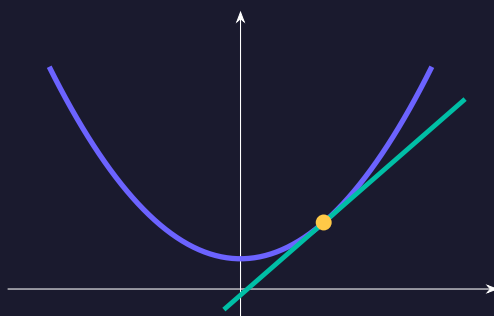


FICHE 05

Primitives et méthode d'Euler

Analyse ■ Comprendre et s'entraîner



Comprendre Calculer Vérifier

Première STI2D — spécialité maths
Année scolaire 2026–2027

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	Pourquoi ce chapitre ?	3
2	L'idée avant la formule	3
3	Le cours formel	3
3.1	Comprendre ce qu'est une primitive	3
3.2	Primitives des polynômes	4
3.3	Déterminer une primitive avec une condition initiale	5
3.4	Primitives des fonctions trigonométriques	6
3.5	Approcher une primitive par la méthode d'Euler	8
4	Boîte à outils	9
5	Exercices progressifs	11
6	Problème — Pour aller plus loin	13
7	Indices des exercices	14
8	Corrigés détaillés	16
9	Corrigé du problème	21
10	Variante autonome et bilan	22
11	Fiche-mémoire	22
12	Indices des pauses et des preuves	23
13	Explications des pauses et des preuves	25

1 Pourquoi ce chapitre ?

Une primitive transforme une vitesse en position. La condition initiale sélectionne la trajectoire et la méthode d'Euler permet de l'approcher numériquement. **Ton parcours.** Partie mathématiques de la spécialité physique-chimie et mathématiques en STI2D. Cette fiche complète les cours de mathématiques communs ; elle ne remplace pas les enseignements de physique-chimie.

- Comprendre ce qu'est une primitive.
- Primitives des polynômes.
- Déterminer une primitive avec une condition initiale.
- Primitives des fonctions trigonométriques.
- Approcher une primitive par la méthode d'Euler.

2 L'idée avant la formule

Connaître la vitesse ne dit pas d'où le mobile part. Deux mobiles de même vitesse peuvent rester décalés d'une distance constante.

3 Le cours formel

3.1 Comprendre ce qu'est une primitive

Intuition | Construire la notion pas à pas

Remonter d'une variation à une grandeur. Dériver une position donne une vitesse. Chercher une primitive fait le chemin inverse : on connaît la vitesse et on cherche une fonction qui pourrait être la position. Mathématiquement, F est une primitive de f sur un intervalle si $F'(x) = f(x)$ en chaque point de cet intervalle.

Pourquoi une constante apparaît. Deux mobiles peuvent avoir la même vitesse tout en partant de positions différentes. De même, ajouter une constante à F ne change pas sa dérivée. Si F_0 est une primitive, toutes les primitives sur cet intervalle sont $F_0 + C$, où C est un réel.

Distinguer « une » et « toutes ». Pour donner une primitive, on peut choisir une constante particulière, souvent zéro. Pour donner toutes les primitives, il faut conserver C . Une condition sur une valeur de F permettra ensuite de déterminer cette constante.

Vérifier plutôt que deviner. Une formule proposée se contrôle en la dérivant. Le résultat doit être exactement f , coefficients et signes compris. Comparer les valeurs de F et de f en un point n'est pas un test de primitive : c'est leur relation de dérivation qu'il faut établir.

Définition | Comprendre la notion

Une primitive de f sur un intervalle I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$. Tu remontes d'une vitesse à une position, ou d'un débit à une quantité. Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante. Si F est une primitive, toutes les primitives sont $F + C$, où C est un réel quelconque. La dérivée de C est nulle : une vitesse ne renseigne pas à elle seule sur la position de départ. Trouver une primitive et dériver sont deux opérations différentes. Pour vérifier une proposition, dérive-la et compare terme à terme à la fonction demandée. Le domaine et l'intervalle doivent rester précisés.

💡 Exemple | Exemple commenté

Pour $f(x) = 2x$, la fonction $F(x) = x^2$ convient car $F'(x) = 2x$. La fonction $G(x) = x^2 + 7$ convient aussi : sa dérivée est également $2x$.

En revanche, $H(x) = 2x^2$ a pour dérivée $4x$. Elle ne convient donc pas, même si son expression ressemble à celle de la fonction de départ.

La famille complète est $x^2 + C$. Chaque choix de C translate la courbe verticalement sans modifier ses pentes. Une information comme $F(0) = 7$ sélectionnerait le choix $C = 7$.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Chercher une primitive n'est pas appliquer une deuxième fois les règles de dérivation. Le contrôle consiste au contraire à dériver la réponse pour retrouver la fonction initiale.

À toi d'essayer : Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

F est une primitive de f lorsque...

1. $f' = F$
2. $F' = f$
3. $F = f$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 23 [Explication](#), p. 25

3.2 Primitives des polynômes

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Inverser la règle des puissances. Dériver x^{n+1} produit $(n+1)x^n$. Pour obtenir seulement x^n , on divise donc par $n+1$. Une primitive est $x^{n+1}/(n+1)$: l'exposant augmente de 1 et le coefficient est divisé par le nouvel exposant.

Conserver les coefficients. Une primitive de ax^n est $ax^{n+1}/(n+1)$. Le coefficient a ne disparaît pas. Pour un polynôme, on procède terme par terme en gardant les signes.

Traiter les constantes correctement. Une constante c est une fonction de degré zéro ; sa primitive est cx , puisque la dérivée de cx vaut c . Elle ne disparaît donc pas lorsqu'on cherche une primitive. La constante arbitraire C ajoutée à la fin joue un autre rôle.

Limiter la formule à ses conditions. Pour les polynômes, les exposants sont des entiers positifs ou nuls et aucun problème ne se pose. Avec l'exposant -1 , le dénominateur deviendrait zéro : cette règle ne traite pas $1/x$.

Une seule constante finale suffit, car la somme de plusieurs constantes arbitraires est encore une constante arbitraire.

📖 Définition | Comprendre la notion

Pour un entier $n \geq 0$, une primitive de x^n est $x^{n+1}/(n+1)$. On augmente l'exposant de 1 puis on divise par ce nouvel exposant. La formule se contrôle en dérivant. La prise de primitive respecte les sommes et les coefficients constants. Une primitive de $ax^2 + bx + c$ est $ax^3/3 + bx^2/2 + cx$.

Ajoute une unique constante C à la fin pour obtenir toutes les primitives. La formule de puissance ne s'applique pas à x^{-1} : le dénominateur deviendrait nul. Ce cas sera traité avec le logarithme népérien en terminale STI2D. Ne confonds pas le nombre constant c avec une constante de primitive C .

Exemple | Exemple commenté

Pour $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$, une primitive de $6x^2$ est $6x^3/3 = 2x^3$. Celle de $-4x$ est $-4x^2/2 = -2x^2$, et celle de 3 est $3x$.

On obtient $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x$. Le contrôle donne $F'(x) = 6x^2 - 4x + 3$, exactement la fonction demandée.

Si toutes les primitives sont demandées, on ajoute $+C$. Le coefficient 3 du terme constant initial devient le coefficient de x ; il ne faut pas le confondre avec cette constante libre C .

Attention | Comprendre une erreur fréquente

On divise par le nouvel exposant, pas par l'ancien. Une primitive de x^2 est $x^3/3$, pas $x^3/2$.

À toi d'essayer : Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Une primitive de x^2 est...

1. $x^3/3$
2. $2x$
3. x^3

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.3 Déterminer une primitive avec une condition initiale

Intuition | Construire la notion pas à pas

La dérivée ne fixe pas la position de départ. La famille des primitives contient une constante libre. Une valeur imposée, comme $F(a) = b$, permet de choisir une seule fonction dans cette famille sur l'intervalle étudié.

Déterminer la constante. Écris d'abord $F(x) = F_0(x) + C$, puis remplace x par a : $F_0(a) + C = b$. Il reste une équation simple, $C = b - F_0(a)$. La constante n'est égale à b que lorsque $F_0(a) = 0$.

Vérifier deux conditions. La fonction finale doit avoir la dérivée demandée et prendre la valeur imposée au point choisi. Ces contrôles sont indépendants : une primitive correcte avec la mauvaise constante échoue à la seconde condition.

Deux remontées demandent deux informations. À partir d'une accélération, une première primitive donne la vitesse et une seconde donne la position. Chaque étape introduit sa propre constante. La vitesse initiale fixe la première et la position initiale fixe la seconde; elles ne s'interchangent pas.

Définition | Comprendre la notion

Une condition comme $F(a) = b$ permet de choisir une seule fonction dans la famille $F_0 + C$. Remplace x par a , écris $F_0(a) + C = b$, puis calcule $C = b - F_0(a)$. En mécanique, la vitesse donne la dérivée de la position. La position initiale fixe donc la constante. Si l'on connaît l'accélération, on cherche d'abord la vitesse puis la position, en utilisant une condition adaptée à chaque étape. Vérifie deux choses séparément : la dérivée demandée et la valeur initiale. Une formule peut satisfaire l'une et échouer à l'autre. Précise aussi les unités : intégrer une vitesse en mètres par seconde sur un temps en secondes donne une position en mètres.

Exemple | Exemple commenté

On connaît $F'(t) = 2t + 3$ et $F(0) = 5$. Une primitive est $t^2 + 3t$, donc la famille complète est $t^2 + 3t + C$.

En zéro, elle vaut $0 + 0 + C = C$. La condition impose donc $C = 5$, et $F(t) = t^2 + 3t + 5$. Sa dérivée est bien $2t + 3$, et sa valeur initiale est 5.

Si la condition avait été $F(2) = 5$, on aurait écrit $4 + 6 + C = 5$, d'où $C = -5$. Le nombre imposé n'est donc pas automatiquement la constante : il faut effectuer la substitution.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Lors de deux prises de primitive successives, utilise deux constantes différentes. Chacune est déterminée par une condition portant sur la grandeur correspondante.

À toi d'essayer : Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

$F(x) = x^2 + C$ et $F(1) = 4$ donnent...

1. $C = 4$
2. $C = 5$
3. $C = 3$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.4 Primitives des fonctions trigonométriques

Intuition | Construire la notion pas à pas

Remonter les formules de dérivation. Puisque la dérivée de sinus est cosinus, une primitive de $\cos x$ est $\sin x$. Puisque la dérivée de cosinus est moins sinus, une primitive de $\sin x$ est $-\cos x$. Le signe moins est une compensation indispensable.

Compenser aussi l'argument intérieur. Dériver $\sin(ax + b)$ produit $a \cos(ax + b)$. Pour obtenir seulement le cosinus, on divise donc par a . Cette méthode suppose $a \neq 0$. De même, une primitive de $\sin(ax + b)$ est $-\cos(ax + b)/a$.

Conserver les amplitudes. Un coefficient placé devant la fonction reste multiplicatif. On peut regrouper ce coefficient avec le facteur $1/a$, puis vérifier par dérivation que l'amplitude initiale est retrouvée.

Traiter une condition initiale. Une constante C complète la famille des primitives. Sa valeur se détermine en évaluant le sinus ou le cosinus au temps demandé. Un sinus ne vaut pas toujours zéro à l'origine si son argument contient un décalage de phase.

Les angles sont exprimés en radians. Si $a = 0$, la fonction est constante : on utilise une primitive affine, sans diviser par zéro.

Définition | Comprendre la notion

En radians, une primitive de $\cos x$ est $\sin x$, et une primitive de $\sin x$ est $-\cos x$. Le signe moins compense la dérivée du cosinus. Pour $a \neq 0$, une primitive de $\cos(ax + b)$ est $\sin(ax + b)/a$; une primitive de $\sin(ax + b)$ est $-\cos(ax + b)/a$. Le facteur $1/a$ compense celui produit par la dérivation de l'expression intérieure. Si $a = 0$, la fonction est constante et se traite comme telle. Les amplitudes multiplicatives restent devant. Ces primitives relient des grandeurs périodiques, par exemple une vitesse sinusoïdale et le déplacement associé.

Exemple | Exemple commenté

Pour $6 \cos(3t)$, une primitive doit contenir $\sin(3t)$. La dérivation produira un facteur 3 : on choisit donc un coefficient $6/3 = 2$, d'où $F(t) = 2 \sin(3t)$.

Pour $4 \sin(2t)$, on choisit un cosinus avec un signe moins et un coefficient $4/2 = 2$: $G(t) = -2 \cos(2t)$. Le contrôle donne $G'(t) = -2[-2 \sin(2t)] = 4 \sin(2t)$.

Dans chaque cas, le facteur intérieur est compensé par une division lors de la recherche de primitive, alors qu'il serait multiplié lors d'une dérivation.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Une primitive de $\sin x$ est $-\cos x$, pas $\cos x$. Vérifier par dérivation permet de retrouver le signe sans hésitation.

À toi d'essayer : Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Une primitive de $\sin x$ est. . .

1. $-\sin x$
2. $-\cos x$
3. $\cos x$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.5 Approcher une primitive par la méthode d'Euler

Intuition | Construire la notion pas à pas

Construire une courbe à partir de ses pentes. On connaît $F' = f$ et un point de départ $F(a) = b$, mais pas forcément une expression simple de F . La méthode d'Euler remplace la courbe par une succession de petits segments de tangente.

Effectuer un pas. À l'abscisse x_n , la pente connue est $f(x_n)$. Avancer horizontalement de h produit une variation verticale approchée $hf(x_n)$. On calcule donc $y_{n+1} = y_n + hf(x_n)$, puis $x_{n+1} = x_n + h$.

Utiliser les anciennes valeurs. La pente doit être évaluée au début du segment. Dans un tableur ou un programme, calcule la nouvelle ordonnée avec l'ancien x avant d'avancer x . Changer cet ordre produirait une autre méthode.

Mesurer la qualité. Les valeurs y sont approchées. Pour comparer deux pas, il faut atteindre la même abscisse finale avec chacun. Si la primitive exacte est connue, on calcule les deux écarts. Diminuer le pas améliore souvent l'approximation sur un problème régulier, au prix d'un plus grand nombre de calculs.

Définition | Comprendre la notion

Si $F' = f$ et $F(a) = b$, l'approximation affine donne $F(x+h) \approx F(x) + hf(x)$ pour un petit pas h . On construit donc $x_{n+1} = x_n + h$ et $y_{n+1} = y_n + hf(x_n)$, à partir de (a, b) . Chaque segment utilise la pente au point de départ. Les valeurs y_n approchent F sans être en général exactes. Un pas plus petit améliore souvent le résultat, mais demande davantage de calculs. Un tableur ou une boucle Python automatise les colonnes x , $f(x)$ et y . Calcule la nouvelle ordonnée avec l'ancien x , puis avance x . Compare deux pas et, si une primitive exacte est connue, mesure l'écart au même point final.

Exemple | Exemple commenté

Pour $F'(x) = 2x$ et $F(0) = 1$, prenons $h = 0,5$. Le point de départ est $(0; 1)$.

Au premier pas, la pente vaut $2 \times 0 = 0$, donc $y_1 = 1 + 0,5 \times 0 = 1$ à $x_1 = 0,5$. Au second, la pente vaut $2 \times 0,5 = 1$, donc $y_2 = 1 + 0,5 \times 1 = 1,5$ à $x_2 = 1$.

La primitive exacte satisfaisant la condition est $F(x) = x^2 + 1$, donc $F(1) = 2$. Euler sous-estime ici de 0,5. Cela vient du choix des pentes au début des intervalles alors que la pente augmente entre leurs deux extrémités.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Évaluer la pente après avoir avancé x ne correspond plus à Euler explicite au point de départ. Écris les anciennes et nouvelles valeurs dans des colonnes distinctes pour éviter cette confusion.

À toi d'essayer : Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

La mise à jour d'Euler pour une primitive est...

1. $y_{n+1} = y_n + h$
2. $y_{n+1} = f(y_n)$
3. $y_{n+1} = y_n + hf(x_n)$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 25](#)

4 Boîte à outils

✂ Méthode | Comprendre ce qu'est une primitive

1. Identifie la fonction f dont tu cherches une primitive.
2. Propose une fonction F à partir des règles connues.
3. Dérive F pour contrôler exactement le résultat.
4. Ajoute C si toutes les primitives sont demandées.
5. Précise l'intervalle de validité et toute condition supplémentaire.

✂ Méthode | Primitives des polynômes

1. Pour chaque terme, augmente l'exposant de 1.
2. Divise son coefficient par ce nouvel exposant.
3. Une constante initiale devient un terme en x .
4. Réunis les termes et ajoute une seule constante si nécessaire.
5. Dérive la réponse pour vérifier tous les coefficients.

✂ Méthode | Déterminer une primitive avec une condition initiale

1. Cherche la famille des primitives avec une constante C .
2. Remplace la variable par l'abscisse de la condition.
3. Résous l'équation obtenue pour C .
4. Réécris la fonction avec cette constante.
5. Vérifie séparément la dérivée et la valeur imposée.

 Méthode | Primitives des fonctions trigonométriques

1. Identifie sinus ou cosinus et la pente a de l'argument.
2. Choisis sinus pour primitiver cosinus, ou moins cosinus pour primitiver sinus.
3. Divise par a si a est non nul et conserve l'amplitude.
4. Ajoute C pour la famille, puis applique une éventuelle condition.
5. Dérive pour contrôler le signe et les coefficients.

 Méthode | Approcher une primitive par la méthode d'Euler

1. Initialise x et y avec le point donné.
2. Calcule la pente $f(x)$ au début du pas.
3. Calcule la nouvelle ordonnée $y + hf(x)$ puis avance x de h .
4. Répète jusqu'à l'abscisse finale prévue.
5. Compare au même point avec un autre pas ou une primitive exacte.

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases ; 6 à 10 demandent plusieurs étapes ; 11 à 15 t'invitent à choisir, justifier et contrôler. Cherche avant de consulter les indices.

Exercice 1 — Reconnaître une primitive ★★☆☆

$F(x) = x^3 + 5$ est-elle une primitive de $f(x) = 3x^2$?

Exercice 2 — Un monôme ★★☆☆

Trouve une primitive de $5x^4$.

Exercice 3 — Condition en zéro ★★☆☆

$F'(x) = 4x$ et $F(0) = 7$. Détermine F .

Exercice 4 — Un cosinus simple ★★☆☆

Donne toutes les primitives de $2 \cos x$.

Exercice 5 — Un premier pas ★★☆☆

$F'(x) = 3x + 2$, $F(0) = 4$. Fais un pas d'Euler de longueur 0,1.

Exercice 6 — Toutes les primitives ★★★☆☆

Donne toutes les primitives de la fonction constante $f(x) = 4$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 — Une somme ★★★☆☆

Donne toutes les primitives de $3x^2 + 2x - 4$.

Exercice 8 — Condition ailleurs ★★★☆☆

$G'(x) = 3x^2$ et $G(2) = 10$. Détermine G .

Exercice 9 — Une pulsation ★★★☆☆

Trouve une primitive de $3 \sin(6t)$.

Exercice 10 — Deux étapes ★★★☆☆

$F'(x) = x$, $F(0) = 0$, $h = 0,5$. Calcule les deux premières ordonnées.

Exercice 11 — Déceler une erreur ★★★☆☆

Un élève propose $F(x) = x^3$ comme primitive de x^2 . Corrige sa proposition.

Exercice 12 — Développer avant de chercher ★★★☆☆

Trouve une primitive de $(x + 1)^2$.

Exercice 13 — De l'accélération à la position ★★★☆☆

Un mobile vérifie $a(t) = 2$, $v(0) = 3$ et $s(0) = 5$. Détermine v et s , puis $s(2)$.

Exercice 14 — Une position périodique ★★ ★

$s'(t) = 4 \cos(2t)$ et $s(0) = 1$. Détermine s et $s(\pi/4)$.

Exercice 15 — Comparer deux pas ★★ ★

Pour $F'(x) = x$, $F(0) = 0$, compare l'approximation en 1 avec les pas 0,5 et 0,25.

6 Problème — Pour aller plus loin

Retrouver le mouvement à partir de la vitesse

Un mobile a pour vitesse $v(t) = 3t^2 + 2$ m/s et pour position initiale $s(0) = 5$ m, sur $0 \leq t \leq 2$.

1. Détermine la famille des primitives de v .
2. Utilise la position initiale puis calcule $s(2)$.
3. Vérifie dérivée et condition initiale.
4. Approche $s(1)$ par Euler avec $h = 0,5$ et compare à la valeur exacte.
5. Pour une autre vitesse $4\cos(2t)$, donne une position avec $s(0) = 1$.

7 Indices des exercices

Exercice 1

Indice 1. Dérive F.

Indice 2. La dérivée de 5 est nulle.

Exercice 2

Indice 1. Augmente l'exposant de 1.

Indice 2. Divise par le nouvel exposant.

Exercice 3

Indice 1. La primitive de $4x$ est $2x^2$.

Indice 2. Évalue ensuite en zéro.

Exercice 4

Indice 1. La primitive du cosinus est un sinus.

Indice 2. Ajoute la constante de famille.

Exercice 5

Indice 1. Prends la pente en zéro.

Indice 2. Multiplie-la par le pas.

Exercice 6

Indice 1. Quelle fonction a pour pente constante 4 ?

Indice 2. Une constante ajoutée disparaît à la dérivation.

Exercice 7

Indice 1. Le terme constant donne un terme de degré 1.

Indice 2. N'oublie pas C pour la famille complète.

Exercice 8

Indice 1. La constante n'est pas forcément 10.

Indice 2. Remplace x par 2 avant de l'isoler.

Exercice 9

Indice 1. Le coefficient intérieur est 6.

Indice 2. Contrôle les deux signes moins.

Exercice 10

Indice 1. La pente change entre les étapes.

Indice 2. La seconde pente vaut 0,5.

Exercice 11

Indice 1. Dérive d'abord la proposition.

Indice 2. Compense le coefficient produit par la dérivation.

Exercice 12

Indice 1. Développe le carré.

Indice 2. Une primitive n'est pas unique.

Exercice 13

Indice 1. Procède en deux étapes.

Indice 2. Une condition fixe chaque constante.

Exercice 14

Indice 1. Intègre puis applique la condition.

Indice 2. À $t = \pi/4$, l'angle vaut $\pi/2$.

Exercice 15

Indice 1. Additionne les petits accroissements.

Indice 2. Compare au même point $x = 1$.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On doit vérifier que la dérivée de F égale la fonction f .

Construire la réponse.

1. La dérivée de x^3 est $3x^2$.
2. Celle de la constante 5 est zéro.
3. Ainsi $F'(x) = 3x^2 = f(x)$ pour tout réel x .

Vérifier. La constante modifie les valeurs de F mais ne change pas sa dérivée.

Conclure. Oui, F est une primitive de f sur les réels.

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On applique la règle à une puissance de degré 4.

Construire la réponse.

1. L'exposant passe de 4 à 5.
2. Le coefficient 5 est divisé par le nouvel exposant 5.
3. On obtient $5x^5/5 = x^5$.

Vérifier. La dérivée de x^5 est bien $5x^4$.

Conclure. Une primitive est $F(x) = x^5$.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La valeur en zéro choisit une primitive parmi celles de $4x$.

Construire la réponse.

1. La famille est $F(x) = 2x^2 + C$.
2. En zéro, $F(0) = C$. La condition impose $C = 7$.

Vérifier. La dérivée de $2x^2 + 7$ est $4x$ et sa valeur en zéro est 7.

Conclure. $F(x) = 2x^2 + 7$.

Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le coefficient 2 se conserve et le cosinus a pour primitive le sinus.

Construire la réponse.

1. Une primitive de $\cos x$ est $\sin x$.
2. Une primitive de $2 \cos x$ est donc $2 \sin x$.
3. La famille complète s'obtient en ajoutant une constante réelle C .

Vérifier. $(2 \sin x + C)' = 2 \cos x$.

Conclure. Toutes les primitives sont $2 \sin x + C$.

Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Un seul pas utilise la pente au point initial, pas au point d'arrivée.

Construire la réponse.

1. Au départ, $x_0 = 0$ et $y_0 = 4$.
2. La pente vaut $f(0) = 3 \times 0 + 2 = 2$.
3. $y_1 = 4 + 0,1 \times 2 = 4,2$ et $x_1 = 0,1$.

Vérifier. La primitive exacte est $F(x) = 1,5x^2 + 2x + 4$, donc $F(0,1) = 4,215$. Le résultat d'Euler est bien une approximation.

Conclure. Le point obtenu est $(0,1; 4,2)$.

Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On cherche toutes les fonctions dont la pente est constamment égale à 4.

Construire la réponse.

1. La fonction $4x$ a pour dérivée 4.
2. Ajouter une constante C conserve cette dérivée.
3. Sur l'intervalle des réels, toutes les primitives diffèrent d'une constante.

Vérifier. $(4x + C)' = 4 + 0 = 4$ pour toute constante réelle C .

Conclure. Toutes les primitives sont $F(x) = 4x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les trois termes se traitent séparément, puis une constante complète la famille.

Construire la réponse.

1. Une primitive de $3x^2$ est $3x^3/3 = x^3$.
2. Une primitive de $2x$ est $2x^2/2 = x^2$.
3. Une primitive de -4 est $-4x$.
4. On ajoute C : $F(x) = x^3 + x^2 - 4x + C$.

Vérifier. La dérivée vaut $3x^2 + 2x - 4 + 0$, conforme à l'énoncé.

Conclure. Toutes les primitives sont $x^3 + x^2 - 4x + C$.

Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La condition est donnée en 2 : il faut y calculer toute l'expression.

Construire la réponse.

1. Les primitives de $3x^2$ sont $G(x) = x^3 + C$.
2. $G(2) = 8 + C = 10$.
3. On soustrait 8 : $C = 2$.

Vérifier. La dérivée de $x^3 + 2$ est $3x^2$ et $G(2) = 8 + 2 = 10$.

Conclure. $G(x) = x^3 + 2$.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La pulsation 6 doit être compensée en plus du signe de la dérivée du cosinus.

Construire la réponse.

1. On part d'une expression $A \cos(6t)$. Sa dérivée est $-6A \sin(6t)$.
2. On veut $-6A = 3$, donc $A = -1/2$.
3. On choisit $F(t) = -\frac{1}{2} \cos(6t)$.

Vérifier. $F'(t) = (-1/2)(-6) \sin(6t) = 3 \sin(6t)$.

Conclure. Une primitive est $-\frac{1}{2} \cos(6t)$.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Chaque nouveau segment prend la pente à son propre point de départ.

Construire la réponse.

1. Au départ, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Le premier pas donne $y_1 = 0 + 0,5 \times 0 = 0$.
2. On est alors en $x_1 = 0,5$. La nouvelle pente vaut 0,5.
3. Le second pas donne $y_2 = 0 + 0,5 \times 0,5 = 0,25$, à $x_2 = 1$.

Vérifier. La primitive exacte est $x^2/2$, dont la valeur en 1 est 0,5. Les ordonnées calculées ne sont donc pas des valeurs exactes de F.

Conclure. Les deux premières ordonnées sont $y_1 = 0$ et $y_2 = 0,25$.

Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La proposition se teste en la dérivant.

Construire la réponse.

1. La dérivée de x^3 vaut $3x^2$, trois fois la fonction cherchée.
2. On compense en divisant la proposition par 3 : $x^3/3$.
3. Pour toutes les primitives, on ajoute une constante C.

Vérifier. $(x^3/3 + C)' = (1/3) \times 3x^2 = x^2$.

Conclure. La famille correcte est $F(x) = x^3/3 + C$.

Corrigé 12

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le développement permet d'utiliser directement les primitives polynomiales.

Construire la réponse.

1. $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.
2. Une primitive de chaque terme donne $x^3/3 + x^2 + x$.
3. On peut aussi proposer $(x + 1)^3/3$, dont la dérivée vaut $(x + 1)^2$.

Vérifier. La seconde expression se développe en $x^3/3 + x^2 + x + 1/3$: les deux réponses diffèrent seulement d'une constante.

Conclure. Une primitive est $F(x) = x^3/3 + x^2 + x$.

Corrigé 13

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On remonte successivement de l'accélération à la vitesse, puis à la position.

Construire la réponse.

1. Une primitive de 2 est $v(t) = 2t + C_1$. La condition $v(0) = 3$ donne $C_1 = 3$.
2. On cherche alors une primitive de $2t + 3$: $s(t) = t^2 + 3t + C_2$.
3. La condition $s(0) = 5$ donne $C_2 = 5$.
4. $s(2) = 2^2 + 3 \times 2 + 5 = 15$.

Vérifier. On a bien $s' = v$, $v' = 2$, $v(0) = 3$ et $s(0) = 5$. Les quatre données sont satisfaites.

Conclure. $v(t) = 2t + 3$, $s(t) = t^2 + 3t + 5$ et $s(2) = 15$, dans les unités du modèle.

Corrigé 14

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Il faut déterminer la primitive puis sa constante à partir de la valeur initiale.

Construire la réponse.

1. La famille est $s(t) = 2 \sin(2t) + C$, car $4/2 = 2$.
2. En zéro, $\sin 0 = 0$, donc $s(0) = C = 1$.
3. $s(\pi/4) = 2 \sin(\pi/2) + 1 = 2 + 1 = 3$.

Vérifier. La dérivée de $2 \sin(2t) + 1$ est $4 \cos(2t)$ et sa valeur en zéro est bien 1.

Conclure. $s(t) = 2 \sin(2t) + 1$ et $s(\pi/4) = 3$.

Corrigé 15 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On compare les deux méthodes à la même abscisse finale 1.

Construire la réponse.

1. Avec $h = 0,5$, les pentes de départ sont 0 et 0,5, d'où $y_2 = 0,25$.
2. Avec $h = 0,25$, les pentes sont 0, 0,25, 0,5 et 0,75.
3. La somme des accroissements vaut $0,25(0 + 0,25 + 0,5 + 0,75) = 0,375$.
4. La valeur exacte est $F(1) = 1/2$. Les erreurs absolues sont $0,5 - 0,25 = 0,25$ et $0,5 - 0,375 = 0,125$.

Vérifier. Le second pas est deux fois plus petit et l'erreur est ici divisée par deux. Les deux estimations restent inférieures à la valeur exacte.

Conclure. Le pas 0,25 donne la meilleure approximation : 0,375 au lieu de 0,25.

9 Corrigé du problème

1. **Comprendre la question.** La position est une primitive de la vitesse.

Construire la réponse.

- (a) Une primitive de $3t^2$ est t^3 , car sa dérivée est $3t^2$.
- (b) Une primitive de la constante 2 est $2t$.
- (c) La famille des positions est donc $s(t) = t^3 + 2t + C$ sur l'intervalle étudié.

Vérifier. La constante C représente une position de départ encore indéterminée ; elle ne change pas la vitesse.

Conclure. Les primitives sont $t^3 + 2t + C$.

2. **Comprendre la question.** La position initiale fixe la constante puis permet d'évaluer la position finale.

Construire la réponse.

- (a) En zéro, $s(0) = C$. La condition impose $C = 5$.
- (b) On obtient $s(t) = t^3 + 2t + 5$.
- (c) $s(2) = 8 + 4 + 5 = 17$ mètres. Le déplacement depuis le départ vaut $17 - 5 = 12$ mètres.

Vérifier. La vitesse est positive sur $[0; 2]$: la position finale doit dépasser la position initiale, ce qui est bien le cas.

Conclure. La position finale est 17 m ; le déplacement depuis le départ est 12 m.

3. **Comprendre la question.** Les deux conditions doivent être vérifiées indépendamment.

Construire la réponse.

- (a) La dérivée de $t^3 + 2t + 5$ vaut $3t^2 + 2 + 0$, exactement la vitesse donnée.
- (b) La valeur en zéro est $0 + 0 + 5 = 5$ mètres.

Vérifier. Une autre constante aurait gardé la bonne vitesse mais changé la position initiale : le second contrôle est donc nécessaire.

Conclure. La formule satisfait à la fois la vitesse et la position de départ.

4. **Comprendre la question.** Euler utilise la vitesse au début de chacun des deux pas de longueur 0,5.

Construire la réponse.

- (a) Au départ, $t_0 = 0$, $y_0 = 5$ et la pente vaut $v(0) = 2$.
- (b) Le premier pas donne $y_1 = 5 + 0,5 \times 2 = 6$ à $t_1 = 0,5$.
- (c) La nouvelle pente vaut $v(0,5) = 3 \times 0,25 + 2 = 2,75$.
- (d) Le second pas donne $y_2 = 6 + 0,5 \times 2,75 = 7,375$ à $t_2 = 1$. La position exacte vaut $s(1) = 1 + 2 + 5 = 8$.

Vérifier. L'erreur vaut $8 - 7,375 = 0,625$ m. La vitesse croissante explique la sous-estimation par les pentes prises au début des pas.

Conclure. Euler donne 7,375 m en 1 s, soit une sous-estimation de 0,625 m.

5. **Comprendre la question.** La primitive trigonométrique doit compenser la pulsation 2.

Construire la réponse.

- (a) La dérivée de $\sin(2t)$ vaut $2\cos(2t)$. Pour obtenir $4\cos(2t)$, on choisit $2\sin(2t)$.
- (b) La famille est $s(t) = 2\sin(2t) + C$.
- (c) En zéro, le sinus est nul et la condition impose $C = 1$.

Vérifier. La dérivée de $2\sin(2t) + 1$ est $4\cos(2t)$ et sa valeur en zéro vaut 1.

Conclure. La position cherchée est $s(t) = 2\sin(2t) + 1$.

10 Variante autonome et bilan

Pour $v(t) = 2t + 1$ et $s(0) = 3$, donne $s(2)$ et une approximation d'Euler avec deux pas de longueur 1.

À toi d'essayer : Vérifie ta démarche

Résous la variante, puis explique pourquoi ta méthode s'applique.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 25](#)

- Je peux expliquer : comprendre ce qu'est une primitive.
- Je peux expliquer : primitives des polynômes.
- Je peux expliquer : déterminer une primitive avec une condition initiale.
- Je peux expliquer : primitives des fonctions trigonométriques.
- Je peux expliquer : approcher une primitive par la méthode d'euler.

11 Fiche-mémoire

Comprendre ce qu'est une primitive.

1. Identifie la fonction f dont tu cherches une primitive.
2. Propose une fonction F à partir des règles connues.
3. Dérive F pour contrôler exactement le résultat.
4. Ajoute C si toutes les primitives sont demandées.
5. Précise l'intervalle de validité et toute condition supplémentaire.

Primitives des polynômes.

1. Pour chaque terme, augmente l'exposant de 1.
2. Divise son coefficient par ce nouvel exposant.
3. Une constante initiale devient un terme en x .
4. Réunis les termes et ajoute une seule constante si nécessaire.
5. Dérive la réponse pour vérifier tous les coefficients.

Déterminer une primitive avec une condition initiale.

1. Cherche la famille des primitives avec une constante C .
2. Remplace la variable par l'abscisse de la condition.
3. Résous l'équation obtenue pour C .
4. Réécris la fonction avec cette constante.
5. Vérifie séparément la dérivée et la valeur imposée.

Primitives des fonctions trigonométriques.

1. Identifie sinus ou cosinus et la pente a de l'argument.
2. Choisis sinus pour primitiver cosinus, ou moins cosinus pour primitiver sinus.
3. Divise par a si a est non nul et conserve l'amplitude.
4. Ajoute C pour la famille, puis applique une éventuelle condition.
5. Dérive pour contrôler le signe et les coefficients.

Approcher une primitive par la méthode d'Euler.

1. Initialise x et y avec le point donné.
2. Calcule la pente $f(x)$ au début du pas.
3. Calcule la nouvelle ordonnée $y + hf(x)$ puis avance x de h .
4. Répète jusqu'à l'abscisse finale prévue.
5. Compare au même point avec un autre pas ou une primitive exacte.

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Une primitive remonte l'opération de dérivation.

Indice 2 — Un pas de plus.

Pour vérifier une candidate F , dérive F et compare le résultat à f .

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Augmente l'exposant 2 d'une unité.

Indice 2 — Un pas de plus.

Divise ensuite par le nouvel exposant pour compenser la future dérivation.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Remplace x par 1 dans la formule de F .

Indice 2 — Un pas de plus.

La condition devient $1^2 + C = 4$.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

La dérivée du cosinus est moins sinus.

Indice 2 — Un pas de plus.

Quel signe devant le cosinus compense ce signe moins ?

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve**Indice 1 — Une piste.**

La pente est connue au point de départ x_n .

Indice 2 — Un pas de plus.

Le déplacement vertical approché vaut le pas h multiplié par cette pente.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche**Indice 1 — Une piste.**

Repère les données utiles et l'inconnue. Reviens à la méthode correspondante dans la boîte à outils.

Indice 2 — Un pas de plus.

Contrôle les unités, les bornes et la plausibilité du résultat avant de lire la correction.

[Revenir à la recherche, p. 22](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

F est une primitive de f sur un intervalle si $F' = f$ sur cet intervalle. Il ne s'agit ni d'une égalité $F = f$, ni de la relation inverse $f' = F$.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Une primitive est $x^3/3$, car $(x^3/3)' = 3x^2/3 = x^2$. Toutes les primitives sur les réels s'obtiennent en ajoutant une constante.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

On obtient $1 + C = 4$, donc $C = 3$. La fonction $F(x) = x^2 + 3$ prend bien la valeur 4 en 1 ; choisir C égal à 4 donnerait à tort 5.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Une primitive de $\sin x$ est $-\cos x$. En dérivant, $(-\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x$. Le contrôle explique les deux signes moins qui se compensent.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

La mise à jour est $y_{n+1} = y_n + hf(x_n)$. On ajoute à l'ancienne ordonnée la variation estimée sur le pas. La pente est calculée avant d'avancer x .

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche

Comprendre la question. On calcule d'abord la position exacte, puis deux pas d'Euler au même temps final.

Construire la réponse.

1. Les primitives de $2t + 1$ sont $t^2 + t + C$. La condition initiale donne $C = 3$.
2. La position exacte en 2 est $s(2) = 4 + 2 + 3 = 9$.
3. Avec $h = 1$, la première pente vaut $v(0) = 1$: $y_1 = 3 + 1 \times 1 = 4$.
4. La pente suivante vaut $v(1) = 3$: $y_2 = 4 + 1 \times 3 = 7$.

Vérifier. Les deux calculs atteignent t égal à 2. L'erreur est $9 - 7 = 2$, avec une sous-estimation cohérente avec une vitesse croissante.

Conclure. La position exacte est 9 ; Euler avec deux pas de longueur 1 donne 7.

[Revenir à la recherche, p. 22](#)