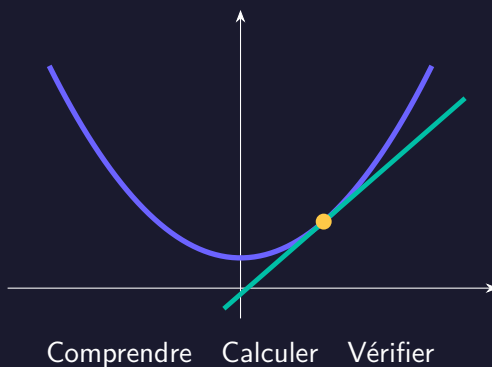


Dérivation, tangentes et optimisation

Analyse ■ Comprendre et s'entraîner



Première STMG et STI2D — commun
Année scolaire 2026–2027

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	Pourquoi ce chapitre ?	3
2	L'idée avant la formule	3
3	Le cours formel	3
3.1	Du taux de variation au nombre dérivé	3
3.2	Écrire l'équation d'une tangente	4
3.3	Dériver les polynômes de degré au plus trois	6
3.4	Du signe de la dérivée aux variations	7
3.5	Optimiser une grandeur avec la dérivée	8
4	Boîte à outils	9
5	Exercices progressifs	11
6	Problème — Pour aller plus loin	13
7	Indices des exercices	14
8	Corrigés détaillés	16
9	Corrigé du problème	21
10	Variante autonome et bilan	22
11	Fiche-mémoire	22
12	Indices des pauses et des preuves	23
13	Explications des pauses et des preuves	25

1 Pourquoi ce chapitre ?

Un résultat quadratique peut augmenter puis diminuer. Tu vas distinguer ses seuils, son signe et sa meilleure valeur réalisable. **Ton parcours.** Enseignement commun de mathématiques pour les séries STMG et STI2D. Les situations de gestion et les situations techniques mobilisent ici les mêmes notions du programme.

- Du taux de variation au nombre dérivé.
- Écrire l'équation d'une tangente.
- Dériver les polynômes de degré au plus trois.
- Du signe de la dérivée aux variations.
- Optimiser une grandeur avec la dérivée.

2 L'idée avant la formule

La forme factorisée montre les zéros. Une écriture centrée sur le sommet montre la meilleure valeur. Les deux décrivent la même courbe.

3 Le cours formel

3.1 Du taux de variation au nombre dérivé

Intuition | Construire la notion pas à pas

Mesurer une évolution par unité. Entre deux abscisses a et b , la fonction change de $f(b) - f(a)$ tandis que l'abscisse change de $b - a$. Diviser ces deux variations donne une évolution moyenne par unité d'abscisse. On soustrait dans le même ordre en haut et en bas.

Sur une courbe, ce quotient est la pente de la droite passant par les deux points : la sécante. Une valeur positive indique que le deuxième point est plus haut dans le sens des abscisses croissantes ; elle ne décrit pas tous les mouvements de la courbe entre ces points.

Passer du moyen à l'instantané. Pour observer ce qui se passe près de a , on choisit $b = a + h$. Le taux devient $(f(a + h) - f(a))/h$. On calcule pour $h \neq 0$, puis on regarde vers quelle valeur ce taux se rapproche lorsque h devient très petit, à droite comme à gauche. Si une même limite finie existe, c'est le nombre dérivé.

On ne remplace jamais h par zéro dans le quotient initial : cela ferait une division par zéro. Une simplification valable pour h non nul peut en revanche révéler la limite. Les unités du nombre dérivé sont celles de f divisées par celles de x .

Définition | Comprendre la notion

Entre deux abscisses distinctes a et b , le taux de variation est $(f(b) - f(a))/(b - a)$. C'est la pente de la sécante reliant les deux points de la courbe. Son unité est l'unité de f divisée par celle de x . Quand b se rapproche de a , les pentes peuvent se rapprocher d'une valeur : le nombre dérivé $f'(a)$. Il représente une variation instantanée, et non la valeur de f elle-même. On écrit aussi le taux $(f(a + h) - f(a))/h$ pour $h \neq 0$. L'approche est intuitive ici : le calcul exact permet de comprendre la pente limite sans supposer qu'on peut diviser par zéro.

💡 Exemple | Exemple commenté

Pour $f(x) = x^2$ au voisinage de 3, on développe d'abord $f(3+h) = (3+h)^2 = 9 + 6h + h^2$. La variation d'image vaut donc $6h + h^2$.

Pour $h \neq 0$, le taux est $(6h + h^2)/h = 6 + h$. Avec $h = 0,1$, il vaut 6,1 ; avec $h = -0,1$, il vaut 5,9. En rapprochant h de zéro de part et d'autre, on rapproche le taux de 6.

On conclut $f'(3) = 6$. La valeur de la fonction est pourtant $f(3) = 9$: 9 est une hauteur, 6 une pente. Cette distinction est essentielle pour écrire ensuite une tangente.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Une vitesse moyenne sur un intervalle ne donne pas nécessairement la vitesse à l'un de ses instants. De même, un taux moyen positif n'impose pas que la fonction soit croissante partout entre les bornes.

À toi d'essayer : Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Le taux de variation entre a et b vaut...

1. $(f(b) + f(a))/(b + a)$
2. $(f(b) - f(a))/(b - a)$
3. $f(b)/f(a)$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 23 [Explication](#), p. 25

3.2 Écrire l'équation d'une tangente

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Une droite qui décrit la direction locale. Au point d'abscisse a , la tangente passe par $(a; f(a))$ et a pour pente $f'(a)$. Pour la déterminer, il faut donc une position et une direction.

Construire l'équation. Sur cette droite, un déplacement horizontal $x - a$ produit une variation verticale $f'(a)(x - a)$. On ajoute cette variation à la hauteur de départ $f(a)$: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Cette forme permet un contrôle immédiat : en remplaçant x par a , le déplacement est nul et on retrouve exactement $f(a)$. Après développement, le coefficient de x doit être $f'(a)$; l'ordonnée à l'origine n'est pas en général $f(a)$.

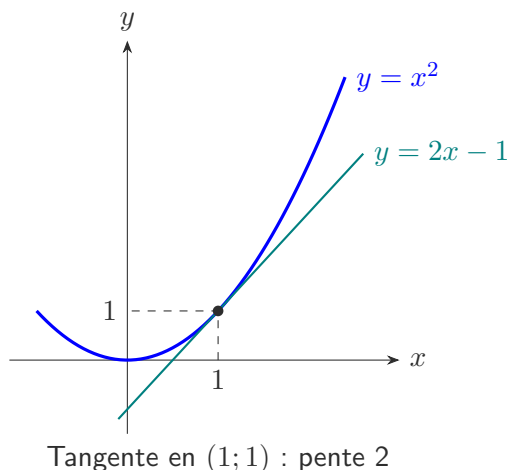
Interpréter sans surinterpréter. Une pente nulle signifie une tangente horizontale. Il faut encore étudier les variations pour reconnaître un extremum. La tangente n'est pas non plus définie par « une seule intersection » : elle peut traverser la courbe. Son rôle est d'en approcher le comportement près du point choisi.

📖 Définition | Comprendre la notion

Si f est dérivable en a , la tangente à sa courbe au point $(a; f(a))$ est la droite de pente $f'(a)$:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Il faut deux informations différentes : la hauteur du point et la pente. Une pente nulle donne une tangente horizontale, mais ne garantit pas à elle seule un maximum ou un minimum. La tangente approche la courbe près du point de contact. Elle peut la traverser ; ce n'est pas obligatoirement une droite ayant un seul point commun avec la courbe.



💡 Exemple | Exemple commenté

Pour $f(x) = x^2$ en $a = 2$, on a $f(2) = 4$ et $f'(2) = 4$. Bien que ces nombres soient égaux ici, ils ont deux rôles distincts : hauteur du point et pente.

La formule donne $y = 4(x - 2) + 4 = 4x - 4$. Le terme constant est -4, et non 4. Au point de contact, $4 \times 2 - 4 = 4$, ce qui vérifie le passage par (2; 4).

À $x = 2,1$, la tangente donne 4,4, tandis que la fonction donne 4,41. Les résultats sont proches mais différents : la tangente est une approximation locale, pas une autre expression exacte de la fonction.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Dans $y = mx + p$, p est la hauteur pour $x = 0$. Ce n'est la hauteur du point de contact que si celui-ci a pour abscisse zéro.

À toi d'essayer : Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Si $f(1) = 4$ et $f'(1) = 3$, la tangente est...

1. $y = 3x + 1$
2. $y = 4x + 3$
3. $y = 3x + 4$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.3 Dériver les polynômes de degré au plus trois

Intuition | Construire la notion pas à pas

Dériver une expression, puis calculer une pente. La fonction dérivée donne une formule valable pour toutes les abscisses autorisées. On remplace x par une valeur seulement après avoir établi cette formule. Substituer d'abord transformerait la fonction en une constante et ferait perdre l'information de variation.

Traiter les termes séparément. Les règles de dérivation s'appliquent à une somme terme par terme. Le coefficient d'un terme est conservé et multiplie la dérivée de sa puissance. Ainsi $5x^2$ donne $5 \times 2x = 10x$.

Le terme bx donne b , puisque la pente d'une droite $y = bx$ est constante. Un terme constant c donne zéro : déplacer toute une courbe verticalement ne modifie pas ses pentes. Les signes moins doivent être intégrés aux coefficients.

Manipuler un paramètre. Une lettre comme a peut désigner un nombre fixe alors que x est la variable. On dérive par rapport à x en conservant a . Une condition sur la pente, telle que $f'(1) = 11$, devient ensuite une équation pour déterminer a .

Un polynôme et sa dérivée sont définis sur tous les réels. La valeur $f(a)$ décrit une hauteur, tandis que $f'(a)$ décrit une pente : elles ne sont pas interchangeables.

Définition | Comprendre la notion

$(c)' = 0$, $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$. La dérivée d'une somme est la somme des dérivées, et $(kf)' = kf'$ pour une constante k . Un terme constant disparaît parce que sa valeur ne varie pas. Applique la règle à chaque terme en gardant les signes. Une fois la fonction dérivée calculée, on peut évaluer sa valeur en un point. Ne remplace pas x trop tôt : dériver une valeur numérique donnerait zéro et perdrait la variation.

Exemple | Exemple commenté

Pour $f(x) = x^3 - 4x + 7$, la dérivée du cube est $3x^2$, celle de $-4x$ est -4 et celle de 7 est 0 . Donc $f'(x) = 3x^2 - 4$.

La pente en 2 vaut $3 \times 2^2 - 4 = 12 - 4 = 8$. Il faut calculer le carré avant la multiplication : 3×2^2 vaut 12 , pas 36 . La hauteur est $f(2) = 8 - 8 + 7 = 7$.

Si l'on souhaite une tangente, on utilisera les deux résultats : $y = 8(x - 2) + 7$. L'exemple montre pourquoi la dérivation et l'évaluation de la fonction sont deux calculs complémentaires.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Dans $-3x^2$, le signe moins et le coefficient 3 restent devant le carré. La valeur en 2 est -12, et non le carré de -6.

À toi d'essayer : Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

La dérivée de $3x^2$ est...

1. $3x$
2. $6x^2$
3. $6x$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 23 [Explication](#), p. 25

3.4 Du signe de la dérivée aux variations**🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas**

Passer d'une pente locale à une évolution. Sur un intervalle où f est dérivable, le signe de sa dérivée indique le sens de variation. Des pentes positives font monter la fonction quand x augmente ; des pentes négatives la font descendre.

Organiser l'étude. Cherche d'abord où la dérivée s'annule ou cesse d'être définie, puis étudie son signe sur les intervalles obtenus. Le signe d'une expression factorisée se lit facteur par facteur ; il ne suffit pas de calculer la dérivée en quelques points choisis au hasard.

Repérer un changement de sens. Si la dérivée passe de négative à positive, f descend puis remonte : elle atteint un minimum local. Dans l'autre sens, elle atteint un maximum local. Une dérivée nulle sans changement de signe donne seulement une tangente horizontale.

Ne pas oublier les bornes. Sur un intervalle fermé, les valeurs aux extrémités peuvent être les plus grandes ou les plus petites. Complète donc le tableau avec les images des bornes et des points critiques, puis compare-les.

Le signe de f renseigne la position par rapport à l'axe horizontal ; celui de sa dérivée renseigne la montée ou la descente. Une fonction peut être négative tout en étant croissante.

📖 Définition | Comprendre la notion

Sur un intervalle, une dérivée positive donne une fonction croissante ; une dérivée négative donne une fonction décroissante. On cherche les zéros de la dérivée puis on étudie son signe entre eux. Un changement de signe de positif à négatif indique un maximum local ; de négatif à positif, un minimum local. Une dérivée nulle sans changement de signe ne suffit pas. Le tableau de variations donne les valeurs aux bornes et aux points critiques. Un extremum global sur un intervalle fermé se détermine en comparant les valeurs possibles, y compris celles des bornes. Le signe de f et celui de sa dérivée décrivent deux choses différentes.

 Exemple | Exemple commenté

Pour $f(x) = x^2 - 4x + 7$, la dérivée est $2x - 4 = 2(x - 2)$. Le facteur 2 étant positif, le signe est celui de $x - 2$: négatif avant 2, nul en 2, positif après.

La fonction décroît donc jusqu'à 2, puis croît. Sa valeur minimale est $f(2) = 4 - 8 + 7 = 3$. La forme $f(x) = (x - 2)^2 + 3$ confirme ce résultat puisque le carré est toujours positif ou nul.

La fonction reste positive même là où sa dérivée est négative. « Décroissante » signifie que ses valeurs diminuent quand x augmente ; cela ne signifie pas qu'elles se trouvent sous zéro.

 Attention | Comprendre une erreur fréquente

Résoudre $f'(x) = 0$ fournit des candidats, pas automatiquement des extrema. Il faut étudier les signes et, pour un extremum global, examiner les bornes.

À toi d'essayer : Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Si la dérivée passe de $+$ à $-$, la fonction présente...

1. Forcément un zéro
2. Un minimum local
3. Un maximum local

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 23 [Explication](#), p. 25

3.5 Optimiser une grandeur avec la dérivée

 Intuition | Construire la notion pas à pas

Choisir le meilleur résultat parmi les choix possibles. Optimiser une grandeur signifie la rendre aussi grande ou aussi petite que possible tout en respectant des contraintes. Il faut distinguer la variable choisie, par exemple une quantité produite, et la grandeur optimisée, par exemple un bénéfice.

Commencer par les contraintes. Avant de calculer une dérivée, écris l'ensemble des valeurs réalisables : intervalle de longueurs, capacité maximale, nombres entiers d'objets. Un résultat situé hors de cet ensemble n'est pas une solution du problème, même s'il donne le sommet de la courbe.

Justifier le meilleur choix. La dérivée sert à repérer les phases de croissance et de décroissance. Un passage de positif à négatif donne un maximum local ; les bornes du domaine restent des candidats à un maximum global. Compare toutes les valeurs pertinentes.

Revenir à une décision. Une production entière ne peut pas prendre une valeur comme 4,5. Le modèle continu aide à repérer la zone optimale ; on compare ensuite les entiers admissibles voisins. L'arrondi automatique peut manquer une égalité ou retenir le mauvais choix.

La conclusion doit donner à la fois le choix optimal et la valeur obtenue, avec leurs unités si le contexte en fournit.

 Définition | Comprendre la notion

Une optimisation cherche la plus petite ou la plus grande valeur d'une grandeur sous des contraintes. Choisis la variable, exprime la grandeur par une fonction et détermine son domaine. Étudie la dérivée, ses signes et les valeurs aux points critiques et aux bornes. Reviens ensuite au contexte : une longueur doit rester positive, une production peut être entière, une solution peut être hors du domaine. Un maximum local n'est pas automatiquement le maximum global. Pour un nombre entier d'objets, compare les entiers voisins du meilleur choix continu plutôt que d'arrondir sans contrôle.

 Exemple | Exemple commenté

Une recette est modélisée par $R(x) = -2x^2 + 80x$ sur $[0; 30]$. La dérivée $R'(x) = -4x + 80 = -4(x - 20)$ est positive avant 20 et négative après.

La recette croît jusqu'à 20 puis décroît. Le candidat intérieur est donc $x = 20$, pour lequel $R(20) = -800 + 1600 = 800$. Les bornes donnent $R(0) = 0$ et $R(30) = -1800 + 2400 = 600$.

La valeur 800 est la plus grande : le maximum autorisé est atteint en 20. Si la capacité avait limité x à 15, ce choix n'aurait plus été possible ; il aurait fallu reprendre la conclusion sur le nouveau domaine, sans conserver automatiquement le sommet.

 Attention | Comprendre une erreur fréquente

Résoudre la dérivée égale à zéro sans vérifier le domaine peut proposer une décision impossible. Un optimum peut se situer à une borne même lorsque la dérivée n'y est pas nulle.

À toi d'essayer : Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Avant de dériver un modèle d'optimisation, on doit. . .

1. Choisir systématiquement $x = 0$
2. Ignorer les unités
3. Définir son domaine admissible

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 25](#)

4 Boîte à outils

 Méthode | Du taux de variation au nombre dérivé

1. Repère les deux abscisses et leurs images.
2. Calcule variation d'image divisée par variation d'abscisse dans le même ordre.
3. Pour un nombre dérivé, pose $b = a + h$ et impose $h \neq 0$.
4. Développe puis simplifie avant de faire tendre h vers zéro.
5. Interprète la pente et son unité sans la confondre avec une image.

 Méthode | Écrire l'équation d'une tangente

1. Calcule séparément $f(a)$ et $f'(a)$.
2. Écris $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
3. Remplace les trois données en conservant les parenthèses.
4. Développe seulement si une forme $mx + p$ est utile.
5. Contrôle le point de contact et le coefficient directeur.

 Méthode | Dériver les polynômes de degré au plus trois

1. Repère la variable de dérivation et les coefficients constants.
2. Dérive chaque terme avec son signe.
3. Réunis les termes pour obtenir la fonction dérivée.
4. Remplace ensuite la variable par l'abscisse demandée.
5. Pour un paramètre, traduis la pente imposée en équation et vérifie la valeur trouvée.

 Méthode | Du signe de la dérivée aux variations

1. Annonce l'intervalle étudié et calcule la dérivée.
2. Cherche ses zéros et étudie son signe sur chaque morceau.
3. Traduis les signes en flèches de variation.
4. Calcule les images des bornes et des points critiques.
5. Compare ces valeurs pour identifier les extrema demandés.

 Méthode | Optimiser une grandeur avec la dérivée

1. Définis la variable, la grandeur à optimiser et le domaine autorisé.
2. Calcule la dérivée et ses zéros dans ce domaine.
3. Étudie son signe pour établir les variations.
4. Compare les valeurs aux points critiques et aux bornes.
5. Si la variable est entière, compare les candidats entiers puis formule la décision.

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases ; 6 à 10 demandent plusieurs étapes ; 11 à 15 t'invitent à choisir, justifier et contrôler. Cherche avant de consulter les indices.

Exercice 1 — Une pente moyenne ★☆☆

$f(2) = 7$ et $f(5) = 19$. Calcule le taux de variation entre 2 et 5.

Exercice 2 — Une tangente donnée par ses données ★☆☆

$f(3) = 8$ et $f'(3) = 2$. Donne l'équation de la tangente.

Exercice 3 — Dériver terme à terme ★☆☆

Dérive $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 4$.

Exercice 4 — Lire un signe ★☆☆

$f'(x) > 0$ sur $[1; 4]$. Que peut-on dire de f sur cet intervalle ?

Exercice 5 — Un maximum quadratique ★☆☆

$B(x) = -x^2 + 10x$ sur $[0; 10]$. Trouve son maximum.

Exercice 6 — Une unité de vitesse ★★☆☆

Une distance passe de 20 m à 80 m entre $t = 2$ s et $t = 5$ s. Calcule la vitesse moyenne et son unité.

Exercice 7 — Une pente horizontale ★★☆☆

$f(-1) = 5$ et $f'(-1) = 0$. Quelle est la tangente ?

Exercice 8 — Une pente en un point ★★☆☆

Pour $g(x) = -x^3 + 6x$, calcule la dérivée puis sa valeur en 2.

Exercice 9 — Construire un tableau ★★☆☆

Étudie $f(x) = x^2 - 6x + 5$ sur $[0; 5]$.

Exercice 10 — Une contrainte active ★★☆☆

$B(x) = -x^2 + 10x$, mais $x \in [0; 3]$. Quel est le maximum autorisé ?

Exercice 11 — Une dérivée par le taux ★★★

Pour $f(x) = x^2$, simplifie $(f(2+h) - f(2))/h$ et déduis la pente limite en 2.

Exercice 12 — Reconstruire deux informations ★★★

La tangente en $a = 2$ a pour équation $y = -3x + 10$. Retrouve $f(2)$ et $f'(2)$.

Exercice 13 — Trouver un paramètre ★★★

On a $h(x) = ax^3 + 2x$ et $h'(1) = 14$. Détermine a .

Exercice 14 — Une dérivée nulle sans extremum ★★ ★

Pour $f(x) = x^3$, la dérivée est $3x^2$. Pourquoi $x = 0$ ne donne-t-il pas un maximum ou minimum ?

Exercice 15 — Une production entière ★★ ★

$B(n) = -n^2 + 9n$ pour un entier $n \in [0; 9]$. Quelles productions maximisent B ?

6 Problème — Pour aller plus loin

Optimiser une production

Le résultat en centaines d'euros dépend de x lots. $B(x) = -(x - 2)(x - 14)$ sur $[0; 16]$.

1. Développe B et trouve ses zéros sans discriminant.
2. Étudie le signe de B et interprète sa zone positive.
3. Calcule B' et établis les variations.
4. Trouve le maximum et la quantité entière à retenir.
5. Calcule $B(0)$ et $B(16)$. Pourquoi ne peut-on pas promettre un résultat positif pour toute quantité ?

7 Indices des exercices

Exercice 1

Indice 1. Utilise le même ordre pour les deux différences.

Indice 2. Le dénominateur est $5 - 2$, pas 5.

Exercice 2

Indice 1. La pente multiplie $x - a$.

Indice 2. Ajoute ensuite $f(a)$.

Exercice 3

Indice 1. Applique une règle distincte à chaque terme.

Indice 2. La dérivée d'une constante est nulle.

Exercice 4

Indice 1. La dérivée décrit les variations.

Indice 2. Ne confonds pas signe de f et signe de sa dérivée.

Exercice 5

Indice 1. Cherche où la dérivée change de signe.

Indice 2. La parabole est tournée vers le bas.

Exercice 6

Indice 1. Rapporte la variation de distance à la durée écoulée.

Indice 2. L'unité est mètre divisé par seconde.

Exercice 7

Indice 1. Une pente nulle annule le terme en x .

Indice 2. La hauteur reste celle du point.

Exercice 8

Indice 1. Calcule d'abord la fonction dérivée.

Indice 2. Remplace ensuite x par l'abscisse demandée.

Exercice 9

Indice 1. Le point critique est 3.

Indice 2. Compare aussi les deux valeurs aux bornes.

Exercice 10

Indice 1. Le domaine est prioritaire.

Indice 2. Le point critique peut se trouver en dehors.

Exercice 11

Indice 1. Développe le carré avant de simplifier.

Indice 2. Factorise h au numérateur sans remplacer h par 0 trop tôt.

Exercice 12

Indice 1. Lis la pente dans l'équation affine.

Indice 2. Évalue ensuite la droite au point de contact.

Exercice 13

Indice 1. Traite a comme une constante pendant la dérivation.

Indice 2. La condition sur la pente devient une équation en a .

Exercice 14

Indice 1. Étudie le signe autour de zéro, pas seulement au point.

Indice 2. La dérivée garde le même signe.

Exercice 15

Indice 1. Le sommet continu n'est pas un entier.

Indice 2. Compare les deux entiers voisins.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On mesure la variation moyenne de f entre les abscisses 2 et 5.

Construire la réponse.

1. La variation d'image est $19 - 7 = 12$.
2. La variation d'abscisse est $5 - 2 = 3$.
3. Le taux vaut $12/3 = 4$.

Vérifier. En inversant les deux ordres, $(7 - 19)/(2 - 5) = (-12)/(-3) = 4$.

Conclure. L'image augmente en moyenne de 4 unités par unité d'abscisse.

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On connaît la hauteur et la pente au point d'abscisse 3.

Construire la réponse.

1. La formule est $y = f'(3)(x - 3) + f(3)$.
2. On remplace par $y = 2(x - 3) + 8$.
3. En développant, $y = 2x - 6 + 8 = 2x + 2$.

Vérifier. Le coefficient directeur est 2 et, pour $x = 3$, la droite donne $6 + 2 = 8$.

Conclure. La tangente a pour équation $y = 2x + 2$.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les quatre termes utilisent les règles du cube, du carré, de la fonction affine et de la constante.

Construire la réponse.

1. $2x^3$ donne $2 \times 3x^2 = 6x^2$.
2. $5x^2$ donne $10x$; $-3x$ donne -3 ; 4 donne zéro.
3. On réunit les résultats : $f'(x) = 6x^2 + 10x - 3$.

Vérifier. Le degré maximal a diminué de 3 à 2 et le signe du coefficient -3 est conservé.

Conclure. $f'(x) = 6x^2 + 10x - 3$ sur les réels.

Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le signe donné concerne la dérivée sur tout un intervalle.

Construire la réponse.

1. Une dérivée strictement positive indique une pente montante.
2. Le théorème de variation permet donc de conclure que f est strictement croissante sur $[1; 4]$.

Vérifier. Par exemple $x - 100$ est croissante sur cet intervalle tout en ayant des valeurs négatives : le signe de f reste inconnu.

Conclure. f est strictement croissante sur $[1; 4]$.

Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On cherche la plus grande valeur de B sur tout l'intervalle fermé $[0; 10]$.

Construire la réponse.

1. $B'(x) = -2x + 10 = -2(x - 5)$. Elle s'annule en 5.
2. Elle est positive pour $x < 5$ et négative pour $x > 5$: B croît puis décroît.
3. $B(5) = -25 + 50 = 25$. Les bornes donnent $B(0) = 0$ et $B(10) = -100 + 100 = 0$.

Vérifier. La forme $B(x) = 25 - (x - 5)^2$ confirme que B ne peut dépasser 25 et l'atteint en 5.

Conclure. Le maximum est 25, atteint pour $x = 5$.

Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La vitesse moyenne est une distance parcourue divisée par la durée correspondante.

Construire la réponse.

1. La distance augmente de $80 - 20 = 60$ mètres.
2. La durée écoulée est $5 - 2 = 3$ secondes.
3. La vitesse moyenne vaut $60/3 = 20$ mètres par seconde.

Vérifier. À vitesse constante de 20 m/s, on parcourrait bien 60 m en 3 s. Les données ne prouvent toutefois pas que la vitesse réelle était constante.

Conclure. La vitesse moyenne est de 20 m/s sur cet intervalle.

Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Une pente nulle donne une droite horizontale passant par le point indiqué.

Construire la réponse.

1. Ici $a = -1$, donc $x - a = x + 1$.
2. $y = 0(x + 1) + 5 = 5$.

Vérifier. Le point $(-1; 5)$ appartient à cette droite. Aucune information ne décrit un changement de sens de variation.

Conclure. La tangente est $y = 5$; on ne peut pas conclure à un extremum avec ces seules données.

Corrigé 8 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On cherche la fonction dérivée, puis une valeur de cette fonction.

Construire la réponse.

1. La dérivée de $-x^3$ est $-3x^2$ et celle de $6x$ est 6.
2. On obtient $g'(x) = -3x^2 + 6$.
3. En 2, $g'(2) = -3 \times 4 + 6 = -6$.

Vérifier. La dérivée négative donne une pente descendante en 2. L'image $g(2) = -8 + 12 = 4$ est une autre grandeur.

Conclure. $g'(x) = -3x^2 + 6$ et la pente en 2 vaut -6.

Corrigé 9 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On cherche les variations et les valeurs extrêmes sur l'intervalle fermé donné.

Construire la réponse.

1. $f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$. Elle est négative pour $x < 3$ et positive pour $x > 3$.
2. f décroît sur $[0; 3]$ puis croît sur $[3; 5]$.
3. $f(0) = 5$, $f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$ et $f(5) = 25 - 30 + 5 = 0$.
4. La plus petite valeur est -4 ; la plus grande des valeurs aux deux bornes est 5.

Vérifier. La forme $(x - 3)^2 - 4$ confirme le minimum -4 atteint en 3.

Conclure. Le minimum global est -4 en 3 et le maximum global 5 en 0.

Corrigé 10 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le domaine a changé : seuls les choix entre 0 et 3 sont autorisés.

Construire la réponse.

1. Le zéro 5 de la dérivée est hors de $[0; 3]$.
2. Sur cet intervalle, $-2x + 10 \geq -2 \times 3 + 10 = 4 > 0$. B est donc croissante.
3. Le maximum est à la borne droite 3 et vaut $B(3) = -9 + 30 = 21$.

Vérifier. La forme du modèle ne change pas, mais la contrainte exclut 5. La valeur 21 dépasse bien $B(0) = 0$.

Conclure. Le maximum autorisé est 21, obtenu en 3.

Corrigé 11

 Démonstration / Solution expliquée

Comprendre la question. Il faut simplifier le taux pour un déplacement h non nul.

Construire la réponse.

1. $f(2+h) = (2+h)^2 = 4 + 4h + h^2$ et $f(2) = 4$.
2. La différence vaut $4h + h^2 = h(4+h)$.
3. En divisant par $h \neq 0$, le taux devient $4+h$.
4. Lorsque h tend vers zéro, $4+h$ tend vers 4.

Vérifier. Pour $h = 0,01$ et $h = -0,01$, les taux sont 4,01 et 3,99 : ils encadrent la même valeur.

Conclure. La pente limite est $f'(2) = 4$.

Corrigé 12

 Démonstration / Solution expliquée

Comprendre la question. Il faut retrouver la pente de la droite puis sa hauteur au point de contact.

Construire la réponse.

1. Dans $y = -3x + 10$, le coefficient directeur est -3, donc $f'(2) = -3$.
2. Le point de contact a pour abscisse 2 : $f(2) = -3 \times 2 + 10 = 4$.

Vérifier. La formule reconstruite $y = -3(x-2) + 4$ se développe bien en $y = -3x + 10$.

Conclure. $f(2) = 4$ et $f'(2) = -3$.

Corrigé 13

 Démonstration / Solution expliquée

Comprendre la question. Le coefficient a reste constant pendant la dérivation.

Construire la réponse.

1. $h'(x) = 3ax^2 + 2$.
2. La condition en 1 donne $3a \times 1^2 + 2 = 14$.
3. On soustrait 2 puis divise par 3 : $3a = 12$, donc $a = 4$.

Vérifier. Avec cette valeur, $h'(1) = 12 \times 1^2 + 2 = 14$, comme demandé.

Conclure. Le coefficient recherché est $a = 4$.

Corrigé 14

 Démonstration / Solution expliquée

Comprendre la question. Il faut examiner ce qui se passe de part et d'autre du point où la dérivée s'annule.

Construire la réponse.

1. $3x^2 > 0$ pour $x \neq 0$ et vaut zéro seulement en 0.
2. Le signe reste positif à gauche comme à droite : la fonction continue de croître.
3. Pour tout $h > 0$, $f(-h) = -h^3 < 0 = f(0) < h^3 = f(h)$.

Vérifier. Des valeurs plus petites et plus grandes que $f(0)$ existent aussi près de zéro que l'on veut : cela exclut un extremum local.

Conclure. En 0, la tangente est horizontale mais il n'y a ni maximum ni minimum.

Corrigé 15

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La variable n doit être entière : le sommet du modèle continu ne suffit pas.

Construire la réponse.

1. Pour le modèle réel, $B'(x) = -2x + 9$ s'annule en $x = 4,5$. B croît avant puis décroît après.
2. Les entiers voisins admissibles sont 4 et 5.
3. $B(4) = -16 + 36 = 20$ et $B(5) = -25 + 45 = 20$.
4. Par les variations, les entiers inférieurs à 4 ou supérieurs à 5 donnent une valeur plus petite.

Vérifier. La symétrie autour de 4,5 explique l'égalité. La valeur continue 20,25 serait inaccessible avec une production entière.

Conclure. Les productions 4 et 5 sont toutes deux optimales et donnent un bénéfice modélisé de 20.

9 Corrigé du problème

1. **Comprendre la question.** La forme factorisée donne les zéros ; le développement donne une autre écriture du même modèle.

Construire la réponse.

- (a) On développe d'abord $(x - 2)(x - 14) = x^2 - 16x + 28$.
- (b) Le signe moins porte sur tous les termes : $B(x) = -x^2 + 16x - 28$.
- (c) Le produit s'annule lorsque $x - 2 = 0$ ou $x - 14 = 0$, soit x égal à 2 ou 14.

Vérifier. Remplacer chaque racine dans la forme factorisée annule un facteur et donc tout le produit.

Conclure. Les zéros sont 2 et 14, et la forme développée est $-x^2 + 16x - 28$.

2. **Comprendre la question.** On cherche les quantités qui donnent un résultat positif.

Construire la réponse.

- (a) Avant 2, les deux facteurs sont négatifs : leur produit est positif et B est négative à cause du signe moins.
- (b) Entre 2 et 14, les facteurs sont de signes contraires : leur produit est négatif et B est positive.
- (c) Après 14, les deux facteurs sont positifs : B redevient négative. Aux deux racines, B vaut zéro.

Vérifier. Au milieu, x égal à 8, les facteurs sont opposés et le résultat positif, ce qui confirme le signe intérieur.

Conclure. Le résultat est strictement positif pour $2 < x < 14$, dans le domaine autorisé.

3. **Comprendre la question.** La dérivée détermine le sens de variation sur le domaine.

Construire la réponse.

- (a) En dérivant $-x^2 + 16x - 28$, on obtient $B'(x) = -2x + 16 = -2(x - 8)$.
- (b) La dérivée est positive pour $x < 8$, nulle en 8 et négative pour $x > 8$.
- (c) On en déduit que B croît sur $[0; 8]$ puis décroît sur $[8; 16]$.

Vérifier. Le signe moins devant le terme quadratique correspond à une parabole tournée vers le bas, cohérente avec cette montée puis cette descente.

Conclure. Le sommet est atteint pour x égal à 8.

4. **Comprendre la question.** Il faut distinguer le choix optimal x et la valeur maximale $B(x)$.

Construire la réponse.

- (a) Le sommet $x = 8$ appartient à $[0; 16]$ et est entier.
- (b) On calcule $B(8) = -(8 - 2)(8 - 14) = 36$.
- (c) Les variations montrent que toute autre valeur du domaine donne un résultat inférieur ou égal.

Vérifier. La forme $36 - (x - 8)^2$ ne peut dépasser 36, car le carré soustrait est positif ou nul.

Conclure. Le choix optimal est 8 lots et le résultat maximal 36 centaines d'euros.

5. **Comprendre la question.** Les bornes illustrent les limites de la zone de rentabilité.

Construire la réponse.

- (a) À zéro, $B(0) = -(-2)(-14) = -28$.
- (b) À $x = 16$, $B(16) = -(16 - 2)(16 - 14) = -28$.
- (c) Ces valeurs sont négatives : produire trop peu ou dépasser la plage rentable peut conduire à une perte dans ce modèle.

Vérifier. Les deux bornes sont situées en dehors de l'intervalle entre les racines, où l'étude de signe annonçait déjà des valeurs négatives.

Conclure. La positivité n'est garantie que dans la zone établie ; les résultats se lisent en centaines d'euros.

10 Variante autonome et bilan

Étudie $D(x) = -(x - 3)(x - 9)$ sur $[0 ; 12]$: zéros, signe positif et maximum.

À toi d'essayer : Vérifie ta démarche

Résous la variante, puis explique pourquoi ta méthode s'applique.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 25](#)

- Je peux expliquer : du taux de variation au nombre dérivé.
- Je peux expliquer : écrire l'équation d'une tangente.
- Je peux expliquer : dériver les polynômes de degré au plus trois.
- Je peux expliquer : du signe de la dérivée aux variations.
- Je peux expliquer : optimiser une grandeur avec la dérivée.

11 Fiche-mémoire

Du taux de variation au nombre dérivé.

1. Repère les deux abscisses et leurs images.
2. Calcule variation d'image divisée par variation d'abscisse dans le même ordre.
3. Pour un nombre dérivé, pose $b = a + h$ et impose $h \neq 0$.
4. Développe puis simplifie avant de faire tendre h vers zéro.
5. Interprète la pente et son unité sans la confondre avec une image.

Écrire l'équation d'une tangente.

1. Calcule séparément $f(a)$ et $f'(a)$.
2. Écris $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
3. Remplace les trois données en conservant les parenthèses.
4. Développe seulement si une forme $mx + p$ est utile.
5. Contrôle le point de contact et le coefficient directeur.

Dériver les polynômes de degré au plus trois.

1. Repère la variable de dérivation et les coefficients constants.
2. Dérive chaque terme avec son signe.
3. Réunis les termes pour obtenir la fonction dérivée.
4. Remplace ensuite la variable par l'abscisse demandée.
5. Pour un paramètre, traduit la pente imposée en équation et vérifie la valeur trouvée.

Du signe de la dérivée aux variations.

1. Annonce l'intervalle étudié et calcule la dérivée.
2. Cherche ses zéros et étudie son signe sur chaque morceau.
3. Traduis les signes en flèches de variation.
4. Calcule les images des bornes et des points critiques.
5. Compare ces valeurs pour identifier les extrema demandés.

Optimiser une grandeur avec la dérivée.

1. Définis la variable, la grandeur à optimiser et le domaine autorisé.
2. Calcule la dérivée et ses zéros dans ce domaine.
3. Étudie son signe pour établir les variations.
4. Compare les valeurs aux points critiques et aux bornes.
5. Si la variable est entière, compare les candidats entiers puis formule la décision.

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Repère séparément la variation de l'abscisse et celle de l'image.

Indice 2 — Un pas de plus.

Divise la variation de l'image par celle de l'abscisse en soustrayant dans le même ordre.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

La tangente passe par (1;4) et a pour pente 3.

Indice 2 — Un pas de plus.

Utilise $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$, puis développe.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Le coefficient 3 reste devant lorsque tu dérites.

Indice 2 — Un pas de plus.

La dérivée du carré est $2x$; multiplie-la par le coefficient initial.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Traduis chacun des deux signes de la dérivée en sens de variation.

Indice 2 — Un pas de plus.

Une dérivée positive fait croître la fonction ; une dérivée négative la fait décroître.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve**Indice 1 — Une piste.**

Une solution doit respecter les contraintes du problème.

Indice 2 — Un pas de plus.

Repère les quantités possibles : longueurs positives, capacité maximale, valeurs entières éventuelles.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche**Indice 1 — Une piste.**

Repère les données utiles et l'inconnue. Reviens à la méthode correspondante dans la boîte à outils.

Indice 2 — Un pas de plus.

Contrôle les unités, les bornes et la plausibilité du résultat avant de lire la correction.

[Revenir à la recherche, p. 22](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Le taux vaut $(f(b) - f(a)) / (b - a)$ pour $a \neq b$. Le numérateur mesure la variation verticale et le dénominateur la variation horizontale. Leur quotient est la pente de la sécante, pas la différence des deux images seule.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

On obtient $y = 3(x - 1) + 4 = 3x + 1$. En x égal à 1, la droite donne 4 ; son coefficient directeur vaut 3. Les deux informations sont donc respectées.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

La dérivée de $3x^2$ est $3 \times 2x = 6x$. L'exposant diminue d'une unité et multiplie le coefficient ; le nombre 3 ne disparaît pas.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

La fonction croît puis décroît : elle présente un maximum local au changement de signe. Cela ne suffit pas à conclure qu'il s'agit du maximum global sans examiner le reste du domaine.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Il faut d'abord définir le domaine admissible. Un zéro de la dérivée situé hors de ce domaine ne peut pas être retenu, et les bornes autorisées peuvent elles-mêmes donner l'optimum.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche

Comprendre la question. La variante se traite directement par les facteurs puis par une forme centrée.

Construire la réponse.

1. Le produit $D(x) = -(x - 3)(x - 9)$ s'annule en 3 et 9.
2. Les facteurs ont des signes contraires entre 3 et 9 : avec le signe moins, D est positive sur $]3; 9[$. Elle est nulle aux bornes et négative ailleurs dans $[0; 12]$.
3. Le développement donne $D(x) = -x^2 + 12x - 27 = 9 - (x - 6)^2$.
4. Le carré est minimal, égal à zéro, en 6. D atteint donc son maximum 9 en 6, valeur autorisée et entière.

Vérifier. $D(6) = -(6 - 3)(6 - 9) = -3(-3) = 9$. Les bornes donnent $D(0) = -27$ et $D(12) = -27$.

Conclure. Les zéros sont 3 et 9, la zone positive $]3; 9[$, et le maximum 9 est atteint en 6.

[Revenir à la recherche, p. 22](#)