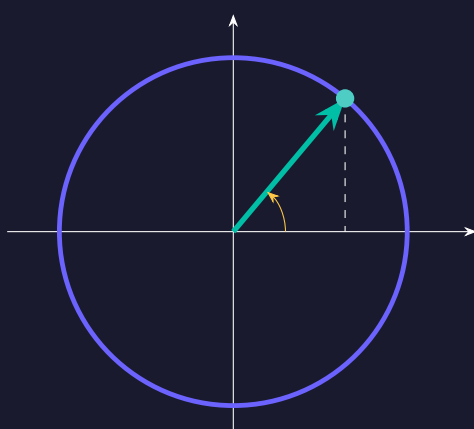


FICHE 03

Nombres complexes

Nombres complexes ■ Comprendre et s'entraîner



Première STI2D — spécialité maths

Année scolaire 2026–2027

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	Pourquoi ce chapitre ?	3
2	L'idée avant la formule	3
3	Le cours formel	3
3.1	Construire les nombres complexes	3
3.2	Addition, multiplication et division	4
3.3	Conjugaison et symétrie	5
3.4	Module, distance et argument	6
3.5	Passer à la forme trigonométrique	8
4	Boîte à outils	9
5	Exercices progressifs	11
6	Problème — Pour aller plus loin	13
7	Indices des exercices	14
8	Corrigés détaillés	16
9	Corrigé du problème	21
10	Variante autonome et bilan	22
11	Fiche-mémoire	22
12	Indices des pauses et des preuves	23
13	Explications des pauses et des preuves	25

1 Pourquoi ce chapitre ?

Les complexes donnent une écriture compacte aux positions et à certains calculs du plan. Les formes algébrique et trigonométrique décrivent le même nombre sous deux angles. **Ton parcours.** Partie mathématiques de la spécialité physique-chimie et mathématiques en STI2D. Cette fiche complète les cours de mathématiques communs ; elle ne remplace pas les enseignements de physique-chimie.

- Construire les nombres complexes.
- Addition, multiplication et division.
- Conjugaison et symétrie.
- Module, distance et argument.
- Passer à la forme trigonométrique.

2 L'idée avant la formule

La partie réelle donne l'abscisse, la partie imaginaire l'ordonnée. Le module mesure une distance et l'argument une direction, à un tour près.

3 Le cours formel

3.1 Construire les nombres complexes

Intuition | Construire la notion pas à pas

Élargir les nombres pour résoudre de nouvelles équations. Aucun réel n'a un carré négatif. On introduit un nombre i vérifiant $i^2 = -1$ et l'on construit des nombres de la forme $a + ib$, avec a et b réels. Cela permet de travailler sur des équations comme $z^2 = -1$ dans un ensemble plus large.

Lire deux composantes réelles. La partie réelle est a et la partie imaginaire est b . Le nombre ib est le terme imaginaire, mais le nom « partie imaginaire » désigne son coefficient réel b . Ainsi $3 - 2i$ a pour partie imaginaire -2 .

Associer un point. Le complexe $a + ib$ correspond au point de coordonnées $(a; b)$ d'un plan orthonormé. Les réels sont sur l'axe horizontal, les imaginaires purs sur l'axe vertical. Le nombre zéro appartient aux deux catégories.

Utiliser l'unicité. Deux complexes sont égaux exactement lorsque leurs deux composantes sont égales. Une équation complexe portant sur des inconnues réelles peut donc fournir deux équations réelles. En revanche, on n'utilise pas un ordre global « plus grand que » comme sur la droite réelle.

Définition | Comprendre la notion

On introduit un nombre i tel que $i^2 = -1$. Un complexe s'écrit de façon unique $z = a + ib$ avec a et b réels. a est sa partie réelle ; b , sa partie imaginaire. La partie imaginaire est b , pas ib . Les réels correspondent à $b = 0$; les imaginaires purs à $a = 0$. Deux complexes sont égaux lorsque leurs parties réelle et imaginaire sont respectivement égales. Dans un repère orthonormé direct, z est l'affixe du point $(a; b)$. Le complexe nul est l'origine. On ne compare pas les complexes avec un ordre « plus grand » analogue à celui des réels.

💡 Exemple | Exemple commenté

Pour $z = 3 - 2i$, on lit la forme $a + ib$ avec $a = 3$ et $b = -2$. Le point image se place trois unités vers la droite puis deux vers le bas. Si $x + iy = 3 - 2i$ avec x et y réels, l'unicité impose $x = 3$ et $y = -2$.

Les puissances de i se simplifient grâce à la relation de définition : $i^2 = -1$, $i^3 = i^2i = -i$, puis $i^4 = (-1)^2 = 1$. Multiplier encore par i recommence le cycle.

Par exemple $i^7 = i^4i^3 = 1 \times (-i) = -i$. Ramener l'exposant à un reste modulo quatre évite de multiplier i un grand nombre de fois.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

La partie imaginaire est un nombre réel : pour $5 - 3i$, elle vaut -3 . Le terme $-3i$ est imaginaire pur, mais ce n'est pas la partie imaginaire au sens de la définition.

À toi d'essayer : Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

La partie imaginaire de $5 - 3i$ est...

1. $-3i$
2. -3
3. 3

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.2 Addition, multiplication et division

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Additionner comme des coordonnées. Dans une somme, on regroupe les termes réels et les coefficients de i . Cela correspond à additionner séparément les deux composantes du plan. Les règles de distributivité usuelles restent valables.

Multiplier puis réduire. Un produit de deux complexes se développe en quatre termes. Le terme contenant i^2 devient un réel grâce à $i^2 = -1$. Il faut effectuer cette substitution avant de regrouper les composantes ; un signe moins devant i^2 devient alors un plus.

Comprendre l'usage du conjugué dans une division. Le produit $(c + id)(c - id) = c^2 + d^2$ est réel. Si le dénominateur est non nul, cette somme de carrés est strictement positive. Multiplier le numérateur et le dénominateur par $c - id$ conserve donc le quotient et rend son dénominateur réel.

Revenir à la forme demandée. Après division, on sépare la partie réelle et le coefficient de i . Une bonne vérification consiste à multiplier le quotient trouvé par le dénominateur initial pour retrouver le numérateur.

📖 Définition | Comprendre la notion

On additionne séparément parties réelle et imaginaire. Pour multiplier, développe puis remplace i^2 par -1 :

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Pour diviser par $c + id \neq 0$, multiplie numérateur et dénominateur par $c - id$. Le dénominateur devient $c^2 + d^2$, réel strictement positif. Une division par zéro reste impossible. Remets le résultat sous la forme $a + ib$ pour lire ses composantes.

Exemple | Exemple commenté

Calculons $(1 + 2i)/(1 - i)$. Le dénominateur est non nul ; son conjugué est $1 + i$. On multiplie en haut et en bas :

$$\frac{1 + 2i}{1 - i} = \frac{(1 + 2i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)}.$$

Au numérateur, le développement donne $1 + i + 2i + 2i^2 = 1 + 3i - 2 = -1 + 3i$. Au dénominateur, $1 - i^2 = 2$. Le quotient est donc $-1/2 + (3/2)i$.

Le contrôle donne $[-1/2 + (3/2)i](1 - i) = -1/2 + 2i + 3/2 = 1 + 2i$. On retrouve bien le numérateur, ce qui vérifie les signes et la division.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Dans un développement, $-2i^2 = +2$. Remplacer trop vite le terme par -2 est une erreur de signe fréquente ; écris d'abord $-2 \times (-1)$.

À toi d'essayer : Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

$$(1 + i)^2 =$$

1. 0
2. $2 + 2i$
3. $2i$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.3 Conjugaison et symétrie

Intuition | Construire la notion pas à pas

Voir la symétrie. Le conjugué de $a + ib$ est $a - ib$. Le point image garde son abscisse et change le signe de son ordonnée : c'est la symétrie par rapport à l'axe réel. Il ne faut donc pas changer les deux signes.

Extraire les composantes. Dans $z + \bar{z}$, les termes imaginaires s'annulent et il reste deux fois la partie réelle. Dans $z - \bar{z}$, les termes réels s'annulent et il reste deux fois le terme imaginaire. Ces identités permettent de retrouver une composante sans connaître l'autre.

Former un réel positif ou nul. Le produit $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ est une somme de carrés réels. Il est donc positif ou nul et ne s'annule que si a et b sont tous deux nuls.

Reconnaître des axes. Si $z = \bar{z}$, alors b vaut zéro : z est réel. Si $z = -\bar{z}$, alors a vaut zéro : z est imaginaire pur. La conjugaison respecte aussi addition et multiplication, ce qui simplifie le contrôle d'expressions complexes.

Définition | Comprendre la notion

Le conjugué de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$. Les points images sont symétriques par rapport à l'axe réel. On a $z + \bar{z} = 2a$, $z - \bar{z} = 2ib$ et $z\bar{z} = a^2 + b^2$. La conjugaison respecte les opérations : $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ et, si $w \neq 0$, $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$. Un complexe est réel exactement lorsqu'il égale son conjugué ; il est imaginaire pur lorsqu'il est l'opposé de son conjugué.

Exemple | Exemple commenté

Pour $z = 2 - 3i$, le conjugué est $2 + 3i$. La somme vaut 4 : elle retrouve deux fois la partie réelle 2. La différence vaut $-6i$: elle retrouve deux fois le terme imaginaire $-3i$.
Le produit est $(2 - 3i)(2 + 3i) = 4 - (3i)^2 = 4 - 9i^2 = 13$. La formule $a^2 + b^2$ donne également $2^2 + (-3)^2 = 4 + 9 = 13$.
Géométriquement, les points $(2; -3)$ et $(2; 3)$ sont symétriques par rapport à l'axe horizontal. Leurs distances à l'origine sont identiques, et le produit 13 correspond au carré de cette distance.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Le conjugué n'est pas l'opposé : pour $2 + 3i$, le conjugué est $2 - 3i$, tandis que l'opposé est $-2 - 3i$. Les deux transformations ont des effets géométriques différents.

À toi d'essayer : Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Le conjugué de $3 + 4i$ est...

1. $3 - 4i$
2. $-3 + 4i$
3. $-3 - 4i$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.4 Module, distance et argument

Intuition | Construire la notion pas à pas

Passer des coordonnées à une distance. Le module de $z = a + ib$ est la distance de son point image à l'origine. Le théorème de Pythagore donne $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. On prend la racine positive, car une distance ne peut pas être négative.

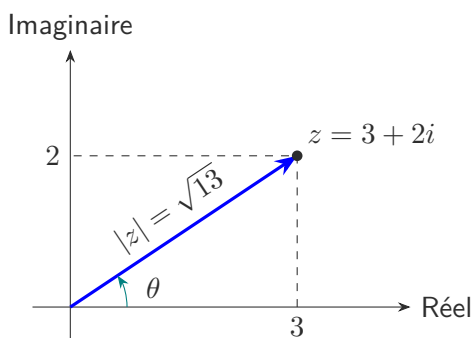
Mesurer un déplacement entre deux points. Si A et B ont pour affixes z_A et z_B , le vecteur allant de A vers B a pour affixe $z_B - z_A$. La distance AB est donc $|z_B - z_A|$. Le module de z_B seul mesurerait OB.

Décrire une direction avec un angle. Pour un complexe non nul, un argument est un angle du vecteur image par rapport à l'axe réel positif. Ajouter ou retirer un tour complet 2π ne change pas la direction ; les arguments ne sont donc pas uniques.

Contrôler le quadrant. Le quotient b/a peut donner la tangente d'un angle quand $a \neq 0$, mais deux directions opposées ont la même tangente. Les signes de a et b sont nécessaires pour choisir le bon quadrant. Le complexe zéro n'a pas d'argument, car le vecteur nul n'a pas de direction.

☰ Définition | Comprendre la notion

Le module de $z = a + ib$ est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$: la distance du point image à l'origine. On a $|zw| = |z||w|$ et $|z/w| = |z|/|w|$ si $w \neq 0$. Pour deux affixes a et b , la distance AB est $|b - a|$. Le module est positif ou nul et s'annule seulement pour zéro. Un argument d'un complexe non nul est un angle de son vecteur image avec l'axe réel positif. Ses arguments diffèrent d'un multiple entier de 2π . Le nombre nul n'a pas d'argument.



💡 Exemple | Exemple commenté

Pour $z = -3 + 4i$, le module vaut $\sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$. Le point est à gauche et au-dessus de l'origine : son argument doit être dans le deuxième quadrant.

Si l'on note cet argument θ , on a $\cos \theta = -3/5$ et $\sin \theta = 4/5$. Une valeur approchée est $\theta \approx 2,2143$ radians. Calculer seulement l'arctangente de $4/(-3)$ donnerait une direction du quatrième quadrant ; il faudrait la corriger d'un demi-tour.

Le contrôle $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 9/25 + 16/25 = 1$ valide les composantes normalisées. L'angle et le module décrivent la direction et la longueur du même vecteur.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Le module est $\sqrt{a^2 + b^2}$, pas $a + b$ ni $a^2 + b^2$. Les carrés servent à obtenir la distance au carré ; la racine est la dernière étape.

À toi d'essayer : Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

$$|3 + 4i| =$$

1. 7
2. 25
3. 5

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.5 Passer à la forme trigonométrique

Intuition | Construire la notion pas à pas

Décrire le même point autrement. La forme algébrique $a + ib$ indique un déplacement horizontal et un déplacement vertical. La forme trigonométrique indique une distance r à l'origine et une direction θ . Ce sont deux descriptions d'un même vecteur.

Normaliser les coordonnées. Pour un complexe non nul, on calcule $r = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$. En divisant les coordonnées par r , on obtient un point du cercle unité : $\cos \theta = a/r$ et $\sin \theta = b/r$. Les deux relations doivent être satisfaites simultanément.

Reconstruire le complexe. La forme $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ possède les composantes $r \cos \theta$ et $r \sin \theta$. Le facteur r multiplie les deux termes. Un angle remarquable permet souvent de conserver des valeurs exactes.

Choisir une direction cohérente. Les signes du cosinus et du sinus déterminent le quadrant. Le module r reste positif, même si une composante est négative. Le nombre zéro est traité à part : son module est nul et aucune direction ne lui est associée.

Définition | Comprendre la notion

Tout complexe non nul s'écrit $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r = |z| > 0$ et θ un argument. Depuis $a + ib$, calcule $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ puis $\cos \theta = a/r$ et $\sin \theta = b/r$. Les deux relations déterminent le quadrant. Dans l'autre sens, les coordonnées sont $a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$. La notation exponentielle et les opérations sur les arguments sont travaillées en terminale ; ici on apprend à identifier et représenter les deux formes.

Exemple | Exemple commenté

Pour $z = 1 + i$, le module est $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Les composantes normalisées valent $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$. On cherche donc un angle dont le cosinus et le sinus valent tous deux $\sqrt{2}/2$. L'angle $\pi/4$ convient dans le premier quadrant. On obtient

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Le contrôle inverse multiplie $\sqrt{2}$ par chacune des deux valeurs $\sqrt{2}/2$ et redonne 1 pour chaque composante.

Ajouter 2π à l'angle donnerait la même direction et le même complexe. Une forme trigonométrique n'impose donc pas un argument unique, mais elle impose le module positif $\sqrt{2}$.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Connaître seulement le sinus ou seulement le cosinus laisse parfois plusieurs directions possibles. Vérifie les deux composantes et leur signe avant de choisir l'angle.

À toi d'essayer : Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Dans la forme trigonométrique, r est...

1. Le module strictement positif
2. L'argument
3. La partie réelle

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 25](#)

4 Boîte à outils**✂ Méthode | Construire les nombres complexes**

1. Réécris le complexe sous la forme $a + ib$ avec a et b réels.
2. Lis séparément la partie réelle et le coefficient de i .
3. Pour une égalité, identifie les deux composantes pour former deux équations réelles.
4. Pour une puissance de i , utilise $i^2 = -1$ et le cycle de longueur quatre.
5. Contrôle par substitution ou par les coordonnées du point image.

✂ Méthode | Addition, multiplication et division

1. Pour une somme, regroupe séparément les parties réelles et imaginaires.
2. Pour un produit, développe tous les termes puis remplace chaque i^2 par -1 .
3. Pour un quotient, vérifie le dénominateur non nul et multiplie par son conjugué en haut et en bas.
4. Sépare le résultat sous la forme $a + ib$.
5. Contrôle un quotient en le remultipliant par le dénominateur initial.

✂ Méthode | Conjugaision et symétrie

1. Conserve la partie réelle et inverse seulement le signe du coefficient de i .
2. Utilise somme et différence pour isoler les composantes.
3. Utilise $z\bar{z} = a^2 + b^2$ pour obtenir un réel ou rendre un dénominateur réel.
4. Pour une égalité ou une positivité, reviens aux deux réels a et b .
5. Contrôle avec la symétrie des points images ou en conjuguant une deuxième fois.

 Méthode | Module, distance et argument

1. Pour un module, identifie les deux composantes réelles et calcule la racine de la somme de leurs carrés.
2. Pour une distance entre points, forme d'abord la différence des affixes.
3. Pour un argument, vérifie que le complexe est non nul.
4. Utilise les signes des composantes et les valeurs de cosinus et sinus pour choisir le quadrant.
5. Annonce un argument modulo 2π et contrôle la cohérence géométrique.

 Méthode | Passer à la forme trigonométrique

1. Vérifie que le complexe est non nul avant de rechercher une direction.
2. Calcule le module positif $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
3. Forme les deux rapports a/r et b/r .
4. Choisis un angle qui possède à la fois le bon cosinus, le bon sinus et le bon quadrant.
5. Reconstitue les coordonnées pour contrôler la forme trigonométrique.

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases ; 6 à 10 demandent plusieurs étapes ; 11 à 15 t'invitent à choisir, justifier et contrôler. Cherche avant de consulter les indices.

Exercice 1 — Parties réelle et imaginaire ★★☆☆

Donne les parties réelle et imaginaire de $z = -4 + 7i$.

Exercice 2 — Une somme ★★☆☆

Calcule $(3 + 2i) + (-5 + 4i)$.

Exercice 3 — Un conjugué ★★☆☆

Donne le conjugué de $-1 - 5i$.

Exercice 4 — Un module ★★☆☆

Calcule $|5 - 12i|$.

Exercice 5 — Revenir aux coordonnées ★★☆☆

Écris $2(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3))$ sous forme algébrique.

Exercice 6 — Une égalité complexe ★★☆☆

Résous $2x + 1 + i(y - 3) = 7 + 2i$ avec x et y réels.

Exercice 7 — Un produit ★★☆☆

Calcule $(2 + i)(3 - 2i)$.

Exercice 8 — Retrouver une composante ★★☆☆

$z + \bar{z} = 8$. Que peut-on dire des parties de z ?

Exercice 9 — Distance entre affixes ★★☆☆

A a pour affixe $1 + i$ et B $4 + 5i$. Calcule AB.

Exercice 10 — Un imaginaire pur ★★☆☆

Donne une forme trigonométrique de $-4i$.

Exercice 11 — Les puissances de i ★★☆☆

Calcule i^3 , i^4 et i^{10} .

Exercice 12 — Un quotient ★★☆☆

Écris $(3 + i)/(1 + 2i)$ sous forme algébrique.

Exercice 13 — Un réel positif ★★☆☆

Explique pourquoi $z\bar{z} \geq 0$ et détermine le cas d'égalité.

Exercice 14 — Un quadrant oublié ★★ ★

Pourquoi $\pi/4$ n'est-il pas un argument de $-1 - i$, malgré un quotient des composantes égal à 1 ?

Exercice 15 — Deuxième quadrant ★★ ★

Donne une forme trigonométrique de $-\sqrt{3} + i$.

6 Problème — Pour aller plus loin

Coder une position dans le plan complexe

On considère $z = 1 + i\sqrt{3}$ et $w = 1 - i\sqrt{3}$.

1. Place les points et explique le lien entre z et w .
2. Calcule leurs modules et donne un argument de chacun.
3. Écris leurs formes trigonométriques.
4. Calcule $z + w$, zw et z/w .
5. Résous $(1 - i)a = 2$ et vérifie la solution par multiplication.

7 Indices des exercices

Exercice 1

Indice 1. Compare à $a + ib$.

Indice 2. Le coefficient de i est réel.

Exercice 2

Indice 1. Regroupe les deux catégories de termes.

Indice 2. Additionne les coefficients de i .

Exercice 3

Indice 1. Ne change pas les deux signes.

Indice 2. Seule la partie imaginaire change.

Exercice 4

Indice 1. Additionne les carrés des composantes.

Indice 2. Prends ensuite la racine positive.

Exercice 5

Indice 1. Utilise les valeurs remarquables.

Indice 2. Le facteur 2 agit sur les deux termes.

Exercice 6

Indice 1. Écris deux équations réelles.

Indice 2. Identifie les coefficients de 1 et de i .

Exercice 7

Indice 1. Distribue tous les termes.

Indice 2. Le dernier terme devient positif.

Exercice 8

Indice 1. Les parties imaginaires se compensent.

Indice 2. Il reste $2a = 8$.

Exercice 9

Indice 1. Le déplacement s'écrit $b - a$.

Indice 2. Prends le module après la soustraction.

Exercice 10

Indice 1. Le module reste positif.

Indice 2. Le point est directement sous l'origine.

Exercice 11

Indice 1. Utilise $i^2 = -1$.

Indice 2. Sépare 10 en $8 + 2$.

Exercice 12

Indice 1. Utilise le conjugué du dénominateur.

Indice 2. Le dénominateur devient $1^2 + 2^2$.

Exercice 13

Indice 1. Utilise la forme algébrique.

Indice 2. Deux carrés positifs ou nuls ne se compensent pas.

Exercice 14

Indice 1. Regarde les signes de chaque composante.

Indice 2. Le premier quadrant ne convient pas.

Exercice 15

Indice 1. Divise les coordonnées par 2.

Indice 2. Cosinus négatif et sinus positif imposent le deuxième quadrant.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On compare directement le nombre donné à la forme $a + ib$.

Construire la réponse.

1. Dans $-4 + 7i$, le terme sans i vaut -4 : c'est la partie réelle.
2. Le coefficient réel qui multiplie i est 7 : c'est la partie imaginaire.

Vérifier. Le point image a les coordonnées $(-4; 7)$. Sa coordonnée verticale est bien le réel 7 , pas le complexe $7i$.

Conclure. La partie réelle est -4 et la partie imaginaire 7 .

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Une addition complexe se fait composante par composante.

Construire la réponse.

1. Les parties réelles donnent $3 + (-5) = -2$.
2. Les coefficients de i donnent $2 + 4 = 6$.
3. On assemble le résultat : $-2 + 6i$.

Vérifier. Soustraire le second terme au résultat donne $(-2 + 6i) - (-5 + 4i) = 3 + 2i$, ce qui retrouve le premier.

Conclure. La somme vaut $-2 + 6i$.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La conjugaison conserve l'abscisse et change seulement l'ordonnée.

Construire la réponse.

1. La partie réelle -1 reste -1 .
2. Le coefficient imaginaire -5 devient 5 , donc le conjugué est $-1 + 5i$.

Vérifier. Conjuguer à nouveau $-1 + 5i$ redonne $-1 - 5i$. Les points $(-1; -5)$ et $(-1; 5)$ sont bien symétriques par rapport à l'axe réel.

Conclure. Le conjugué est $-1 + 5i$.

Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le module est une distance à l'origine calculée à partir des deux composantes.

Construire la réponse.

1. Les composantes de $5 - 12i$ sont 5 et -12 .
2. Leurs carrés valent 25 et 144 , donc $|5 - 12i| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$.

Vérifier. Le résultat est positif et son carré vaut $5^2 + (-12)^2$. Le signe moins de la partie imaginaire disparaît dans le carré, pas dans la définition du nombre initial.

Conclure. Le module vaut 13.

Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On connaît le module et l'angle ; il faut multiplier les valeurs trigonométriques par le module.

Construire la réponse.

1. $\cos(\pi/3) = 1/2$ et $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.
2. La partie réelle vaut $2 \times 1/2 = 1$.
3. La partie imaginaire vaut $2 \times \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}$.

Vérifier. Le module du résultat est $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$, comme le module initial. Les deux composantes sont positives, cohérentes avec le premier quadrant.

Conclure. La forme algébrique est $1 + i\sqrt{3}$.

Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. x et y étant réels, on peut identifier les composantes de chaque membre.

Construire la réponse.

1. Les parties réelles donnent $2x + 1 = 7$. On soustrait 1 puis on divise par 2 : $2x = 6$, donc $x = 3$.
2. Les parties imaginaires donnent $y - 3 = 2$. On ajoute 3 : $y = 5$.

Vérifier. En remplaçant, $2 \times 3 + 1 + i(5 - 3) = 7 + 2i$, ce qui retrouve le membre droit.

Conclure. L'unique couple solution est $(x; y) = (3; 5)$.

Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On distribue les deux termes du premier facteur sur les deux termes du second.

Construire la réponse.

1. $(2 + i)(3 - 2i) = 6 - 4i + 3i - 2i^2$.
2. Comme $i^2 = -1$, le dernier terme vaut $-2(-1) = 2$.
3. Les réels donnent $6 + 2 = 8$ et les termes imaginaires $-4i + 3i = -i$.

Vérifier. La formule $(ac - bd) + i(ad + bc)$ avec $(a, b, c, d) = (2, 1, 3, -2)$ donne $6 - (-2) = 8$ et $-4 + 3 = -1$, confirmant le résultat.

Conclure. Le produit vaut $8 - i$.

Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La somme d'un complexe et de son conjugué ne conserve que la partie réelle.

Construire la réponse.

1. On écrit $z = a + ib$, donc $\bar{z} = a - ib$.
2. La somme vaut $2a$, et l'égalité donnée devient $2a = 8$, d'où $a = 4$.
3. Le coefficient b disparaît de l'équation et peut être n'importe quel réel.

Vérifier. Pour tout b réel, $(4 + ib) + (4 - ib) = 8$. Il serait donc injustifié de conclure b égal à zéro.

Conclure. La partie réelle est 4 ; la partie imaginaire reste libre. Les solutions sont tous les $4 + ib$ avec b réel.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On cherche la distance entre A et B, pas celle d'un seul point à l'origine.

Construire la réponse.

1. Le déplacement de A vers B a pour affixe $(4 + 5i) - (1 + i) = 3 + 4i$.
2. La distance est $AB = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Vérifier. Les différences de coordonnées sont 3 horizontalement et 4 verticalement : Pythagore redonne 5. Inverser la soustraction donnerait le vecteur opposé mais la même distance.

Conclure. $AB = 5$.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le point image est sur l'axe imaginaire négatif, à distance 4 de l'origine.

Construire la réponse.

1. Le module vaut $\sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$.
2. La direction vers le bas correspond à l'angle $-\pi/2$.
3. On écrit $-4i = 4(\cos(-\pi/2) + i \sin(-\pi/2))$.

Vérifier. Le cosinus vaut zéro et le sinus -1 : l'expression devient $4(0 - i) = -4i$. Le module est bien 4, pas -4.

Conclure. Une forme trigonométrique est $4(\cos(-\pi/2) + i \sin(-\pi/2))$.

Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On réduit chaque puissance avec la relation $i^2 = -1$.

Construire la réponse.

1. $i^3 = i^2 i = (-1)i = -i$.
2. $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$.

3. Comme $10 = 2 \times 4 + 2$, on écrit $i^{10} = (i^4)^2 i^2 = 1^2 \times (-1) = -1$.

Vérifier. Le cycle des puissances est $1, i, -1, -i$ puis recommence. L'exposant 10 a le même reste 2 que l'exposant 2 modulo quatre.

Conclure. $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ et $i^{10} = -1$.

Corrigé 12

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On rend le dénominateur réel à l'aide de son conjugué.

Construire la réponse.

1. Le conjugué de $1 + 2i$ est $1 - 2i$. On multiplie numérateur et dénominateur par ce nombre.
2. Le numérateur devient $(3 + i)(1 - 2i) = 3 - 6i + i - 2i^2 = 5 - 5i$.
3. Le dénominateur vaut $(1 + 2i)(1 - 2i) = 1 + 4 = 5$.
4. En divisant les deux composantes par 5, on obtient $1 - i$.

Vérifier. $(1 - i)(1 + 2i) = 1 + 2i - i - 2i^2 = 3 + i$ retrouve le numérateur initial.

Conclure. Le quotient sous forme algébrique est $1 - i$.

Corrigé 13

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le produit étudié est réel, ce qui permet ici de parler de positivité.

Construire la réponse.

1. Pour $z = a + ib$, le développement donne $z\bar{z} = a^2 + b^2$.
2. Chaque carré réel est positif ou nul ; leur somme est donc positive ou nulle.
3. Une somme de deux termes positifs ou nuls ne vaut zéro que si chacun vaut zéro. On obtient $a = 0$ et $b = 0$.

Vérifier. Si z vaut zéro, son produit avec son conjugué vaut bien zéro. Si au moins une composante est non nulle, son carré est strictement positif et le produit l'est aussi.

Conclure. $z\bar{z} \geq 0$, avec égalité exactement lorsque $z = 0$.

Corrigé 14

 Démonstration / Solution expliquée

Comprendre la question. La tangente ne distingue pas deux angles séparés d'un demi-tour.

Construire la réponse.

1. Pour $-1 - i$, les deux composantes sont négatives : le point est dans le troisième quadrant.
2. L'angle $\pi/4$ possède un cosinus et un sinus positifs ; il pointe donc dans le premier quadrant et ne convient pas.
3. Ajouter un demi-tour donne $\pi/4 + \pi = 5\pi/4$, dont les deux composantes sont négatives.
4. On peut aussi retirer 2π et choisir $-3\pi/4$ comme argument principal dans $] -\pi; \pi]$.

Vérifier. Les cosinus et sinus de $5\pi/4$ valent tous deux $-\sqrt{2}/2$. Avec le module $\sqrt{2}$, ils redonnent les composantes -1 et -1.

Conclure. Un argument est $5\pi/4$, ou $-3\pi/4$; le quotient égal à 1 ne suffit pas à choisir $\pi/4$.

Corrigé 15

 Démonstration / Solution expliquée

Comprendre la question. On normalise les composantes puis on choisit un angle du deuxième quadrant.

Construire la réponse.

1. Le module de $-\sqrt{3} + i$ est $\sqrt{3+1} = 2$.
2. On cherche $\cos \theta = -\sqrt{3}/2$ et $\sin \theta = 1/2$.
3. L'angle de référence est $\pi/6$; avec cosinus négatif et sinus positif, on choisit $\theta = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$.
4. La forme obtenue est $2(\cos(5\pi/6) + i \sin(5\pi/6))$.

Vérifier. Multiplier les deux valeurs trigonométriques par 2 redonne $-\sqrt{3}$ et 1. Le choix $\pi/6$ aurait donné une partie réelle positive et aurait été incorrect.

Conclure. Une forme trigonométrique est $2(\cos(5\pi/6) + i \sin(5\pi/6))$.

9 Corrigé du problème

1. **Comprendre la question.** La partie réelle fournit l'abscisse, la partie imaginaire fournit l'ordonnée.

Construire la réponse.

- (a) Le point d'affixe z a pour coordonnées $(1; \sqrt{3})$.
- (b) Celui d'affixe w a pour coordonnées $(1; -\sqrt{3})$.
- (c) Ils ont la même abscisse et des ordonnées opposées : ils sont symétriques par rapport à l'axe réel.

Vérifier. La conjugaison change uniquement le signe de la partie imaginaire, donc $w = \bar{z}$.

Conclure. Les points sont symétriques par rapport à l'axe réel et les deux nombres sont conjugués.

2. **Comprendre la question.** Le module est une distance à l'origine ; l'argument indique la direction.

Construire la réponse.

- (a) Pour chacun, le module vaut $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$.
- (b) Pour z , les coordonnées normalisées sont $1/2$ et $\sqrt{3}/2$: elles correspondent au cosinus et au sinus de $\pi/3$.
- (c) Pour w , le cosinus reste $1/2$ et le sinus devient $-\sqrt{3}/2$: on peut choisir $-\pi/3$.

Vérifier. z se situe dans le premier quadrant et w dans le quatrième. Les signes des arguments choisis sont cohérents ; on peut ajouter un multiple de deux π .

Conclure. Les modules valent 2 ; des arguments sont $\pi/3$ pour z et $-\pi/3$ pour w .

3. **Comprendre la question.** La forme trigonométrique associe le module et un argument.

Construire la réponse.

- (a) On utilise $r(\cos \theta + i \sin \theta)$.
- (b) $z = 2(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3))$.
- (c) $w = 2(\cos(-\pi/3) + i \sin(-\pi/3))$.

Vérifier. En remplaçant les valeurs trigonométriques, on retrouve $2(1/2 + i\sqrt{3}/2) = 1 + i\sqrt{3}$ et son conjugué.

Conclure. Les deux formes trigonométriques conservent le module 2 et des arguments opposés.

4. **Comprendre la question.** La somme et le produit exploitent la conjugaison ; le quotient demande un dénominateur réel.

Construire la réponse.

- (a) La somme vaut $(1 + i\sqrt{3}) + (1 - i\sqrt{3}) = 2$.
- (b) Le produit vaut $1 - (i\sqrt{3})^2 = 1 - (-3) = 4$, égal au carré du module.
- (c) Comme w est non nul, on multiplie numérateur et dénominateur du quotient par son conjugué z : $z/w = z^2/(wz) = z^2/4$.
- (d) $z^2 = 1 + 2i\sqrt{3} + (i\sqrt{3})^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. Le quotient est donc $-1/2 + i\sqrt{3}/2$.

Vérifier. Le quotient doit avoir un module $2/2 = 1$; le carré du module de la réponse est $1/4 + 3/4 = 1$.

Conclure. $z + w = 2$, $zw = 4$ et $z/w = -1/2 + i\sqrt{3}/2$.

5. **Comprendre la question.** Le coefficient non nul 1 moins i peut être éliminé par division.

Construire la réponse.

- (a) $a = 2/(1 - i)$.
- (b) On multiplie par le conjugué : $a = 2(1 + i)/((1 - i)(1 + i))$.
- (c) Le dénominateur vaut $1 - i^2 = 2$, donc $a = 1 + i$.

Vérifier. Le produit de contrôle est $(1 - i)(1 + i) = 1 - i^2 = 2$, comme demandé.

Conclure. L'unique solution est $a = 1 + i$.

10 Variante autonome et bilan

Pour $z = 3 + 3i$, donne module, argument, conjugué et carré.

À toi d'essayer : Vérifie ta démarche

Résous la variante, puis explique pourquoi ta méthode s'applique.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 24 Explication, p. 25

- Je peux expliquer : construire les nombres complexes.
- Je peux expliquer : addition, multiplication et division.
- Je peux expliquer : conjugaison et symétrie.
- Je peux expliquer : module, distance et argument.
- Je peux expliquer : passer à la forme trigonométrique.

11 Fiche-mémoire

Construire les nombres complexes.

1. Réécris le complexe sous la forme $a + ib$ avec a et b réels.
2. Lis séparément la partie réelle et le coefficient de i .
3. Pour une égalité, identifie les deux composantes pour former deux équations réelles.
4. Pour une puissance de i , utilise $i^2 = -1$ et le cycle de longueur quatre.
5. Contrôle par substitution ou par les coordonnées du point image.

Addition, multiplication et division.

1. Pour une somme, regroupe séparément les parties réelles et imaginaires.
2. Pour un produit, développe tous les termes puis remplace chaque i^2 par -1 .
3. Pour un quotient, vérifie le dénominateur non nul et multiplie par son conjugué en haut et en bas.
4. Sépare le résultat sous la forme $a + ib$.
5. Contrôle un quotient en le remultipliant par le dénominateur initial.

Conjugaison et symétrie.

1. Conserve la partie réelle et inverse seulement le signe du coefficient de i .
2. Utilise somme et différence pour isoler les composantes.
3. Utilise $z\bar{z} = a^2 + b^2$ pour obtenir un réel ou rendre un dénominateur réel.
4. Pour une égalité ou une positivité, reviens aux deux réels a et b .
5. Contrôle avec la symétrie des points images ou en conjuguant une deuxième fois.

Module, distance et argument.

1. Pour un module, identifie les deux composantes réelles et calcule la racine de la somme de leurs carrés.
2. Pour une distance entre points, forme d'abord la différence des affixes.
3. Pour un argument, vérifie que le complexe est non nul.
4. Utilise les signes des composantes et les valeurs de cosinus et sinus pour choisir le quadrant.
5. Annonce un argument modulo 2π et contrôle la cohérence géométrique.

Passer à la forme trigonométrique.

1. Vérifie que le complexe est non nul avant de rechercher une direction.
2. Calcule le module positif $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
3. Forme les deux rapports a/r et b/r .
4. Choisis un angle qui possède à la fois le bon cosinus, le bon sinus et le bon quadrant.
5. Reconstitue les coordonnées pour contrôler la forme trigonométrique.

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Cherche le coefficient réel de i .

Indice 2 — Un pas de plus.

Dans $5 - 3i$, ce coefficient inclut le signe moins.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Développe le carré comme une identité remarquable.

Indice 2 — Un pas de plus.

Le terme i^2 vaut -1 et annule le terme réel 1 .

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

La partie réelle 3 ne change pas.

Indice 2 — Un pas de plus.

Le coefficient imaginaire 4 devient -4 .

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Utilise le théorème de Pythagore sur les composantes 3 et 4 .

Indice 2 — Un pas de plus.

Additionne les carrés puis prends la racine.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve**Indice 1 — Une piste.**

Le facteur r mesure la distance du point à l'origine.

Indice 2 — Un pas de plus.

Pour un complexe non nul, cette distance est positive.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche**Indice 1 — Une piste.**

Repère les données utiles et l'inconnue. Reviens à la méthode correspondante dans la boîte à outils.

Indice 2 — Un pas de plus.

Contrôle les unités, les bornes et la plausibilité du résultat avant de lire la correction.

[Revenir à la recherche, p. 22](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

La partie imaginaire vaut -3.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

$$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i.$$

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Le conjugué de $3 + 4i$ est $3 - 4i$.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

$$|3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

r est le module strictement positif du complexe.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche

Comprendre la question. On traduit les coordonnées du nombre complexe en module et direction, puis on effectue le carré.

Construire la réponse.

1. $|z| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
2. Les deux coordonnées sont positives et égales : un argument est $\pi/4$.
3. Le conjugué est $3 - 3i$.
4. $z^2 = (3 + 3i)^2 = 9 + 18i + 9i^2 = 18i$.

Vérifier. Le module du carré doit être $|z|^2 = 18$ et son argument le double, $\pi/2$: le nombre $18i$ vérifie ces deux propriétés.

Conclure. Le module est $3\sqrt{2}$, un argument $\pi/4$, le conjugué $3 - 3i$ et le carré $18i$.

[Revenir à la recherche, p. 22](#)