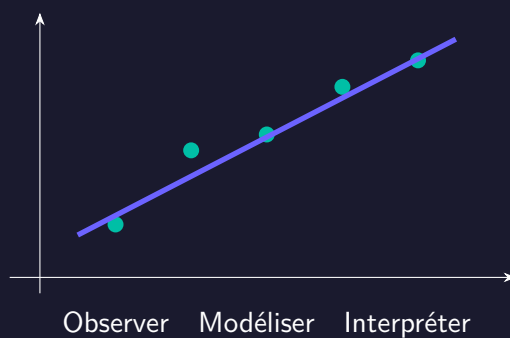


Variables aléatoires et simulations

Probabilités ■ Comprendre et s'entraîner



Première STMG et STI2D — commun
Année scolaire 2026–2027

 Cours

 18 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	Pourquoi ce chapitre ?	3
2	L'idée avant la formule	3
3	Le cours formel	3
3.1	Associer un nombre au hasard	3
3.2	L'espérance : une moyenne à long terme	4
3.3	Coder succès et échec	6
3.4	Répéter jusqu'à quatre épreuves indépendantes	7
3.5	Simuler et estimer une probabilité	8
3.6	Mesurer la dispersion de fréquences simulées	9
4	Boîte à outils	11
5	Exercices progressifs	13
6	Problème — Pour aller plus loin	15
7	Indices des exercices	16
8	Corrigés détaillés	18
9	Corrigé du problème	24
10	Variante autonome et bilan	26
11	Fiche-mémoire	26
12	Indices des pauses et des preuves	28
13	Explications des pauses et des preuves	30

1 Pourquoi ce chapitre ?

Une variable aléatoire résume une expérience par un nombre. Son espérance permet de comparer des règles de jeu, tandis que les simulations montrent la fluctuation des résultats. **Ton parcours.** Enseignement commun de mathématiques pour les séries STMG et STI2D. Les situations de gestion et les situations techniques mobilisent ici les mêmes notions du programme.

- Associer un nombre au hasard.
- L'espérance : une moyenne à long terme.
- Coder succès et échec.
- Répéter jusqu'à quatre épreuves indépendantes.
- Simuler et estimer une probabilité.
- Mesurer la dispersion de fréquences simulées.

2 L'idée avant la formule

Une moyenne théorique n'est pas une promesse pour une partie. C'est la moyenne pondérée des gains par leurs probabilités, à comparer aux moyennes observées sur de nombreuses parties.

3 Le cours formel

3.1 Associer un nombre au hasard

Intuition | Construire la notion pas à pas

Passer de l'issue à un nombre. Une variable aléatoire X associe une valeur numérique à chaque issue. L'issue peut être une face de dé, alors que X est un gain en euros. Deux issues différentes peuvent produire la même valeur de X .

Construire la loi. On liste d'abord toutes les valeurs possibles de X . Pour chacune, on regroupe les issues qui la produisent et on additionne leurs probabilités. La loi associe ainsi chaque valeur à sa probabilité, avec des probabilités positives ou nulles dont la somme vaut 1.

Traduire une condition sur X . L'événement $X \leq 0$ rassemble toutes les valeurs négatives et la valeur zéro si elle est possible. On additionne leurs probabilités. L'événement $X > 0$ est son contraire ; aucun résultat ne doit être compté deux fois ou oublié.

Définir précisément la grandeur. Pour un jeu payant, le gain net est le montant reçu moins la mise. Ne rien recevoir donne donc un gain net négatif égal à l'opposé de la mise. Construire la loi de la recette et celle du bénéfice conduit à des valeurs différentes.

Définition | Comprendre la notion

Une variable aléatoire X associe un nombre à chaque issue : gain d'un jeu, nombre de défauts, durée selon un scénario. Sa loi donne les valeurs possibles x_i et leurs probabilités p_i . Les probabilités de la loi sont positives ou nulles et leur somme vaut 1. Plusieurs issues peuvent conduire à la même valeur de X : il faut additionner leurs probabilités. $\{X = a\}$ signifie que la valeur est exactement a ; $\{X \leq a\}$ regroupe toutes les valeurs au plus égales à a . Pour un gain net, retranche la mise au montant reçu avant de construire la loi.

 Exemple | Exemple commenté

Un dé équilibré donne un gain net de 4 euros si la face 6 apparaît et une perte de 1 euro sinon. Les six issues du dé produisent seulement deux valeurs : X vaut 4 ou -1.

La valeur 4 correspond à la seule face 6, donc $P(X = 4) = 1/6$. La valeur -1 correspond aux cinq autres faces, donc $P(X = -1) = 5/6$. La somme des probabilités vaut 1 : la loi est complète.

La probabilité d'un gain strictement positif est $P(X > 0) = 1/6$, tandis que $P(X \leq 0) = 5/6$. La valeur 0 n'est pas possible ici, mais la notation ≤ 0 reste correcte : elle sélectionne seulement la valeur -1 parmi les valeurs de la loi.

 Attention | Comprendre une erreur fréquente

Les valeurs de X peuvent être négatives ; ce sont les probabilités qui doivent rester entre 0 et 1. Une perte de 3 euros correspond à une valeur -3, pas à une probabilité négative.

À toi d'essayer : Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Les probabilités d'une loi finie complète ont pour somme...

1. Le nombre de valeurs
2. 1
3. 0

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 28](#) [Explication, p. 30](#)

3.2 L'espérance : une moyenne à long terme

 Intuition | Construire la notion pas à pas

Construire une moyenne théorique. L'espérance pondère chaque valeur possible par sa probabilité : $E(X) = \sum x_i p_i$. Les probabilités jouent le rôle de fréquences prévues par le modèle. L'unité du résultat reste celle de X .

Donner un sens à cette moyenne. Sur de nombreuses répétitions indépendantes suivant le même modèle fini, la moyenne observée tend à se rapprocher de l'espérance. Cela ne fixe pas le résultat d'une partie, ni même celui d'une courte série. L'espérance peut être une valeur qui n'est jamais obtenue isolément.

Travailler sur le bon bilan. Pour évaluer un jeu payant, on calcule le gain net après soustraction de la mise. Une espérance de recette positive ne suffit pas à rendre le jeu avantageux si le prix à payer est encore plus grand.

Interpréter l'équité. Un jeu de gain net d'espérance nulle est équitable au sens de ce critère. Cela ne veut pas dire que chaque joueur termine à zéro. Une espérance négative indique une perte moyenne théorique, avec toujours la possibilité de gains ponctuels.

 Définition | Comprendre la notion

Pour une loi finie, l'espérance est $E(X) = \sum x_i p_i$. C'est une moyenne pondérée par les probabilités ; elle s'exprime dans la même unité que X . Elle décrit une moyenne attendue lors d'un grand nombre

de répétitions selon le même modèle, pas le résultat certain d'une seule expérience. Elle peut ne pas être une valeur possible de X . Un jeu d'espérance de gain net nulle est équitable dans ce modèle. Une espérance négative ne signifie pas qu'on perd à chaque partie, et une espérance positive ne garantit pas de gagner sur une courte série.

Exemple | Exemple commenté

Un ticket coûte 3 euros et rapporte 10 euros avec probabilité 0,2, rien sinon. Le gain net X vaut donc 7 avec probabilité 0,2 et -3 avec probabilité 0,8.

L'espérance est $E(X) = 7 \times 0,2 + (-3) \times 0,8 = 1,4 - 2,4 = -1$ euro. Le jeu prévoit ainsi une perte moyenne théorique d'un euro par partie.

Pour comprendre ce bilan, sur 100 parties ayant exactement les proportions du modèle, 20 gains rapporteraient $20 \times 7 = 140$ euros nets et 80 pertes coûteraient $80 \times 3 = 240$ euros. Le bilan serait -100 euros, soit -1 par partie. Les effectifs réels fluctuent : cet exemple illustre la moyenne, pas un résultat garanti sur 100 parties.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Une espérance positive ne signifie pas que toutes les issues sont gagnantes. Elle combine les montants et leurs probabilités ; elle ne supprime pas le risque de perte sur une partie ou une courte série.

À toi d'essayer : Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Une espérance de gain égale à 2 euros signifie. . .

1. Un gain moyen prévu de 2 euros par répétition
2. Un gain certain de 2 euros
3. Aucune perte possible

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 28](#) [Explication, p. 30](#)

3.3 Coder succès et échec**🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas**

Choisir deux catégories exhaustives. Une épreuve de Bernoulli distingue un événement appelé succès et son contraire appelé échec. Le mot succès est une convention : on peut appeler succès le fait qu'une pièce soit défectueuse si c'est l'événement que l'on compte.

Coder par zéro et un. La variable vaut 1 lorsque le succès se produit et 0 sinon. Ce codage permet ensuite de compter les succès en additionnant les valeurs de plusieurs épreuves. Il ne faut pas le confondre avec une note de qualité.

Décrire la loi avec un seul paramètre. Si p est la probabilité du succès, celle de l'échec vaut $1 - p$. L'espérance est $1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$. Cette moyenne peut être décimale alors que chaque réalisation vaut seulement zéro ou un.

Simuler par une longueur. Un nombre uniforme U sur l'intervalle unité tombe dans $[0; p[$ avec probabilité p . Le test $U < p$ peut donc coder le succès. Inverser ce test sélectionne la partie de longueur $1 - p$ et simule généralement un autre paramètre.

📖 Définition | Comprendre la notion

Une épreuve de Bernoulli distingue deux issues, appelées succès et échec. Le succès est l'événement choisi pour l'étude, même s'il s'agit d'un défaut. La variable de Bernoulli vaut 1 en cas de succès, 0 sinon. Si la probabilité de succès est p , alors $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$ et $E(X) = p$. Pour simuler l'épreuve, on peut tirer un nombre uniforme U entre 0 et 1 et renvoyer 1 si $U < p$, 0 sinon. Le segment de longueur p représente les succès.

💡 Exemple | Exemple commenté

Un contrôle étudie une production avec une probabilité de défaut de 0,04. On définit le succès comme « la pièce est défectueuse ». La variable X vaut 1 avec probabilité 0,04 et 0 avec probabilité 0,96.

Son espérance vaut $1 \times 0,04 + 0 \times 0,96 = 0,04$. Ce résultat signifie une moyenne théorique de 0,04 indicatrice de défaut par contrôle, pas une pièce « défectueuse à 4 pour cent ».

Pour simuler, un uniforme U inférieur à 0,04 donne 1. La portion de l'intervalle correspondant au succès occupe quatre centièmes de sa longueur. Si l'on préférerait coder la conformité par 1, le paramètre serait 0,96 : le phénomène est le même, mais la variable a changé.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Le succès peut désigner un défaut ou un échec commercial. Ce nom sert à fixer ce que l'on compte ; il ne permet pas de deviner le paramètre sans lire sa définition.

À toi d'essayer : Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Une variable de Bernoulli prend les valeurs...

1. 0 et 1
2. Tous les entiers
3. 1 et 2

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 28](#) [Explication, p. 30](#)

3.4 Répéter jusqu'à quatre épreuves indépendantes

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Vérifier les hypothèses avant de répéter. Les épreuves doivent avoir la même probabilité p de succès et être indépendantes. Le résultat d'une étape ne change alors pas les probabilités des étapes suivantes : chaque nœud de l'arbre porte p pour succès et $1 - p$ pour échec.

Distinguer un chemin d'un nombre de succès. Avec trois essais, SSE et SES sont deux chemins différents mais donnent chacun deux succès. Pour la probabilité d'exactly deux succès, il faut réunir tous les chemins correspondants, pas seulement celui où les succès arrivent d'abord.

Calculer le poids d'un chemin. Un chemin de n essais avec k succès contient k facteurs p et $n - k$ facteurs $1 - p$. Son poids est donc $p^k(1 - p)^{n-k}$. L'ordre ne change pas ce produit, mais le nombre d'ordres possibles compte dans la probabilité totale.

Utiliser un contraire simple. « Au moins un succès » regroupe de nombreux chemins ; son contraire est le seul chemin composé uniquement d'échecs. Sa probabilité est $1 - (1 - p)^n$. Cette méthode évite de compter plusieurs fois les chemins possédant plusieurs succès.

📖 Définition | Comprendre la notion

On répète des épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. À chaque étape, la probabilité de succès reste p , quel que soit le passé. Un arbre à n étapes comporte 2^n chemins. Un chemin contenant k succès et $n - k$ échecs a pour probabilité $p^k(1 - p)^{n-k}$. Pour un nombre donné de succès, il faut compter tous les chemins correspondants. En première, des arbres jusqu'à quatre épreuves permettent ce dénombrement directement. Pour « au moins un succès », le contraire « aucun succès » simplifie souvent le calcul : $1 - (1 - p)^n$.

💡 Exemple | Exemple commenté

Deux essais indépendants ont chacun une probabilité de succès 0,3. Les quatre chemins sont SS, SE, ES, EE. Leurs poids sont $0,3^2 = 0,09$, $0,3 \times 0,7 = 0,21$, $0,7 \times 0,3 = 0,21$ et $0,7^2 = 0,49$.

Exactement un succès correspond à SE ou ES, donc sa probabilité est $0,21 + 0,21 = 0,42$. Au moins un succès correspond à SS, SE ou ES et vaut $0,09 + 0,21 + 0,21 = 0,51$.

Le complément donne aussi $1 - P(E\bar{E}) = 1 - 0,49 = 0,51$. Enfin, les quatre poids totalisent 1. Ces deux contrôles vérifient que les chemins ont été comptés une seule fois.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

« Exactement deux » exclut trois succès, tandis que « au moins deux » les inclut. Écris les chemins acceptés avant de calculer pour fixer cette différence.

À toi d'essayer : Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Trois essais Bernoulli ont combien de chemins ?

1. 6
2. 8
3. 3

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 28](#) [Explication, p. 30](#)

3.5 Simuler et estimer une probabilité

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Transformer un modèle en procédure. Simuler un dé équilibré signifie produire des entiers de 1 à 6 avec les mêmes probabilités. Le programme ne vérifie pas qu'un dé physique est équilibré : cette propriété est une hypothèse du modèle que l'on a choisi de simuler.

Compter avant de diviser. Pour estimer la probabilité d'un événement sur N essais, on compte ses réalisations puis on divise par N . Le compteur commence à zéro avant les répétitions. Il augmente seulement lorsque l'événement se produit ; il ne doit pas être réinitialisé à chaque essai.

Distinguer fréquence et probabilité. La fréquence est calculée à partir d'une série obtenue. Elle change d'une simulation à l'autre. La probabilité est un paramètre du modèle ; elle ne change pas parce qu'une simulation donne une fréquence légèrement différente.

Comprendre la stabilisation. Avec beaucoup d'essais indépendants suivant le même modèle, les fréquences se concentrent davantage autour de la probabilité. Elles ne deviennent pas nécessairement exactes et ne se rapprochent pas à chaque essai. Fixer une graine permet de reproduire une simulation, sans garantir qu'elle sera plus proche de la valeur théorique.

📖 Définition | Comprendre la notion

Une simulation traduit un modèle aléatoire en instructions. Les résultats d'une simulation ne remplacent pas les hypothèses : un programme peut simuler fidèlement un modèle inadapté. Sur N répétitions, la fréquence d'un événement est le nombre de réalisations divisé par N . Elle varie d'une série à l'autre. Quand N augmente, elle a tendance à se stabiliser autour de la probabilité, sans devenir nécessairement exacte ni s'en rapprocher à chaque nouvelle observation. En Python, `randint(1,6)` peut simuler un dé équilibré ; `random()` donne un uniforme entre 0 et 1. Fixer une graine aide à reproduire un résultat, pas à le rendre plus juste.

 Exemple | Exemple commenté

Pour estimer la probabilité d'obtenir 6, on peut utiliser :

```
1 from random import randint
2
3 def frequence(N):
4     succes = 0
5     for k in range(N):
6         if randint(1, 6) == 6:
7             succes += 1
8     return succes / N
```

N doit être un entier strictement positif. Le compteur est créé avant la boucle ; chaque appel à `randint(1,6)` produit un lancer dans le modèle. Le test sélectionne uniquement la face 6 et l'incrément ajoute un succès. La division finale transforme le total en fréquence.

Si 168 succès sont obtenus en 1 000 essais, la fonction renvoie 0,168. Cette fréquence est proche de $1/6 \approx 0,1667$, mais elle n'est pas la probabilité exacte. Un autre appel peut donner un résultat différent, ce qui est attendu pour une simulation aléatoire.

 Attention | Comprendre une erreur fréquente

Un grand nombre d'essais améliore la concentration statistique, mais ne garantit pas une fréquence exactement égale à la probabilité. Ne corrige pas les résultats simulés pour les forcer à coïncider avec la théorie.

À toi d'essayer : Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Une fréquence observée sur 200 essais avec 46 succès vaut. . .

1. 0,46
2. 4,35
3. 0,23

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 29](#) [Explication, p. 30](#)

3.6 Mesurer la dispersion de fréquences simulées

 Intuition | Construire la notion pas à pas

Observer une série de fréquences. On produit N échantillons de taille n. Chacun donne une fréquence f_i , puis on calcule la moyenne $\bar{f}$ et l'écart-type descriptif s de ces N fréquences. Le diviseur de cette variance descriptive est N, le nombre de fréquences.

Distinguer dispersion et étendue. L'étendue utilise seulement la plus petite et la plus grande fréquence. L'écart-type utilise les carrés des écarts de toutes les fréquences à leur moyenne. Ces deux indicateurs ne sont pas interchangeables.

Construire un intervalle autour de p. Dans $[p - ks; p + ks]$, le centre est la probabilité du modèle p et le rayon est ks. On compte ensuite les fréquences observées qui appartiennent à l'intervalle, bornes incluses. Diviser ce compte par N donne une proportion empirique.

Interpréter ce comptage sans règle automatique. On ne remplace pas le résultat observé par un pourcentage supposé universel. Le nombre de fréquences dans l'intervalle dépend de la simulation, de la taille et du modèle. Si une borne sort de $[0; 1]$, les fréquences restent naturellement dans $[0; 1]$; l'intersection ne change pas les observations comptées.

Agir sur la bonne taille. Augmenter n réduit généralement la fluctuation de chaque fréquence. Augmenter N permet d'observer plus précisément cette distribution, mais ne change pas la taille des échantillons.

Définition | Comprendre la notion

Simule N échantillons indépendants de taille n , pour une épreuve de probabilité p . Chaque échantillon fournit une fréquence; tu obtiens une série de N fréquences $f_1, \dots, f_N$. Leur moyenne est $\bar{f} = \frac{1}{N} \sum f_i$ et leur écart-type descriptif est $s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (f_i - \bar{f})^2}$. Le tableur ou Python effectue ces calculs. Ne confonds pas s avec l'étendue maximum moins minimum. Compte ensuite les fréquences dans $[p - ks; p + ks]$, pour $k = 1, 2$ ou 3 , et rapporte le nombre obtenu à N . Ces proportions observées décrivent la simulation; elles ne constituent pas une garantie universelle. À p fixé, la dispersion est de l'ordre de $1/\sqrt{n}$. Multiplier n par quatre la divise donc approximativement par deux. Augmenter N permet de mieux observer cette dispersion, sans changer la taille n des échantillons.

Exemple | Exemple commenté

Pour un modèle de probabilité $p = 0,5$, une simulation donne un écart-type descriptif $s = 0,05$. À deux écarts-types, le rayon vaut $2s = 0,10$. L'intervalle est donc $[0,5 - 0,10; 0,5 + 0,10] = [0,4; 0,6]$. Si 950 fréquences sur 1 000 appartiennent à cet intervalle, la proportion observée est $950/1\,000 = 0,95$, soit 95 pour cent. Il reste 50 fréquences en dehors, soit 5 pour cent. Les deux proportions totalisent 1.

Le chiffre 95 pour cent provient ici du comptage donné. Il ne signifie pas que toute simulation à deux écarts-types produira exactement cette proportion, ni qu'un futur échantillon sera garanti dans l'intervalle.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Dans $[p - 2s; p + 2s]$, le rayon vaut $2s$ et la largeur totale $4s$. Ne confonds pas la distance du centre à une borne avec la distance entre les deux bornes.

À toi d'essayer : Pause 6 — Mets la notion à l'épreuve

Dans $[p - 2s; p + 2s]$, le rayon vaut. . .

1. s
2. p
3. $2s$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 29](#) [Explication, p. 30](#)

4 Boîte à outils

Méthode | Associer un nombre au hasard

1. Définis X avec son unité, en distinguant recette et gain net.
2. Liste ses valeurs possibles, sans répéter une valeur obtenue par plusieurs issues.
3. Associe à chaque valeur la somme des probabilités des issues correspondantes.
4. Vérifie que les probabilités sont admissibles et totalisent 1.
5. Pour une condition sur X , sélectionne les valeurs concernées avant d'additionner.

Méthode | L'espérance : une moyenne à long terme

1. Construis la loi de la quantité demandée, en soustrayant la mise si nécessaire.
2. Multiplie chaque valeur par sa probabilité en conservant les signes.
3. Additionne tous les produits et indique l'unité.
4. Pour une valeur inconnue, impose l'espérance souhaitée et résous l'équation.
5. Interprète le résultat comme une moyenne théorique, puis vérifie la cohérence de la loi et du calcul.

Méthode | Coder succès et échec

1. Définis explicitement le succès et l'échec.
2. Associe la valeur 1 au succès et 0 à l'échec.
3. Identifie p puis complète avec $1 - p$.
4. Calcule l'espérance comme moyenne pondérée, ou utilise $E(X) = p$.
5. Pour une simulation, vérifie que la zone où le code renvoie 1 a bien une probabilité p .

Méthode | Répéter jusqu'à quatre épreuves indépendantes

1. Vérifie le nombre d'essais, leur indépendance et la constance de p .
2. Liste les chemins acceptés en distinguant « exactement » et « au moins ».
3. Multiplie les probabilités le long de chaque chemin.
4. Additionne les chemins disjoints ou calcule le contraire s'il est plus simple.
5. Contrôles avec l'arbre complet lorsque le nombre d'essais est petit.

 Méthode | Simuler et estimer une probabilité

1. Décrit le modèle, l'événement recherché et la méthode de tirage simulé.
2. Initialise le compteur avant la boucle et fixe un nombre entier positif d'essais.
3. Produis une nouvelle issue à chaque essai et incrémente seulement en cas de succès.
4. Divise le total des succès par le nombre d'essais après la boucle.
5. Compare la fréquence à la théorie et répète la simulation pour observer la fluctuation.

 Méthode | Mesurer la dispersion de fréquences simulées

1. Calcule une fréquence par échantillon, puis la moyenne et l'écart-type de ces N fréquences.
2. Identifie p , s et le multiplicateur k sans confondre n et N .
3. Calcule le rayon ks , puis les bornes $p - ks$ et $p + ks$.
4. Compte les fréquences comprises entre les bornes incluses et divise par N .
5. Présente la proportion comme observée et précise quel changement de taille est étudié.

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 6 consolident les bases ; 7 à 12 demandent plusieurs étapes ; 13 à 18 t'invitent à choisir, justifier et contrôler. Cherche avant de consulter les indices.

Exercice 1 — Compléter une loi ★★☆☆

X prend les valeurs 0, 1, 2 avec probabilités 0,2, p , 0,5. Trouve p .

Exercice 2 — Une espérance simple ★★☆☆

X vaut 0 avec probabilité 0,7 et 10 avec probabilité 0,3. Calcule $E(X)$.

Exercice 3 — Un paramètre ★★☆☆

Une pièce équilibrée donne pile ou face. On code pile par 1. Donne la loi et l'espérance.

Exercice 4 — Deux succès ★★☆☆

Deux essais indépendants ont chacun une probabilité de succès 0,6. Calcule la probabilité de deux succès.

Exercice 5 — Calculer une fréquence ★★☆☆

Une simulation de 500 lancers donne 87 six. Quelle fréquence a-t-on observée ?

Exercice 6 — Un intervalle ★★☆☆

$p = 0,3$ et $s = 0,04$. Construis les intervalles pour $k = 1$ et $k = 2$.

Exercice 7 — Lire un événement ★★☆☆

X vaut -2 , 0, 5 avec probabilités 0,4, 0,3, 0,3. Calcule $P(X \leq 0)$ et $P(X > 0)$.

Exercice 8 — Un jeu équitable ? ★★☆☆

Un jeu donne un gain net de 6 euros avec probabilité $1/4$ et de -2 euros sinon. Est-il équitable ?

Exercice 9 — Changer le succès ★★☆☆

La probabilité qu'un produit soit conforme est 0,97. Si le succès est « défectueux », quel est le paramètre ?

Exercice 10 — Exactement deux sur trois ★★☆☆

On fait trois essais indépendants avec $p = 1/2$. Calcule la probabilité d'exactly deux succès.

Exercice 11 — Un compteur mal placé ★★☆☆

Un programme remet `succes = 0` à l'intérieur de chaque tour de boucle. Pourquoi son total est-il faux ?

Exercice 12 — Calculer puis compter ★★☆☆

Les fréquences sont 0,4 ; 0,5 ; 0,5 ; 0,6, avec $p = 0,5$. Calcule leur écart-type descriptif et compte celles dans $[p - s; p + s]$.

Exercice 13 — Gain reçu et gain net ★★☆☆

Un ticket coûte 3 euros. Il rapporte 10 euros avec probabilité 0,2 et rien sinon. Donne la loi du gain net.

Exercice 14 — Fixer une récompense ★★ ★

Un jeu coûte 2 euros. On reçoit R euros avec probabilité 0,1 et rien sinon. Quelle récompense rend l'espérance nette nulle ?

Exercice 15 — Vérifier une simulation ★★ ★

Pour simuler une Bernoulli de paramètre 0,3, un code renvoie 1 si `random()` > 0.3. Quelle est l'erreur ?

Exercice 16 — Au moins un sur quatre ★★ ★

Quatre essais indépendants ont $p = 0,2$. Calcule la probabilité d'au moins un succès.

Exercice 17 — Une stabilisation non monotone ★★ ★

Après 100 essais, une fréquence vaut 0,50 ; après 101 essais, 0,505 environ. Le modèle de probabilité 0,5 est-il contredit parce que la fréquence s'est éloignée ?

Exercice 18 — Changer n ou N ★★ ★

On utilise $N = 1\,000$ échantillons de taille $n = 100$. Quel changement vise une dispersion divisée par deux : $N = 4\,000$ ou $n = 400$?

6 Problème — Pour aller plus loin

Une loterie pédagogique et ses simulations

Une roue équilibrée comporte quatre secteurs : trois rapportent 0 point et un rapporte 8 points. On paie 1 point par partie. X est le gain net.

1. Donne la loi de X et vérifie la somme des probabilités.
2. Calcule $E(X)$ et explique son sens.
3. On joue trois parties indépendantes. Calcule la probabilité d'exactly deux secteurs gagnants et celle d'au moins un.
4. Décris un programme qui simule N séries de n parties et enregistre la fréquence de secteurs gagnants pour chaque série.
5. Avec $p = 0,25$, un écart-type de fréquences $s = 0,04$ et 940 fréquences sur 1 000 dans $[0,17 ; 0,33]$, interprète l'intervalle et le comptage.

7 Indices des exercices

Exercice 1

Indice 1. Une loi complète totalise 1.

Indice 2. Soustrais les deux probabilités connues.

Exercice 2

Indice 1. Multiplie chaque valeur par son poids.

Indice 2. Une espérance n'a pas à figurer parmi les valeurs possibles.

Exercice 3

Indice 1. Le succès est pile.

Indice 2. La pièce est équilibrée.

Exercice 4

Indice 1. Les deux succès doivent se produire.

Indice 2. Multiplie les probabilités du chemin SS.

Exercice 5

Indice 1. La fréquence est le quotient observé.

Indice 2. Ne remplace pas la probabilité théorique par un résultat de simulation.

Exercice 6

Indice 1. Calcule $p - k_s$ et $p + k_s$.

Indice 2. Ne double pas le centre.

Exercice 7

Indice 1. Liste les valeurs qui respectent chaque inégalité.

Indice 2. La valeur 0 est incluse seulement dans la première.

Exercice 8

Indice 1. La probabilité de perte est $3/4$.

Indice 2. Un jeu équitable a une espérance nette nulle.

Exercice 9

Indice 1. Le succès est défini dans l'énoncé.

Indice 2. Prends la probabilité du défaut, pas celle de la conformité.

Exercice 10

Indice 1. Liste les positions possibles de l'unique échec.

Indice 2. Il y a trois chemins disjoints.

Exercice 11

Indice 1. Une affectation à zéro efface la valeur mémorisée.

Indice 2. Le compteur doit accumuler tous les tours.

Exercice 12

Indice 1. Calcule les carrés des écarts à la moyenne.

Indice 2. Compare chaque fréquence aux deux bornes.

Exercice 13

Indice 1. La mise est payée dans tous les cas.

Indice 2. Retranche 3 à chaque montant reçu.

Exercice 14

Indice 1. La mise est retranchée même lorsque l'on gagne.

Indice 2. L'espérance nette est la recette moyenne moins 2.

Exercice 15

Indice 1. Regarde la longueur du morceau d'intervalle accepté.

Indice 2. La zone au-dessus de 0,3 a une longueur 0,7.

Exercice 16

Indice 1. Il est plus simple de compter zéro succès.

Indice 2. Un échec a pour probabilité 0,8.

Exercice 17

Indice 1. Calcule la fréquence après l'ajout d'un succès.

Indice 2. La stabilisation est une tendance à grande taille, pas une décroissance systématique de l'erreur.

Exercice 18

Indice 1. La dispersion dépend de la taille d'un échantillon.

Indice 2. Le nombre d'échantillons sert à observer le phénomène.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les trois valeurs annoncées forment toute la loi ; leurs probabilités doivent totaliser 1.

Construire la réponse.

1. On écrit $0,2 + p + 0,5 = 1$.
2. Les probabilités connues totalisent 0,7, donc $p = 1 - 0,7 = 0,3$.

Vérifier. Le résultat est positif et $0,2 + 0,3 + 0,5 = 1$. Les deux conditions d'une loi finie sont donc respectées.

Conclure. $p = 0,3$.

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On calcule une moyenne pondérée des deux valeurs possibles.

Construire la réponse.

1. La contribution de la valeur zéro est $0 \times 0,7 = 0$.
2. La contribution de 10 est $10 \times 0,3 = 3$.
3. L'espérance vaut donc $E(X) = 0 + 3 = 3$.

Vérifier. Le résultat est entre 0 et 10, les deux valeurs extrêmes. Il n'est pas lui-même une valeur possible de X , ce qui n'empêche pas d'être une moyenne.

Conclure. $E(X) = 3$. Une expérience donne 0 ou 10, pas nécessairement 3.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le succès est pile et la pièce est équilibrée.

Construire la réponse.

1. On a $P(X = 1) = P(\text{pile}) = 1/2$.
2. Face correspond à l'échec, donc $P(X = 0) = 1/2$.
3. L'espérance est $E(X) = 1 \times (1/2) + 0 \times (1/2) = 1/2$.

Vérifier. Les probabilités totalisent 1. La moyenne théorique 0,5 n'est pas une réalisation possible : chaque lancer reste codé par 0 ou 1.

Conclure. X suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et son espérance vaut $1/2$.

Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Deux succès correspondent au seul chemin SS .

Construire la réponse.

1. La probabilité du premier succès est 0,6.
2. Par indépendance et identité des essais, celle du second reste 0,6 après le premier.
3. Le produit donne $P(SS) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$.

Vérifier. Le résultat est inférieur à 0,6 : demander deux succès impose une condition plus restrictive que demander seulement le premier.

Conclure. La probabilité de deux succès est 0,36.

Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La fréquence est le nombre de six observés divisé par le nombre total de lancers.

Construire la réponse.

1. On calcule $f = 87/500 = 0,174$.
2. En pourcentage, cela donne $100 \times 0,174 = 17,4$ pour cent.
3. La probabilité théorique du six dans le modèle équilibré reste $1/6 \approx 0,1667$.

Vérifier. La fréquence se situe dans $[0; 1]$ et $500 \times 0,174 = 87$ retrouve le compteur. L'écart à la probabilité vaut environ 0,00733, soit 0,733 point de pourcentage.

Conclure. La fréquence observée est 0,174, soit 17,4 pour cent ; ce résultat est une observation simulée.

Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le centre est p égal à 0,3 ; seul le rayon change entre k égal à 1 et k égal à 2.

Construire la réponse.

1. Pour $k = 1$, le rayon vaut $1 \times 0,04 = 0,04$. Les bornes sont $0,3 - 0,04 = 0,26$ et $0,3 + 0,04 = 0,34$.
2. Pour $k = 2$, le rayon vaut $2 \times 0,04 = 0,08$. Les bornes deviennent 0,22 et 0,38.

Vérifier. Les milieux des deux intervalles valent 0,3. Leurs largeurs sont 0,08 et 0,16 : le rayon et la largeur ont tous deux doublé.

Conclure. Les intervalles sont $[0,26; 0,34]$ et $[0,22; 0,38]$.

Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On sélectionne les valeurs de X qui satisfont chaque inégalité.

Construire la réponse.

1. Les valeurs inférieures ou égales à zéro sont -2 et 0. Leurs probabilités s'additionnent : $P(X \leq 0) = 0,4 + 0,3 = 0,7$.
2. La seule valeur strictement positive est 5, donc $P(X > 0) = 0,3$.

Vérifier. Ces deux événements sont contraires et leurs probabilités totalisent $0,7 + 0,3 = 1$. Inclure zéro dans le second événement serait incompatible avec le signe strict.

Conclure. $P(X \leq 0) = 0,7$ et $P(X > 0) = 0,3$.

Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. L'équité se juge sur l'espérance du gain net.

Construire la réponse.

1. La probabilité de la perte est $1 - 1/4 = 3/4$.
2. L'espérance vaut $6 \times (1/4) + (-2) \times (3/4) = 1,5 - 1,5 = 0$.

Vérifier. Sur quatre parties présentant exactement un gain et trois pertes, le bilan serait $6 - 2 - 2 - 2 = 0$. Une vraie série de quatre parties n'a pas forcément cette composition.

Conclure. Le jeu est équitable au sens de l'espérance, sans garantie d'un bilan nul sur une courte série.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le paramètre doit correspondre au succès choisi, qui est ici le défaut.

Construire la réponse.

1. La conformité a la probabilité 0,97.
2. Le défaut est son contraire : $p = 1 - 0,97 = 0,03$.

Vérifier. Les probabilités 0,97 et 0,03 se complètent pour donner 1. Utiliser 0,97 coderait la conformité comme succès, contrairement à la définition donnée.

Conclure. Le paramètre est $p = 0,03$.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Il faut exactement deux succès parmi trois essais, donc un seul échec.

Construire la réponse.

1. L'échec peut se trouver en troisième, deuxième ou première position : SSE, SES ou ESS.
2. Chaque chemin vaut $(1/2)^3 = 1/8$ puisque les trois essais sont indépendants et équilibrés.
3. Les trois chemins sont disjoints ; leur probabilité totale vaut $3 \times 1/8 = 3/8$.

Vérifier. Il existe $2^3 = 8$ chemins équiprobables et trois sont favorables. SSS est exclu car il contient trois succès, pas exactement deux.

Conclure. La probabilité est $3/8$.

Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Une initialisation à chaque passage empêche le compteur de conserver l'historique.

Construire la réponse.

1. Au début d'un tour, l'instruction qui remet le compteur à zéro efface tous les succès des tours précédents.
2. Après le test de ce tour, le compteur vaut seulement zéro ou un selon son résultat.
3. À la fin, il ne décrit donc que le dernier essai, pas le total des essais.
4. La correction consiste à placer l'initialisation avant la boucle et à conserver seulement l'incrément conditionnel à l'intérieur.

Vérifier. Sur trois essais tous réussis, le programme erroné terminerait à 1 ; le compteur correct passerait successivement de 0 à 1, puis 2, puis 3.

Conclure. Il faut initialiser une seule fois avant les répétitions pour accumuler les succès.

Corrigé 12

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On calcule s à partir des quatre fréquences avant de construire l'intervalle centré sur p .

Construire la réponse.

1. La moyenne est $(0,4 + 0,5 + 0,5 + 0,6)/4 = 2/4 = 0,5$.
2. Les écarts à cette moyenne sont $-0,1$; 0 ; 0 ; $0,1$. Leurs carrés totalisent $0,01 + 0 + 0 + 0,01 = 0,02$.
3. La variance descriptive est $0,02/4 = 0,005$; donc $s = \sqrt{0,005} \approx 0,07071$.
4. L'intervalle $[p - s ; p + s]$ est environ $[0,42929 ; 0,57071]$. Les deux valeurs $0,5$ y appartiennent, contrairement à $0,4$ et $0,6$.
5. La proportion observée est donc $2/4 = 0,5$, soit 50 pour cent.

Vérifier. L'étendue de la série vaut $0,2$, bien différente de l'écart-type $0,07071$. Le comptage obtenu vient de cette série de quatre valeurs ; il n'impose pas une proportion universelle.

Conclure. $s \approx 0,07071$ et deux fréquences sur quatre, soit 50 pour cent, sont dans l'intervalle demandé.

Corrigé 13

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le ticket est payé dans tous les cas ; le gain net soustrait donc 3 euros à chaque recette possible.

Construire la réponse.

1. Si le ticket rapporte 10 euros, le bilan net est $10 - 3 = 7$ euros. Ce cas a la probabilité 0,2.
2. Sinon, la recette est zéro et le bilan net vaut $0 - 3 = -3$ euros. Sa probabilité est $1 - 0,2 = 0,8$.

Vérifier. Les probabilités 0,2 et 0,8 totalisent 1. La loi avec les valeurs 10 et 0 décrirait les recettes, pas le gain net demandé.

Conclure. $P(X = 7) = 0,2$ et $P(X = -3) = 0,8$, avec X exprimé en euros.

Corrigé 14

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On cherche une récompense brute R qui compense en moyenne le coût de 2 euros par partie.

Construire la réponse.

1. En cas de succès, le gain net est $R - 2$ avec probabilité 0,1.
2. En cas d'échec, il vaut -2 avec probabilité 0,9.
3. L'espérance est $0,1(R - 2) + 0,9(-2) = 0,1R - 0,2 - 1,8 = 0,1R - 2$.
4. Imposer zéro donne $0,1R = 2$, donc $R = 20$.

Vérifier. Avec R égal à 20, le gain net gagnant vaut 18 et $0,1 \times 18 + 0,9 \times (-2) = 1,8 - 1,8 = 0$. La récompense brute 20 ne doit pas être confondue avec le gain net 18.

Conclure. La récompense doit être de 20 euros pour rendre l'espérance nette nulle.

Corrigé 15

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le test proposé sélectionne les valeurs de l'uniforme supérieures à 0,3.

Construire la réponse.

1. La portion située au-dessus de 0,3 a pour longueur $1 - 0,3 = 0,7$.
2. Le code renvoie donc 1 avec une probabilité de 0,7 au lieu de 0,3.
3. Pour obtenir le paramètre voulu, il faut tester `random() < 0.3`. La zone de succès a alors une longueur 0,3.

Vérifier. Un nombre simulé comme 0,2 doit donner un succès et un nombre comme 0,8 un échec avec cette convention. Le test corrigé respecte ces deux exemples.

Conclure. Il faut inverser le sens du test : le succès correspond à un uniforme inférieur à 0,3.

Corrigé 16

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le contraire d'au moins un succès est l'absence de succès sur les quatre essais.

Construire la réponse.

1. La probabilité d'un échec vaut $1 - 0,2 = 0,8$.
2. Par indépendance, quatre échecs ont la probabilité $0,8^4 = 0,4096$.
3. La probabilité cherchée vaut $1 - 0,4096 = 0,5904$.

Vérifier. Ajouter quatre fois 0,2 compterait plusieurs fois une même série ayant deux ou plusieurs succès. Le complément utilise au contraire un seul chemin et évite ce chevauchement.

Conclure. La probabilité d'au moins un succès est 0,5904.

Corrigé 17

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La stabilisation à long terme n'impose pas une amélioration monotone de la fréquence.

Construire la réponse.

1. Après 100 essais, une fréquence 0,50 correspond à 50 succès.
2. Si le 101e essai réussit, le compteur devient 51 et la fréquence vaut $51/101 \approx 0,50495$.
3. Cette nouvelle fréquence est un peu plus éloignée de 0,5, mais elle résulte simplement de l'ajout d'un succès.

Vérifier. Si le nouvel essai avait échoué, on aurait obtenu $50/101 \approx 0,49505$, également éloigné de 0,5. À un nombre impair d'essais, obtenir exactement la moitié de succès est impossible.

Conclure. Le modèle n'est pas contredit par cet éloignement ponctuel ; la fréquence peut osciller autour de la probabilité.

Corrigé 18

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On doit agir sur la taille des échantillons, pas seulement sur leur nombre.

Construire la réponse.

1. À n égal à 100, le facteur de dispersion est proportionnel à $1/\sqrt{100} = 1/10$.
2. À n égal à 400, il devient $1/\sqrt{400} = 1/20$, soit la moitié.
3. Passer N de 1 000 à 4 000 fournirait davantage de fréquences de taille 100, sans modifier la fluctuation propre à chacune.

Vérifier. La relation $\sqrt{400} = 2\sqrt{100}$ explique le facteur deux. La comparaison suppose le même p et le même protocole de tirages indépendants.

Conclure. Il faut porter n à 400 pour viser une dispersion divisée par deux.

9 Corrigé du problème

1. **Comprendre la question.** Le gain net retrace la mise au gain annoncé par la roue.

Construire la réponse.

- (a) Un secteur perdant rapporte 0 mais coûte 1 : le gain net est -1 avec probabilité $3/4$.
- (b) Le secteur gagnant rapporte 8 et coûte 1 : le gain net est 7 avec probabilité $1/4$.
- (c) La somme des probabilités vaut $3/4 + 1/4 = 1$.

Vérifier. La roue possède quatre secteurs équiprobables ; trois conduisent au même gain net, ce qui justifie leur regroupement.

Conclure. La loi est $P(X = -1) = 3/4$ et $P(X = 7) = 1/4$.

2. **Comprendre la question.** L'espérance est une moyenne pondérée des gains nets.

Construire la réponse.

- (a) On multiplie chaque gain par sa probabilité : $E(X) = (-1)(3/4) + 7(1/4)$.
- (b) La somme vaut $-3/4 + 7/4 = 4/4 = 1$ point.
- (c) Sur beaucoup de parties indépendantes, la moyenne observée peut se rapprocher de 1 point par partie. Une partie isolée ne donne pourtant jamais exactement 1.

Vérifier. Le gain brut moyen est $8 \times 1/4 = 2$; retirer la mise 1 donne aussi 1.

Conclure. Le gain net moyen théorique est 1 point par partie, sans garantie pour une partie ou une courte série.

3. **Comprendre la question.** Les parties indépendantes permettent de multiplier les probabilités le long d'un chemin.

Construire la réponse.

- (a) Notons S un secteur gagnant et E un secteur perdant. Exactement deux succès correspond aux chemins SSE, SES et ESS.
- (b) Chaque chemin a probabilité $(1/4)^2(3/4) = 3/64$; les trois chemins donnent $9/64$.
- (c) « Au moins un succès » est le contraire de trois échecs. Sa probabilité vaut $1 - (3/4)^3 = 1 - 27/64 = 37/64$.

Vérifier. Les chemins du premier événement sont incompatibles, donc leurs probabilités s'additionnent. Le complément du second évite d'énumérer un, deux et trois succès.

Conclure. Les probabilités sont $9/64$ pour exactement deux succès et $37/64$ pour au moins un.

4. **Comprendre la question.** Il faut distinguer une partie, une série de n parties et N répétitions de cette série.

Construire la réponse.

(a)

```
1 from random import random
2
3 def frequences(N, n):
4     resultats = []
5     for _ in range(N):
6         succes = 0
7         for _ in range(n):
8             if random() < 0.25:
9                 succes += 1
10        resultats.append(succes / n)
11    return resultats
```

- (b) On suppose N et n entiers strictement positifs. Le compteur est remis à zéro au début de chaque série.

- (c) Un tirage uniforme inférieur à 0,25 représente un secteur gagnant. Après n parties, le compteur divisé par n donne une seule fréquence.
- (d) La liste finale contient N fréquences, produites à partir de N fois n parties simulées.

Vérifier. Chaque fréquence est comprise entre 0 et 1. Si le compteur n'était pas réinitialisé, les séries se mélangeraient et certaines valeurs pourraient dépasser 1.

Conclure. La boucle extérieure produit les N séries, la boucle intérieure les n parties de chacune.

5. **Comprendre la question.** L'intervalle est construit autour de la probabilité, avec deux écarts-types de chaque côté.

Construire la réponse.

- (a) $p - 2s = 0,25 - 0,08 = 0,17$ et $p + 2s = 0,25 + 0,08 = 0,33$.
- (b) Le comptage indique $940/1000 = 0,94$, soit 94 % des fréquences simulées dans cet intervalle.
- (c) Ce pourcentage décrit la simulation réalisée. Il ne garantit pas que toute simulation future donnera exactement le même résultat.
- (d) Pour des séries indépendantes de taille n à probabilité fixe, la dispersion théorique des fréquences est $\sqrt{p(1-p)/n}$: multiplier n par quatre la divise par deux.

Vérifier. Le nombre N de séries sert à observer la dispersion ; c'est la taille n de chaque série qui détermine principalement la dispersion de sa fréquence.

Conclure. L'intervalle est $[0,17; 0,33]$ et la proportion observée est 94 %, avec fluctuation d'un tirage à l'autre.

10 Variante autonome et bilan

Une roue donne 0 point avec probabilité 0,8 et 10 points avec probabilité 0,2, pour une mise de 3 points. Calcule le gain net moyen et la probabilité d'au moins un succès en deux parties indépendantes.

À toi d'essayer : Vérifie ta démarche

Résous la variante, puis explique pourquoi ta méthode s'applique.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 29 Explication, p. 31

- Je peux expliquer : associer un nombre au hasard.
- Je peux expliquer : l'espérance : une moyenne à long terme.
- Je peux expliquer : coder succès et échec.
- Je peux expliquer : répéter jusqu'à quatre épreuves indépendantes.
- Je peux expliquer : simuler et estimer une probabilité.
- Je peux expliquer : mesurer la dispersion de fréquences simulées.

11 Fiche-mémoire

Associer un nombre au hasard.

1. Définis X avec son unité, en distinguant recette et gain net.
2. Liste ses valeurs possibles, sans répéter une valeur obtenue par plusieurs issues.
3. Associe à chaque valeur la somme des probabilités des issues correspondantes.
4. Vérifie que les probabilités sont admissibles et totalisent 1.
5. Pour une condition sur X , sélectionne les valeurs concernées avant d'additionner.

L'espérance : une moyenne à long terme.

1. Construis la loi de la quantité demandée, en soustrayant la mise si nécessaire.
2. Multiplie chaque valeur par sa probabilité en conservant les signes.
3. Additionne tous les produits et indique l'unité.
4. Pour une valeur inconnue, impose l'espérance souhaitée et résous l'équation.
5. Interprète le résultat comme une moyenne théorique, puis vérifie la cohérence de la loi et du calcul.

Coder succès et échec.

1. Définis explicitement le succès et l'échec.
2. Associe la valeur 1 au succès et 0 à l'échec.
3. Identifie p puis complète avec $1 - p$.
4. Calcule l'espérance comme moyenne pondérée, ou utilise $E(X) = p$.
5. Pour une simulation, vérifie que la zone où le code renvoie 1 a bien une probabilité p .

Répéter jusqu'à quatre épreuves indépendantes.

1. Vérifie le nombre d'essais, leur indépendance et la constance de p .
2. Liste les chemins acceptés en distinguant « exactement » et « au moins ».
3. Multiplie les probabilités le long de chaque chemin.
4. Additionne les chemins disjoints ou calcule le contraire s'il est plus simple.
5. Contrôle avec l'arbre complet lorsque le nombre d'essais est petit.

Simuler et estimer une probabilité.

1. Décrit le modèle, l'événement recherché et la méthode de tirage simulé.
2. Initialise le compteur avant la boucle et fixe un nombre entier positif d'essais.

3. Produis une nouvelle issue à chaque essai et incrémente seulement en cas de succès.
4. Divise le total des succès par le nombre d'essais après la boucle.
5. Compare la fréquence à la théorie et répète la simulation pour observer la fluctuation.

Mesurer la dispersion de fréquences simulées.

1. Calcule une fréquence par échantillon, puis la moyenne et l'écart-type de ces N fréquences.
2. Identifie p , s et le multiplicateur k sans confondre n et N .
3. Calcule le rayon ks , puis les bornes $p - ks$ et $p + ks$.
4. Compte les fréquences comprises entre les bornes incluses et divise par N .
5. Présente la proportion comme observée et précise quel changement de taille est étudié.

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Chaque issue produit une et une seule valeur de X .

Indice 2 — Un pas de plus.

La liste complète des valeurs couvre donc tous les résultats.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

L'espérance est une moyenne pondérée, pas une issue imposée.

Indice 2 — Un pas de plus.

Elle décrit le bilan moyen théorique par répétition.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Le codage indicateur attribue un à l'événement choisi.

Indice 2 — Un pas de plus.

Toutes les autres issues sont codées par zéro.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Chaque essai double le nombre de prolongements possibles.

Indice 2 — Un pas de plus.

Pour trois essais, multiplie trois fois par deux.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve**Indice 1 — Une piste.**

La fréquence est le rapport succès sur nombre d'essais.

Indice 2 — Un pas de plus.

Utilise $46/200$ et non $46/100$.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Pause 6 — Mets la notion à l'épreuve**Indice 1 — Une piste.**

Le rayon se mesure du centre p à une seule borne.

Indice 2 — Un pas de plus.

La borne supérieure est obtenue en ajoutant $2s$ au centre.

[Revenir à la recherche, p. 11](#)

Vérifie ta démarche**Indice 1 — Une piste.**

Repère les données utiles et l'inconnue. Reviens à la méthode correspondante dans la boîte à outils.

Indice 2 — Un pas de plus.

Contrôle les unités, les bornes et la plausibilité du résultat avant de lire la correction.

[Revenir à la recherche, p. 26](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Les probabilités de la loi complète totalisent 1.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Une espérance de 2 euros signifie un gain moyen prévu de 2 euros par partie selon le modèle, sans gain certain à chaque partie.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Une variable de Bernoulli prend les valeurs 0 et 1.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Il y a $2^3 = 8$ chemins. Ils ne sont tous équiprobables que si $p = 1/2$.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

$46/200 = 0,23$, soit 23 pour cent.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Pause 6 — Mets la notion à l'épreuve

Le rayon vaut $2s$; la largeur totale vaut $4s$.

[Revenir à la recherche, p. 11](#)

Vérifie ta démarche

Comprendre la question. On retranche d'abord la mise, puis on traite l'événement sur deux parties par complément.

Construire la réponse.

1. Les gains nets sont $0 - 3 = -3$ avec probabilité 0,8 et $10 - 3 = 7$ avec probabilité 0,2.
2. L'espérance vaut $(-3) \times 0,8 + 7 \times 0,2 = -2,4 + 1,4 = -1$ point.
3. Sur deux parties indépendantes, aucun succès a probabilité $0,8^2 = 0,64$.
4. Au moins un succès a donc probabilité $1 - 0,64 = 0,36$.

Vérifier. Le gain brut moyen est $10 \times 0,2 = 2$; après une mise de 3, on retrouve une perte moyenne de 1 point.

Conclure. Le gain net moyen est -1 point par partie et la probabilité d'au moins un succès en deux parties est 36 %.

[Revenir à la recherche, p. 26](#)