produit.

Projeter un vecteur sur un axe.

1. Choisis le sens positif de l'axe.
2. Vérifie que son vecteur directeur $\vec{e}$ est unitaire.
3. Calcule la composante $a = \vec{u} \cdot \vec{e}$.
4. Si un vecteur est demandé, calcule $a\vec{e}$.
5. Contrôle que $\vec{u} - a\vec{e}$ est perpendiculaire à l'axe.

Longueurs, angles et identité du parallélogramme.

1. Identifie les deux côtés entourant l'angle connu.
2. Place le côté opposé seul au carré.
3. Calcule les deux carrés et le terme $2ab \cos \theta$.
4. Prends la racine positive à la fin, puis arrondis.
5. Contrôle les inégalités triangulaires et le rôle aigu, droit ou obtus de l'angle.

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Calcule B moins A composante par composante.

Indice 2 — Un pas de plus.

La première différence est $5 - 2$ et la seconde $1 - 3$.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Multiplie les coordonnées de même position.

Indice 2 — Un pas de plus.

Additionne ensuite les deux produits.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Les normes sont positives pour deux vecteurs non nuls.

Indice 2 — Un pas de plus.

Un produit négatif impose un cosinus négatif.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Une composante porte une information de sens.

Indice 2 — Un pas de plus.

Un angle obtus donne un cosinus négatif.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve**Indice 1 — Une piste.**

Repère les deux côtés qui touchent l'angle.

Indice 2 — Un pas de plus.

Le troisième côté est opposé à cet angle.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche**Indice 1 — Une piste.**

Repère les données utiles et l'inconnue. Reviens à la méthode correspondante dans la boîte à outils.

Indice 2 — Un pas de plus.

Contrôle les unités, les bornes et la plausibilité du résultat avant de lire la correction.

[Revenir à la recherche, p. 22](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

$$\overrightarrow{AB} = (3; -2).$$

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

$$(1; 2) \cdot (3; 4) = 1 \times 3 + 2 \times 4 = 11.$$

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

L'angle géométrique est donc obtus.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

La composante peut donc être négative, contrairement à une longueur.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Le terme croisé utilise le cosinus de l'angle compris entre les deux côtés connus.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche

Comprendre la question. On refait les trois calculs avec les nouvelles coordonnées, dans un repère ortho-normé.

Construire la réponse.

1. Les normes valent toutes deux $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.
2. Le produit scalaire est $1 \times 2 + 2 \times 1 = 4$.
3. Le cosinus vaut $4/(\sqrt{5}\sqrt{5}) = 4/5$, donc $\theta \approx 36,87^\circ$.
4. La différence est $(1 - 2; 2 - 1) = (-1; 1)$, de norme $\sqrt{2}$.

Vérifier. Le contrôle par produit scalaire donne $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 5 + 5 - 2 \times 4 = 2$.

Conclure. Le produit vaut 4, l'angle environ $36,87^\circ$ et la norme de la différence $\sqrt{2}$.

[Revenir à la recherche, p. 22](#)