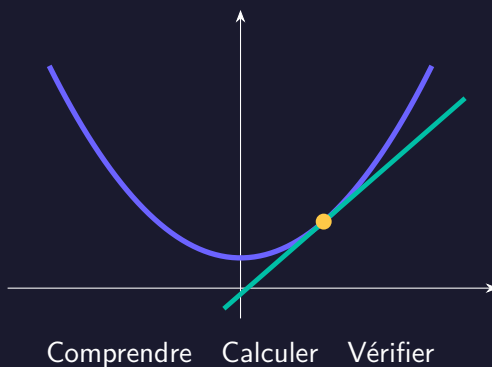


FICHE 04

Dérivées et approximation affine

Analyse ■ Comprendre et s'entraîner



Première STI2D — spécialité maths
Année scolaire 2026–2027

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	Pourquoi ce chapitre ?	3
2	L'idée avant la formule	3
3	Le cours formel	3
3.1	Approcher une fonction par sa tangente	3
3.2	Dériver une puissance	4
3.3	Dériver un produit et un quotient	5
3.4	Dériver une fonction d'une expression affine	6
3.5	Dériver sinus, cosinus et signaux	7
4	Boîte à outils	8
5	Exercices progressifs	10
6	Problème — Pour aller plus loin	12
7	Indices des exercices	13
8	Corrigés détaillés	15
9	Corrigé du problème	20
10	Variante autonome et bilan	21
11	Fiche-mémoire	21
12	Indices des pauses et des preuves	22
13	Explications des pauses et des preuves	24

1 Pourquoi ce chapitre ?

Une dérivée fournit une pente et une approximation locale. Les règles de produit et de composition permettent d'étudier des signaux plus riches qu'un polynôme. **Ton parcours.** Partie mathématiques de la spécialité physique-chimie et mathématiques en STI2D. Cette fiche complète les cours de mathématiques communs ; elle ne remplace pas les enseignements de physique-chimie.

- Approcher une fonction par sa tangente.
- Dérivée une puissance.
- Dérivée un produit et un quotient.
- Dérivée une fonction d'une expression affine.
- Dérivée sinus, cosinus et signaux.

2 L'idée avant la formule

La tangente remplace une petite portion de courbe par une droite. Elle donne une approximation près du point choisi, pas une formule exacte sur tout l'intervalle.

3 Le cours formel

3.1 Approcher une fonction par sa tangente

Intuition | Construire la notion pas à pas

Remplacer localement une courbe par une droite. Près d'une abscisse a , la tangente fournit une estimation de la fonction. Si l'entrée varie d'une petite quantité h , la sortie varie approximativement de $hf'(a)$. On ajoute cette variation à la valeur connue $f(a)$.

Déterminer le bon écart. Pour approcher $f(4,98)$ autour de 5, on a $h = 4,98 - 5 = -0,02$. Le signe de h est essentiel : une petite diminution de l'entrée n'a pas le même effet qu'une augmentation.

Lire les unités. La dérivée a pour unité celle de la sortie divisée par celle de l'entrée. La multiplication par h redonne donc une variation dans l'unité de la sortie. La formule $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$ additionne ainsi deux grandeurs compatibles.

Garder le statut d'approximation. La tangente donne exactement la valeur en a , mais généralement pas aux points voisins. La qualité dépend de la fonction et de la distance à a . Quand une expression exacte de l'erreur est disponible, elle permet de savoir si l'on surestime ou sous-estime et de quantifier l'écart.

Définition | Comprendre la notion

Au voisinage de a , une fonction dérivable vérifie l'approximation

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a).$$

La tangente remplace localement la courbe. La variation de sortie est donc environ la pente multipliée par la petite variation d'entrée. Il s'agit d'une approximation, pas d'une égalité exacte. Elle est adaptée à de petits accroissements et doit être contrôlée si l'on s'éloigne du point de départ. La notation dy/dx rappelle l'unité d'un taux de variation.

💡 Exemple | Exemple commenté

Pour approcher $3,02^2$, on choisit $f(x) = x^2$, $a = 3$ et $h = 0,02$. On connaît $f(3) = 9$ et $f'(3) = 6$. La variation estimée est $6 \times 0,02 = 0,12$, donc $3,02^2 \approx 9,12$. Le développement exact donne $(3 + h)^2 = 9 + 6h + h^2$.

Le terme oublié vaut ici $h^2 = 0,0004$. La vraie valeur est donc 9,1204 et l'approximation sous-estime de 0,0004. Si h était dix fois plus grand, cette erreur quadratique serait cent fois plus grande : le caractère local de la méthode est concret.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Ne remplace pas le symbole d'approximation par une égalité. Une pente locale ne décrit pas exactement toute la courbe, même si les premières décimales coïncident.

À toi d'essayer : Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

L'approximation affine de $f(a+h)$ est...

1. $f(a) + f'(h)$
2. $f(a) + hf'(a)$
3. $hf(a)$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 22 [Explication](#), p. 24

3.2 Dériver une puissance

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Une règle pour les puissances. La dérivée de x^n est nx^{n-1} pour un entier naturel non nul n . Deux opérations sont nécessaires : multiplier par l'ancien exposant et diminuer cet exposant de 1. La dérivée de x^4 est ainsi $4x^3$, et non x^3 ou $4x^4$.

Conserver les coefficients. Si un terme est multiplié par un nombre, sa dérivée l'est aussi. Dans $3x^4$, on conserve 3 et on le multiplie par 4 : on obtient $12x^3$. La dérivée d'une somme est la somme des dérivées. Les signes moins appartiennent aux coefficients et doivent rester présents.

Reconnaître les cas simples. Le terme x a pour dérivée 1. Une constante a pour dérivée 0, car sa valeur ne change pas. Il est utile de traiter séparément chaque terme d'un polynôme avant de réunir le résultat.

Préciser le domaine. Un polynôme est dérivable sur tous les réels. Pour $1/x = x^{-1}$, la même règle avec l'exposant -1 donne $-x^{-2} = -1/x^2$, mais zéro reste interdit. Dériver ne supprime jamais une interdiction du domaine initial.

📖 Définition | Comprendre la notion

Pour un entier naturel n non nul, $(x^n)' = nx^{n-1}$. La règle s'applique aussi à $n = -1$ sur les intervalles où x n'est pas nul : $(1/x)' = -1/x^2$. Le coefficient n descend devant la puissance et l'exposant diminue de 1. Pour un polynôme, on applique cette règle terme à terme. Le domaine

doit être annoncé : une puissance entière positive est définie partout ; un exposant négatif interdit zéro. La notation de dérivée peut aussi être df/dx lorsque le nom de la variable est utile.

Exemple | Exemple commenté

Soit $f(x) = 3x^5 - 2x^2$. Le premier terme donne $3 \times 5x^4 = 15x^4$. Le deuxième donne $-2 \times 2x = -4x$. Donc $f'(x) = 15x^4 - 4x$ pour tout réel x .

On vérifie la structure : chaque degré a diminué d'une unité, les coefficients ont été multipliés par les anciens exposants et le signe négatif est conservé. Au point $x = 1$, la pente vaut $15 - 4 = 11$, tandis que la valeur de la fonction vaut $3 - 2 = 1$.

La dérivation fabrique une nouvelle fonction qui décrit des pentes ; elle ne consiste donc pas à simplement simplifier l'expression de départ.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Le coefficient d'origine ne remplace pas l'exposant : on les multiplie. Ainsi la dérivée de $2x^5$ vaut $10x^4$, pas $5x^4$.

À toi d'essayer : Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

La dérivée de x^5 vaut...

1. $4x^5$
2. $5x^4$
3. x^4

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 22](#) [Explication, p. 24](#)

3.3 Dériver un produit et un quotient

Intuition | Construire la notion pas à pas

Deux facteurs peuvent varier en même temps. Pour un produit uv , une variation de u change le résultat même si v reste provisoirement fixé ; une variation de v le change aussi. La dérivée réunit ces deux contributions : $u'v + uv'$.

Cette règle ne se réduit pas au produit $u'v'$. Par exemple $x \times x = x^2$ a pour dérivée $2x$, alors que le produit des deux dérivées serait seulement 1.

Organiser le calcul. Écris séparément u , v , u' et v' . Applique ensuite la formule avec des parenthèses avant de développer. Cela limite les oublis de termes et de signes.

Pour un quotient. Lorsque $v \neq 0$, la dérivée de u/v vaut $(u'v - uv')/v^2$. L'ordre des termes au numérateur et le signe moins comptent. Le dénominateur au carré est positif là où il existe, mais les zéros de v restent interdits.

Une réécriture plus simple de la fonction peut fournir un second calcul indépendant. Vérifier que les deux méthodes donnent la même expression est un contrôle efficace.

Définition | Comprendre la notion

Pour deux fonctions dérivables u et v , $(uv)' = u'v + uv'$. Le produit des dérivées seul est incorrect. L'idée vient de la variation du produit : on ajoute et retranche $u(a+h)v(a)$, puis on sépare les deux variations. En divisant par h et en passant à la limite, les deux contributions apparaissent. Si v ne s'annule pas, $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$. Le carré du dénominateur ne dispense pas d'exclure ses zéros du domaine. Identifie clairement u , v et leurs dérivées avant d'appliquer la formule.

Exemple | Exemple commenté

Pour $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 2)$, on choisit $u = x^2 + 1$ et $v = 3x - 2$, d'où $u' = 2x$ et $v' = 3$. La règle donne $f' = 2x(3x - 2) + 3(x^2 + 1)$. En développant, $6x^2 - 4x + 3x^2 + 3 = 9x^2 - 4x + 3$. Un autre chemin consiste à développer d'abord $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 2$. Sa dérivée terme à terme est aussi $9x^2 - 4x + 3$. Les deux contributions du produit sont donc bien nécessaires.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Dans la formule du quotient, les parenthèses autour de uv' évitent de perdre un signe. On soustrait tout ce produit, pas seulement son premier terme.

À toi d'essayer : Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

La dérivée de uv vaut...

1. $u' + v'$
2. $u'v + uv'$
3. $u'v'$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 22 [Explication](#), p. 24

3.4 Dériver une fonction d'une expression affine

Intuition | Construire la notion pas à pas

Une fonction à l'intérieur d'une autre. Dans $(3x - 1)^2$, on calcule d'abord $3x - 1$, puis on élève le résultat au carré. L'intérieur est une fonction affine et l'extérieur est la fonction carré.

Deux vitesses de variation se combinent. Quand x varie de h , l'intérieur $ax + b$ varie de ah . La pente de la fonction extérieure doit donc être multipliée par a . C'est l'origine de la règle : si $g(x) = f(ax + b)$, alors $g'(x) = af'(ax + b)$.

Garder l'argument intact. On dérive la fonction extérieure, mais on conserve l'expression $ax + b$ comme argument. On multiplie ensuite par la dérivée a de l'intérieur. Le décalage b a une dérivée nulle et ne crée pas de facteur.

Pour une puissance, cela donne $((ax + b)^n)' = na(ax + b)^{n-1}$. Un coefficient intérieur négatif peut rendre la dérivée négative : son signe ne doit pas disparaître. La formule s'utilise seulement où les fonctions en jeu sont définies et dérivables.

Définition | Comprendre la notion

Si $g(x) = f(ax + b)$, alors $g'(x) = af'(ax + b)$. Le facteur a provient de la vitesse à laquelle l'expression intérieure varie avec x . On dérive la fonction extérieure à son argument, puis on multiplie par la dérivée a de l'intérieur. Le décalage b ne crée pas de facteur supplémentaire. La règle vaut sur le domaine où la composition est définie et dérivable. Elle s'applique aux puissances, aux fonctions trigonométriques et, plus tard, aux exponentielles et logarithmes.

Exemple | Exemple commenté

Pour $g(x) = (3x - 1)^2$, on identifie l'intérieur $u(x) = 3x - 1$, de dérivée 3. Le carré extérieur a pour dérivée deux fois son argument.

On obtient $g'(x) = 2(3x - 1) \times 3 = 6(3x - 1) = 18x - 6$. Le facteur 3 final traduit le changement de l'argument intérieur.

En développant d'abord $g(x) = 9x^2 - 6x + 1$, on retrouve $g'(x) = 18x - 6$. Oublier le facteur 3 aurait produit $6x - 2$, incompatible avec ce contrôle.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

La dérivée intérieure est un facteur multiplicatif indispensable. Elle ne se remplace pas par le terme constant du décalage.

À toi d'essayer : Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

La dérivée de $(3x + 1)^2$ est...

1. $6x$
2. $2(3x + 1)$
3. $6(3x + 1)$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 22](#) [Explication, p. 24](#)

3.5 Dériver sinus, cosinus et signaux

Intuition | Construire la notion pas à pas

Les angles doivent être en radians. Les formules $(\sin x)' = \cos x$ et $(\cos x)' = -\sin x$ utilisent la mesure en radians. Employer directement un angle mesuré en degrés nécessiterait un facteur de conversion.

Dériver un signal composé. Dans $A \sin(\omega t + \varphi)$, A multiplie le signal, ω décrit la vitesse de variation de l'argument et φ est un décalage fixe. La composition impose de multiplier la dérivée extérieure par ω . On obtient $A\omega \cos(\omega t + \varphi)$.

Pour un cosinus, il faut en plus conserver le signe moins : la dérivée vaut $-A\omega \sin(\omega t + \varphi)$. L'amplitude de la dérivée est $|A\omega|$; dériver ne conserve donc pas en général l'amplitude initiale.

Relier les grandeurs physiques. Si s décrit une position en mètres et t un temps en secondes, sa dérivée décrit une vitesse en m/s. Une deuxième dérivation donne une accélération en m/s². Une position nulle à un instant ne signifie pas que l'objet est immobile.

Définition | Comprendre la notion

Avec des angles en radians, $(\sin x)' = \cos x$ et $(\cos x)' = -\sin x$. Par composition affine, la dérivée de $A \sin(\omega t + \varphi)$ vaut $A\omega \cos(\omega t + \varphi)$; celle de $A \cos(\omega t + \varphi)$ vaut $-A\omega \sin(\omega t + \varphi)$. Le facteur de pulsation modifie l'amplitude de la dérivée. Dans un mouvement, dériver une position donne une vitesse, puis dériver la vitesse donne une accélération. Il faut conserver les unités et la variable utilisée.

Exemple | Exemple commenté

Pour $s(t) = 3 \sin(2t + \pi/4)$, l'intérieur a pour dérivée 2. La vitesse est donc $s'(t) = 3 \times 2 \cos(2t + \pi/4) = 6 \cos(2t + \pi/4)$.

Une nouvelle dérivation transforme le cosinus en moins sinus et apporte encore un facteur 2 : $s''(t) = -12 \sin(2t + \pi/4)$.

Comme $s(t) = 3 \sin(2t + \pi/4)$, on peut écrire $s''(t) = -4s(t)$. Le facteur -4 vient de deux dérivations successives et du carré de la pulsation 2 ; le décalage $\pi/4$ reste dans l'argument.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Le décalage de phase reste dans l'argument, mais ne multiplie pas la dérivée. C'est la pulsation, coefficient de la variable, qui fournit ce facteur.

À toi d'essayer : Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

La dérivée de $\cos x$ est...

1. $-\sin x$
2. $\cos x$
3. $\sin x$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 23 [Explication](#), p. 24

4 Boîte à outils

Méthode | Approcher une fonction par sa tangente

1. Choisis une abscisse a où la fonction et sa dérivée sont connues.
2. Calcule $h = x - a$ avec son signe.
3. Évalue la variation estimée $hf'(a)$.
4. Ajoute-la à $f(a)$ en utilisant un signe d'approximation.
5. Contrôle l'erreur lorsque la valeur exacte ou un encadrement est accessible.

 Méthode | Dériver une puissance

1. Découpe la somme en termes avec leurs signes.
2. Pour chaque puissance, multiplie par l'exposant puis diminue-le de 1.
3. Conserve le coefficient initial et dérive les constantes en zéro.
4. Réunis les termes obtenus et simplifie.
5. Annonce le domaine, notamment lorsque zéro est interdit.

 Méthode | Dériver un produit et un quotient

1. Détermine le domaine, en excluant les zéros du dénominateur.
2. Nomme u et v puis calcule leurs dérivées.
3. Applique la formule du produit ou du quotient avec des parenthèses.
4. Simplifie ensuite les expressions.
5. Si possible, contrôle en développant ou en réécrivant la fonction initiale.

 Méthode | Dériver une fonction d'une expression affine

1. Identifie l'intérieur affine et la fonction extérieure.
2. Calcule la dérivée de l'intérieur, avec son signe.
3. Dérive l'extérieur en conservant son argument.
4. Multiplie les deux contributions.
5. Contrôle éventuellement par développement pour une petite puissance.

 Méthode | Dériver sinus, cosinus et signaux

1. Vérifie que les angles sont en radians.
2. Conserve l'amplitude et repère la dérivée de l'argument.
3. Dérive sinus en cosinus, ou cosinus en moins sinus.
4. Multiplie par la dérivée intérieure.
5. Pour une valeur initiale, substitue ensuite $t = 0$ et précise l'unité.

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases ; 6 à 10 demandent plusieurs étapes ; 11 à 15 t'invitent à choisir, justifier et contrôler. Cherche avant de consulter les indices.

Exercice 1 — Une estimation locale ★☆☆

$f(2) = 5$ et $f'(2) = 3$. Approche $f(2,01)$.

Exercice 2 — Une puissance simple ★☆☆

Dérive x^7 .

Exercice 3 — Produit de deux fonctions ★☆☆

Dérive $(x+1)(x^2+2)$.

Exercice 4 — Un carré composé ★☆☆

Dérive $(2x+5)^2$.

Exercice 5 — Une somme trigonométrique ★☆☆

Dérive $f(x) = 2 \sin x + 3 \cos x$.

Exercice 6 — Un accroissement négatif ★★☆☆

Approche $4,98^2$ autour de 5.

Exercice 7 — Un polynôme plus élevé ★★☆☆

Dérive $2x^5 - 3x^4 + x - 8$.

Exercice 8 — Quotient affine ★★☆☆

Dérive $f(x) = (x+1)/(x-2)$ pour $x \neq 2$.

Exercice 9 — Un cube composé ★★☆☆

Dérive $(1-4x)^3$.

Exercice 10 — Un signal composé ★★☆☆

Dérive $u(t) = 5 \cos(4t-1)$.

Exercice 11 — Une erreur à expliquer ★★★

Pourquoi la tangente du carré en 3 sous-estime-t-elle toujours $(3+h)^2$ pour h non nul ?

Exercice 12 — Une puissance négative ★★★

Dérive $f(x) = 4/x$ et donne le domaine de validité.

Exercice 13 — Vérifier par une autre forme ★★★

Pour $x \neq 0$, dérive $(x^2+1)/x$ de deux façons.

Exercice 14 — Une erreur de facteur ★★ ★

Un élève dérive $(5x + 2)^4$ en $4(5x + 2)^3$. Corrige et explique.

Exercice 15 — Vitesse initiale ★★ ★

Une position est $s(t) = 2 \sin(3t)$, en mètres. Calcule la vitesse et la vitesse initiale.

6 Problème — Pour aller plus loin

Approximer un signal près d'un instant

On étudie $f(t) = (t + 1) \sin(2t)$, avec les angles en radians.

1. Identifie les deux facteurs et dérive f .
2. Calcule $f(0)$, sa dérivée en zéro et la tangente.
3. Utilise la tangente pour prévoir $f(0,05)$, puis compare à la valeur calculée.
4. Dérive séparément $g(t) = 1/(t + 1)$ et donne son domaine.
5. Explique pourquoi dériver le produit des deux facteurs séparément puis multiplier serait faux.

7 Indices des exercices

Exercice 1

Indice 1. Calcule l'écart à 2.

Indice 2. La pente multiplie cet écart.

Exercice 2

Indice 1. Utilise la règle avec $n = 7$.

Indice 2. Le nouvel exposant est 6.

Exercice 3

Indice 1. Il faut deux termes dans la dérivée.

Indice 2. Le second facteur a pour dérivée $2x$.

Exercice 4

Indice 1. Le carré porte sur toute la parenthèse.

Indice 2. L'intérieur varie deux fois plus vite que x .

Exercice 5

Indice 1. Dérive chaque terme séparément.

Indice 2. Le cosinus se dérive en moins sinus.

Exercice 6

Indice 1. L'écart à 5 est négatif.

Indice 2. Le signe de h doit être conservé.

Exercice 7

Indice 1. Traite chaque terme séparément.

Indice 2. La dérivée de x vaut 1.

Exercice 8

Indice 1. Le numérateur est $u'v - uv'$.

Indice 2. Le signe moins porte sur toute la seconde parenthèse.

Exercice 9

Indice 1. La dérivée intérieure vaut -4 .

Indice 2. Le nouveau carré ne change pas ce signe.

Exercice 10

Indice 1. Le facteur intérieur est 4.

Indice 2. Conserve le signe moins du cosinus.

Exercice 11

Indice 1. Compare le développement exact à l'approximation.

Indice 2. Le terme oublié est le carré de h .

Exercice 12

Indice 1. Réécris l'inverse comme une puissance.

Indice 2. Le dénominateur ne peut pas s'annuler.

Exercice 13

Indice 1. Le quotient peut se séparer en deux termes.

Indice 2. Les deux résultats doivent être algébriquement égaux.

Exercice 14

Indice 1. Quelle est la dérivée de $5x + 2$?

Indice 2. La règle de composition multiplie les deux contributions.

Exercice 15

Indice 1. La vitesse est la dérivée de la position.

Indice 2. Ne confonds pas $s(0)$ et sa dérivée en 0.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La nouvelle abscisse est très proche de 2, où la valeur et la pente sont données.

Construire la réponse.

1. L'écart est $h = 2,01 - 2 = 0,01$.
2. La variation estimée vaut $3 \times 0,01 = 0,03$.
3. On ajoute cette variation à 5 : $f(2,01) \approx 5,03$.

Vérifier. La pente et l'écart sont positifs : une valeur légèrement supérieure à 5 est cohérente. Les seules données ne donnent pas l'erreur exacte.

Conclure. $f(2,01) \approx 5,03$.

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On applique la règle avec l'exposant 7.

Construire la réponse.

1. Dans nx^{n-1} , on remplace n par 7.
2. On obtient $7x^{7-1} = 7x^6$.

Vérifier. L'exposant a diminué de 1 et le coefficient vaut l'ancien exposant.

Conclure. La dérivée de x^7 est $7x^6$ sur les réels.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les deux facteurs dépendent de x et contribuent à la dérivée.

Construire la réponse.

1. On pose $u = x + 1$, $v = x^2 + 2$, donc $u' = 1$ et $v' = 2x$.
2. La dérivée est $1(x^2 + 2) + (x + 1)2x$.
3. Le développement donne $x^2 + 2 + 2x^2 + 2x = 3x^2 + 2x + 2$.

Vérifier. Le produit initial se développe en $x^3 + x^2 + 2x + 2$, dont la dérivée est identique.

Conclure. La dérivée vaut $3x^2 + 2x + 2$ sur les réels.

Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le carré porte sur toute l'expression $2x + 5$.

Construire la réponse.

1. L'intérieur a pour dérivée 2.
2. La dérivée du carré donne $2(2x + 5)$.

3. On multiplie par 2 : $4(2x + 5) = 8x + 20$.

Vérifier. Le développement $4x^2 + 20x + 25$ a bien pour dérivée $8x + 20$.

Conclure. La dérivée est $4(2x + 5)$, soit $8x + 20$.

Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On dérive séparément les deux termes trigonométriques.

Construire la réponse.

1. La dérivée de $2 \sin x$ est $2 \cos x$.
2. Celle de $3 \cos x$ est $-3 \sin x$.
3. On additionne les contributions.

Vérifier. En zéro, la dérivée vaut 2; le terme en cosinus initial ne contribue pas à la pente à cet instant.

Conclure. $f'(x) = 2 \cos x - 3 \sin x$.

Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On utilise la tangente de la fonction carré au voisinage de 5.

Construire la réponse.

1. $f(5) = 25$ et $f'(5) = 2 \times 5 = 10$.
2. $h = 4,98 - 5 = -0,02$.
3. La formule donne $25 + 10(-0,02) = 24,8$.

Vérifier. Le carré exact vaut $(5 - 0,02)^2 = 25 - 0,2 + 0,0004 = 24,8004$. L'erreur est 0,0004.

Conclure. $4,98^2 \approx 24,8$, par défaut.

Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La dérivée se calcule terme par terme en conservant les signes.

Construire la réponse.

1. Le terme $2x^5$ donne $2 \times 5x^4 = 10x^4$.
2. Le terme $-3x^4$ donne $-3 \times 4x^3 = -12x^3$.
3. Le terme x donne 1 et la constante -8 donne 0.
4. La somme est donc $10x^4 - 12x^3 + 1$.

Vérifier. Le terme constant a disparu et le degré maximal est passé de 5 à 4.

Conclure. La dérivée est $10x^4 - 12x^3 + 1$, définie pour tout réel x .

Corrigé 8 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On dérive un quotient défini seulement pour $x \neq 2$.

Construire la réponse.

1. $u = x + 1$, $v = x - 2$ et les deux dérivées valent 1.
2. Le numérateur est $1(x - 2) - (x + 1)1$.
3. En distribuant le signe moins, $x - 2 - x - 1 = -3$.
4. Le dénominateur est $(x - 2)^2$.

Vérifier. La réécriture $f(x) = 1 + 3/(x - 2)$ confirme une dérivée négative sur chacune des deux branches.

Conclure. $f'(x) = -3/(x - 2)^2$ pour $x \neq 2$.

Corrigé 9 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La dérivée intérieure est négative et doit être conservée.

Construire la réponse.

1. Pour $u = 1 - 4x$, on a $u' = -4$.
2. La dérivée du cube est $3u^2$.
3. On obtient $3(1 - 4x)^2(-4) = -12(1 - 4x)^2$.

Vérifier. Le carré est positif ou nul et le coefficient négatif : la dérivée est négative ou nulle, cohérente avec une fonction intérieure décroissante suivie du cube croissant.

Conclure. La dérivée vaut $-12(1 - 4x)^2$.

Corrigé 10 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Il faut tenir compte du cosinus et de son argument affine.

Construire la réponse.

1. La dérivée de $4t - 1$ est 4.
2. Dériver le cosinus extérieur donne $-5 \sin(4t - 1)$.
3. On multiplie par 4 : $u'(t) = -20 \sin(4t - 1)$.

Vérifier. Le signe moins vient du cosinus ; le facteur 4 vient de l'intérieur. L'amplitude de la dérivée est 20.

Conclure. $u'(t) = -20 \sin(4t - 1)$.

Corrigé 11

 Démonstration / Solution expliquée

Comprendre la question. Il faut comparer la valeur exacte à celle donnée par la tangente.

Construire la réponse.

1. Le développement exact est $(3 + h)^2 = 9 + 6h + h^2$.
2. La tangente donne $9 + 6h$.
3. La différence exacte moins approchée vaut donc h^2 .
4. Pour $h \neq 0$, ce carré est strictement positif.

Vérifier. La différence est positive aussi bien pour h positif que pour h négatif ; elle est nulle au point de contact.

Conclure. La tangente sous-estime toujours le carré hors du point de contact, avec une erreur h^2 .

Corrigé 12

 Démonstration / Solution expliquée

Comprendre la question. Il faut écrire la fraction comme une puissance et conserver l'interdiction de zéro.

Construire la réponse.

1. $4/x = 4x^{-1}$ pour $x \neq 0$.
2. La règle donne $4 \times (-1)x^{-2} = -4x^{-2}$.
3. Comme $x^{-2} = 1/x^2$, la dérivée est $-4/x^2$.

Vérifier. Le carré du dénominateur est positif : la dérivée est négative sur chacune des deux branches, ce qui correspond aux variations de $4/x$.

Conclure. $f'(x) = -4/x^2$ sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

Corrigé 13

 Démonstration / Solution expliquée

Comprendre la question. Deux méthodes permettent de vérifier le même calcul sur $x \neq 0$.

Construire la réponse.

1. Par quotient, $u = x^2 + 1$, $v = x$, donc $f' = (2x \cdot x - (x^2 + 1))/x^2$.
2. Le numérateur devient $2x^2 - x^2 - 1 = x^2 - 1$.
3. En séparant la fraction initiale, $f(x) = x + 1/x$. Sa dérivée est $1 - 1/x^2$.
4. En mettant cette seconde expression au même dénominateur, on retrouve $(x^2 - 1)/x^2$.

Vérifier. Les expressions coïncident pour tout x non nul ; aucune des méthodes n'autorise x égal à zéro.

Conclure. $f'(x) = (x^2 - 1)/x^2 = 1 - 1/x^2$ pour $x \neq 0$.

Corrigé 14 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La proposition de l'élève ne tient compte que de la fonction extérieure.

Construire la réponse.

1. Dériver la puissance quatrième donne bien $4(5x + 2)^3$.
2. Mais l'argument $5x + 2$ varie cinq fois plus vite que x : sa dérivée est 5.
3. Il faut multiplier par 5, donc obtenir $20(5x + 2)^3$.

Vérifier. Le terme dominant initial est $625x^4$, dont la dérivée dominante est $2500x^3$. La bonne expression a bien ce terme dominant.

Conclure. La dérivée correcte est $20(5x + 2)^3$.

Corrigé 15 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La vitesse est la dérivée de la position par rapport au temps.

Construire la réponse.

1. Le sinus devient cosinus et l'argument $3t$ apporte un facteur 3.
2. $v(t) = 2 \times 3 \cos(3t) = 6 \cos(3t)$ en m/s.
3. À $t = 0$, $\cos 0 = 1$, donc $v(0) = 6$ m/s.

Vérifier. La position initiale est $2 \sin 0 = 0$, mais une position et une vitesse décrivent deux choses différentes.

Conclure. $v(t) = 6 \cos(3t)$ et la vitesse initiale vaut 6 m/s.

9 Corrigé du problème

1. **Comprendre la question.** La fonction est un produit et son second facteur contient une composition.

Construire la réponse.

- (a) On pose $u(t) = t + 1$ et $v(t) = \sin(2t)$.
- (b) Leurs dérivées sont $u' = 1$ et $v' = 2 \cos(2t)$, le facteur 2 venant de l'argument.
- (c) La règle du produit donne $f' = u'v + uv' = \sin(2t) + 2(t + 1) \cos(2t)$.

Vérifier. Les deux facteurs contribuent à la variation. L'angle est mesuré en radians, condition des formules de dérivation utilisées.

Conclure. $f'(t) = \sin(2t) + 2(t + 1) \cos(2t)$.

2. **Comprendre la question.** La tangente utilise la valeur de la fonction et sa pente au même instant.

Construire la réponse.

- (a) $f(0) = (0 + 1) \sin 0 = 0$.
- (b) $f'(0) = \sin 0 + 2(1) \cos 0 = 2$.
- (c) La tangente est $y = f(0) + f'(0)(t - 0) = 2t$.

Vérifier. La droite passe par l'origine et possède la pente 2 trouvée.

Conclure. $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$ et la tangente a pour équation $y = 2t$.

3. **Comprendre la question.** La tangente fournit une estimation locale ; le calcul direct mesure son erreur.

Construire la réponse.

- (a) Pour $t = 0,05$, elle donne $2 \times 0,05 = 0,1$.
- (b) La valeur directe est $f(0,05) = 1,05 \sin(0,1) \approx 0,104825$.
- (c) L'écart exacte moins approchée vaut environ $0,104825 - 0,1 = 0,004825$.

Vérifier. Le calcul du sinus doit se faire en radians. L'approximation est proche et légèrement inférieure, mais n'est pas une égalité.

Conclure. La tangente prévoit 0,1, avec une sous-estimation d'environ 0,004825.

4. **Comprendre la question.** La fonction inverse composée interdit l'annulation de son dénominateur.

Construire la réponse.

- (a) Le domaine impose $t + 1 \neq 0$, donc $t \neq -1$.
- (b) La dérivée de l'inverse est moins l'inverse du carré ; la dérivée intérieure de $t + 1$ vaut 1.
- (c) On obtient $g'(t) = -1/(t + 1)^2$.

Vérifier. Le dénominateur est positif sur chacun des deux intervalles autorisés et la dérivée y est négative.

Conclure. $g'(t) = -1/(t + 1)^2$ sur $] -\infty; -1[$ et $] -1; +\infty[$.

5. **Comprendre la question.** Le produit des dérivées oublie la façon dont chaque facteur contribue au produit initial.

Construire la réponse.

- (a) La mauvaise règle donnerait $1 \times 2 \cos(2t) = 2 \cos(2t)$.
- (b) La vraie règle est $u'v + uv'$: un facteur est dérivé pendant que l'autre garde sa valeur, puis on additionne les deux contributions.
- (c) En $t = \pi/4$, la vraie dérivée vaut 1 puisque le sinus vaut 1 et le cosinus 0 ; la mauvaise formule donne 0.

Vérifier. Les deux formules coïncident accidentellement en zéro : ce seul contrôle aurait été insuffisant. Le contre-exemple les distingue.

Conclure. Il faut appliquer la somme des deux contributions, puis la règle de la chaîne pour le sinus.

10 Variante autonome et bilan

Pour $h(t) = (t + 2) \cos t$, calcule $h(0)$, $h'(0)$ et sa tangente en zéro.

À toi d'essayer : Vérifie ta démarche

Résous la variante, puis explique pourquoi ta méthode s'applique.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 24](#)

- Je peux expliquer : approcher une fonction par sa tangente.
- Je peux expliquer : dériver une puissance.
- Je peux expliquer : dériver un produit et un quotient.
- Je peux expliquer : dériver une fonction d'une expression affine.
- Je peux expliquer : dériver sinus, cosinus et signaux.

11 Fiche-mémoire

Approcher une fonction par sa tangente.

1. Choisis une abscisse a où la fonction et sa dérivée sont connues.
2. Calcule $h = x - a$ avec son signe.
3. Évalue la variation estimée $hf'(a)$.
4. Ajoute-la à $f(a)$ en utilisant un signe d'approximation.
5. Contrôle l'erreur lorsque la valeur exacte ou un encadrement est accessible.

Dériver une puissance.

1. Découpe la somme en termes avec leurs signes.
2. Pour chaque puissance, multiplie par l'exposant puis diminue-le de 1.
3. Conserve le coefficient initial et dérive les constantes en zéro.
4. Réunis les termes obtenus et simplifie.
5. Annonce le domaine, notamment lorsque zéro est interdit.

Dériver un produit et un quotient.

1. Détermine le domaine, en excluant les zéros du dénominateur.
2. Nomme u et v puis calcule leurs dérivées.
3. Applique la formule du produit ou du quotient avec des parenthèses.
4. Simplifie ensuite les expressions.
5. Si possible, contrôle en développant ou en réécrivant la fonction initiale.

Dériver une fonction d'une expression affine.

1. Identifie l'intérieur affine et la fonction extérieure.
2. Calcule la dérivée de l'intérieur, avec son signe.
3. Dérive l'extérieur en conservant son argument.
4. Multiplie les deux contributions.
5. Contrôle éventuellement par développement pour une petite puissance.

Dériver sinus, cosinus et signaux.

1. Vérifie que les angles sont en radians.
2. Conserve l'amplitude et repère la dérivée de l'argument.
3. Dérive sinus en cosinus, ou cosinus en moins sinus.
4. Multiplie par la dérivée intérieure.
5. Pour une valeur initiale, substitue ensuite $t = 0$ et précise l'unité.

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

La nouvelle entrée vaut a plus un petit écart h .

Indice 2 — Un pas de plus.

La variation estimée de sortie vaut h multiplié par la pente en a .

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Repère l'exposant 5 dans la règle des puissances.

Indice 2 — Un pas de plus.

Multiplie par l'ancien exposant puis diminue cet exposant de 1.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Les deux facteurs du produit peuvent varier.

Indice 2 — Un pas de plus.

Dérive l'un en conservant l'autre, puis fais l'inverse et additionne.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Le carré est la fonction extérieure ; $3x + 1$ est l'intérieur.

Indice 2 — Un pas de plus.

Dérive le carré en gardant son argument, puis multiplie par la dérivée intérieure 3.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve**Indice 1 — Une piste.**

Il faut conserver le signe propre à la dérivée du cosinus.

Indice 2 — Un pas de plus.

En radians, sinus se dérive en cosinus ; cosinus se dérive en moins sinus.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Vérifie ta démarche**Indice 1 — Une piste.**

Repère les données utiles et l'inconnue. Reviens à la méthode correspondante dans la boîte à outils.

Indice 2 — Un pas de plus.

Contrôle les unités, les bornes et la plausibilité du résultat avant de lire la correction.

[Revenir à la recherche, p. 21](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

$f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$. On ajoute la variation estimée à la valeur de départ. Cette formule décrit la tangente et reste une approximation locale, sauf cas particuliers comme une fonction affine.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

$(x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4$. Le coefficient 5 et le nouvel exposant 4 proviennent de deux étapes distinctes de la règle.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

$(uv)' = u'v + uv'$. Le produit des seules dérivées serait faux : pour $u = v = x$, il donnerait 1 alors que la dérivée de x^2 vaut $2x$.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

La dérivée est $2(3x + 1) \times 3 = 6(3x + 1)$. En développant d'abord la fonction en $9x^2 + 6x + 1$, on retrouve $18x + 6$, la même réponse.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

La dérivée de $\cos x$ est $-\sin x$, avec x en radians. Le signe moins est indispensable : le cosinus décroît entre 0 et π , où le sinus est positif.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Vérifie ta démarche

Comprendre la question. La variante associe une fonction affine et un cosinus.

Construire la réponse.

1. Par produit, $h'(t) = 1 \cos t + (t + 2)(-\sin t) = \cos t - (t + 2) \sin t$.
2. $h(0) = 2 \cos 0 = 2$ et $h'(0) = 1 - 2 \times 0 = 1$.
3. La tangente en zéro est $y = 2 + 1(t - 0) = 2 + t$.

Vérifier. En zéro, la droite donne bien 2 et sa pente vaut 1.

Conclure. $h(0) = 2$, $h'(0) = 1$ et la tangente est $y = 2 + t$.

[Revenir à la recherche, p. 21](#)