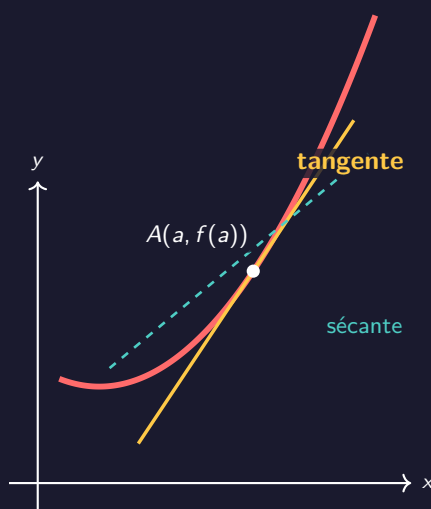


FICHE 03

La dérivation

Nombre dérivé & tangente ■ Fonction dérivée ■ Opérations



Première ■ Spécialité Mathématiques ■ Programme officiel

 Cours complet

 15 exercices

 Problème prépa

 Corrigés

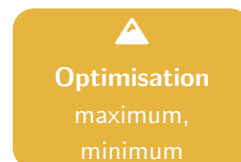
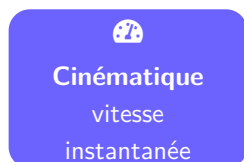
Table des matières

1	🔍 Pourquoi étudier la dérivation ?	3
1.1	Le problème fondamental	3
1.2	L'idée directrice	3
2	🧠 L'idée avant la formule	4
2.1	Vitesse moyenne, vitesse instantanée	4
2.2	Zoomer sur une courbe	4
2.3	De la sécante à la tangente	4
3	📖 Le cours complet	5
3.1	Taux de variation et sécante	5
3.2	Nombre dérivé	6
3.3	La tangente	6
3.4	Calculs à partir de la définition	7
3.5	Fonction dérivée et dérivées usuelles	8
3.6	Opérations sur les fonctions dérivables	8
3.7	Dérivée de x^n et fonction valeur absolue	9
4	🚀 Pour aller plus loin : l'approximation affine	11
5	🧰 Boîte à outils : réflexes pour le bac	13
6	✎ Exercices	15
7	🚀 Problème : Les tangentes à la parabole ★★	18
8	✔ Corrigés détaillés	19
9	📖 Fiche-mémoire	24

1 ? Pourquoi étudier la dérivation ?

1.1 Le problème fondamental

Comment mesurer une **vitesse à un instant précis** ? Un compteur de voiture affiche 90 km/h « maintenant », mais la vitesse est une distance divisée par un temps : sur quel temps, si l'instant n'a pas de durée ? Comment mesurer la **pente d'une courbe** en un point, alors qu'une pente se calcule entre **deux** points ? Ces deux questions, l'une physique, l'autre géométrique, ont la même réponse : la **dérivation**.



Cinématique. La vitesse instantanée est la limite de la vitesse moyenne sur un intervalle de temps de plus en plus court : c'est un **nombre dérivé**.

Géométrie. La **tangente** en un point est la position limite des sécantes ; sa pente est le nombre dérivé. Tout le chapitre relie ces deux visions.

Économie. Le **coût marginal** (coût de produire un objet de plus) est, en bonne approximation, la dérivée de la fonction coût.

Optimisation. Là où une fonction atteint un maximum ou un minimum, sa tangente est **horizontale** : le nombre dérivé s'annule. C'est l'outil clé de la fiche suivante (variations).

1.2 L'idée directrice

L'idée directrice :

Le **nombre dérivé** $f'(a)$ mesure la **vitesse de variation** de f au point a . On l'obtient en calculant la pente d'une **sécante** entre a et un point très proche, puis en « faisant tendre » ce point vers a : la sécante devient **tangente**. À partir des nombres dérivés en tous points, on construit la **fonction dérivée** f' , qui se calcule avec quelques formules et règles d'opérations.

Intuition | Pourquoi c'est un chapitre clé

La dérivation est l'outil central de toute l'analyse au lycée. Elle permet d'étudier les **variations** d'une fonction (fiche suivante), de tracer des courbes, de résoudre des problèmes d'**optimisation**, et elle est au cœur de la définition de la **fonction exponentielle**. C'est un investissement qui rapporte pendant deux ans.

2 L'idée avant la formule

2.1 Vitesse moyenne, vitesse instantanée

Intuition | Le radar et le compteur 🚗

Une voiture parcourt 100 km en 1 heure : sa vitesse **moyenne** est 100 km/h. Mais à un instant donné, le compteur peut indiquer 130 ou 0. La vitesse moyenne entre deux instants est une distance divisée par une durée, c'est-à-dire un **taux de variation**. Pour obtenir la vitesse **à un instant précis**, on calcule cette moyenne sur un intervalle de temps de plus en plus court (1 s, puis 0,1 s, puis 0,01 s...). La valeur vers laquelle on se stabilise est la **vitesse instantanée** : c'est exactement le **nombre dérivé**.

2.2 Zoomer sur une courbe

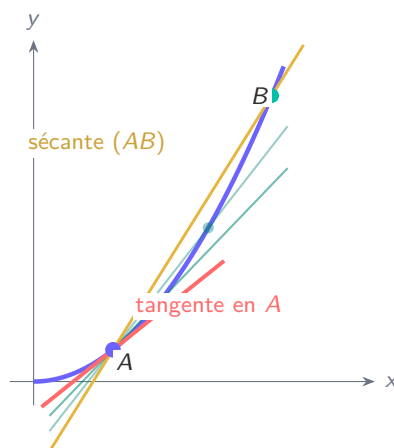
Intuition | Une courbe ressemble à une droite quand on zoome 🔍

Prends une courbe lisse et zoome de plus en plus près d'un de ses points : elle devient de plus en plus **droite**. Cette droite limite, c'est la **tangente**. La pente de cette tangente est le nombre dérivé $f'(a)$. Autrement dit, **très près de a** , la fonction se comporte comme sa tangente :

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \times h \quad \text{pour } h \text{ petit.}$$

C'est l'**approximation affine** : remplacer localement une courbe compliquée par une simple droite.

2.3 De la sécante à la tangente



Animation en **lecture automatique** dans **Adobe Acrobat Reader** (gratuit). Dans un autre lecteur, l'image fixe ci-dessus reste valable ; le même contenu est aussi fourni en GIF dans le dossier *Première/Animations*.

🔧 Méthode | Deux écritures, une même idée

Dans la figure statique ci-dessus, on peut décrire le rapprochement de deux façons :

— $x \rightarrow a$: le point $B(x; f(x))$ glisse vers $A(a; f(a))$ et la pente de la sécante vaut $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$;

— $h \rightarrow 0$: on écrit $x = a + h$, donc $B(a + h; f(a + h))$, et la même pente devient $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

Dans les deux cas, la sécante pivote vers la tangente et son coefficient directeur se rapproche de $f'(a)$. La seconde écriture est souvent la plus commode pour calculer.

Quand le point B se rapproche de A en glissant sur la courbe, la **sécante** (AB) pivote autour de A et tend vers une position limite : la **tangente** en A . Les pentes des sécantes (les taux de variation) tendent alors vers la pente de la tangente, le nombre dérivé.

3 Le cours complet

3.1 Taux de variation et sécante

Définition | Taux de variation

Soit f une fonction et a, b deux réels distincts de son ensemble de définition. Le **taux de variation** (ou taux d'accroissement) de f entre a et b est le nombre

$$\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

C'est la **pente de la sécante** qui joint les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ de la courbe.

Méthode | La notation avec h

On pose souvent $b = a + h$, où h est un petit « pas » non nul. Le taux de variation s'écrit alors

$$\tau(h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Faire « tendre b vers a » revient à faire « tendre h vers 0 ». C'est cette forme qu'on utilise pour dériver.

Exemple | Calculer un taux de variation

Soit $f(x) = x^2$. Le taux entre $a = 2$ et $b = 5$ vaut $\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{25 - 4}{3} = 7$. Avec la notation h en $a = 2$: $\frac{(2 + h)^2 - 4}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h$.

3.2 Nombre dérivé

Définition | Nombre dérivé

On dit que f est **dérivable en** a lorsque le taux de variation $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ se rapproche d'un nombre fini lorsque h tend vers 0. Ce nombre est appelé **nombre dérivé** de f en a et se note $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

(En Première, cette limite est comprise de façon **intuitive** : on simplifie le taux jusqu'à pouvoir remplacer h par 0.)

Exemple | Nombre dérivé à partir de la définition

Pour $f(x) = x^2$ en $a = 2$: on a vu $\tau(h) = 4 + h$. Quand $h \rightarrow 0$, $4 + h \rightarrow 4$. Donc $f'(2) = 4$. La pente de la tangente à la parabole au point d'abscisse 2 vaut 4.

3.3 La tangente

Théorème | Équation de la tangente

Si f est dérivable en a , la courbe de f admet au point $A(a; f(a))$ une **tangente** de pente $f'(a)$, dont l'équation est

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Démonstration | Équation de la tangente (exigible)

La tangente est la droite passant par $A(a; f(a))$ et de pente (coefficient directeur) $m = f'(a)$. Une droite de pente m passant par $A(a; f(a))$ a pour équation $y - f(a) = m(x - a)$, soit $y = f(a) + m(x - a)$. En remplaçant m par $f'(a)$:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

■

Méthode | Déterminer une équation de tangente

1. Calculer $f(a)$ (l'ordonnée du point de contact).
2. Calculer $f'(x)$, puis $f'(a)$ (la pente).
3. Remplacer dans $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ et développer.

Exemple | Tangente

Soit $f(x) = x^2$ et $a = 2$. On a $f(2) = 4$ et $f'(2) = 4$. La tangente est $y = 4 + 4(x - 2) = 4x - 4$.

⚠ Attention | Lecture graphique d'un nombre dérivé

Pour lire $f'(a)$ sur un graphique : trace la tangente au point d'abscisse a , puis calcule sa pente (« on avance de 1, on monte de combien ? »). Une tangente **horizontale** signifie $f'(a) = 0$.

3.4 Calculs à partir de la définition

★ Théorème | Dérivées de la fonction carré et de la fonction inverse

- Pour $f(x) = x^2$: f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$.
- Pour $f(x) = \frac{1}{x}$: f est dérivable sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$, et $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

✎ Démonstration | Dérivée de la fonction carré (exigible)

Pour $f(x) = x^2$, le taux en a vaut

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h.$$

Quand $h \rightarrow 0$, $2a + h \rightarrow 2a$. Donc $f'(a) = 2a$ pour tout a , c'est-à-dire $f'(x) = 2x$. ■

✎ Démonstration | Dérivée de la fonction inverse (exigible)

Pour $f(x) = \frac{1}{x}$ (avec $a \neq 0$), le taux en a vaut

$$\frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{a - (a+h)}{a(a+h)} = \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{a(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)}.$$

Quand $h \rightarrow 0$, $a+h \rightarrow a$, donc le taux tend vers $\frac{-1}{a \cdot a} = -\frac{1}{a^2}$. Donc $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. ■

★ Théorème | La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ avec $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, mais elle **n'est pas dérivable en 0** : sa courbe y admet une **tangente verticale**.

✎ Démonstration | Non-dérivabilité de $\sqrt{x}$ en 0 (exigible)

Le taux de variation de $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 0$ vaut

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \quad (h > 0).$$

Quand $h \rightarrow 0$ (avec $h > 0$), $\sqrt{h} \rightarrow 0$, donc $\frac{1}{\sqrt{h}}$ devient **aussi grand qu'on veut** : le taux ne tend

vers aucun nombre fini. La fonction n'est donc **pas dérivable en 0** ; graphiquement, la tangente y est verticale. ■

3.5 Fonction dérivée et dérivées usuelles

📖 Définition | Fonction dérivée

Si f est dérivable en tout point d'un intervalle I , on dit que f est **dérivable sur I** . La fonction qui à chaque x associe le nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle la **fonction dérivée** de f , notée f' .

★ Théorème | Dérivées des fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Sur
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{Z}$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

3.6 Opérations sur les fonctions dérivables

★ Théorème | Règles de dérivation

Soient u et v deux fonctions dérivables et k un réel. Alors :

Fonction	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
ku	ku'
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{v}$ (avec $v \neq 0$)	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$ (avec $v \neq 0$)	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$x \mapsto g(ax + b)$	$x \mapsto ag'(ax + b)$

 Démonstration | Dérivée d'un produit (exigible)

Soit $p = uv$. Le taux de variation de p en a s'écrit, en ajoutant et retranchant le terme « croisé » $u(a+h)v(a)$:

$$\begin{aligned}\frac{p(a+h) - p(a)}{h} &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a+h)v(a)}{h} + \frac{u(a+h)v(a) - u(a)v(a)}{h}.\end{aligned}$$

On factorise chaque morceau :

$$= u(a+h) \cdot \frac{v(a+h) - v(a)}{h} + v(a) \cdot \frac{u(a+h) - u(a)}{h}.$$

Quand $h \rightarrow 0$: $u(a+h) \rightarrow u(a)$, le premier taux tend vers $v'(a)$, le second vers $u'(a)$. On obtient $p'(a) = u(a)v'(a) + v(a)u'(a)$, c'est-à-dire $(uv)' = u'v + uv'$. ■

 Méthode | Bien choisir sa règle

- Une **somme** ou un multiple : on dérive terme à terme.
- Un **produit** de deux expressions en x : règle $u'v + uv'$ (ne jamais « dériver chaque facteur séparément »).
- Un **quotient** : règle $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ (attention à l'ordre $u'v - uv'$, le moins compte!).
- Une expression du type $g(ax + b)$ (par exemple $(3x - 1)^2$, $\sqrt{2x + 1}$) : on multiplie par a .

 Exemple | Opérations

- (1) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$: $f'(x) = 6x - 5$.
- (2) $g(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$: avec $u = 2x + 1$, $v = x^2 - 3$, $u' = 2$, $v' = 2x$: $g'(x) = 2(x^2 - 3) + (2x + 1)(2x) = 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x = 6x^2 + 2x - 6$.
- (3) $h(x) = \frac{x}{x+1}$: $u = x$, $v = x + 1$, $u' = 1$, $v' = 1$: $h'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$.
- (4) $k(x) = (3x - 1)^2$: forme $g(ax + b)$ avec $g(t) = t^2$, $a = 3$: $k'(x) = 3 \cdot 2(3x - 1) = 6(3x - 1)$.

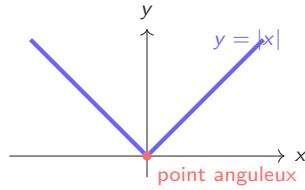
3.7 Dérivée de x^n et fonction valeur absolue

 Propriété | Dérivée de x^n pour n entier relatif

Pour tout entier relatif n (avec $x \neq 0$ si $n \leq 0$), la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable et $(x^n)' = nx^{n-1}$.
Par exemple $(x^4)' = 4x^3$ et $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$.

✓ Propriété | La fonction valeur absolue

La fonction $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais **n'est pas dérivable en 0** : sa courbe présente un « point anguleux » à l'origine (la pente vaut -1 à gauche, $+1$ à droite). Sur $]0; +\infty[$, $f(x) = x$ donc $f'(x) = 1$; sur $] -\infty; 0[$, $f(x) = -x$ donc $f'(x) = -1$.



4 🦋 Pour aller plus loin : l'approximation affine

🧠 Intuition | Une courbe ressemble à sa tangente quand on regarde de très près

Si h est petit, le point d'abscisse $a + h$ est proche du point d'abscisse a . La courbe est alors presque confondue avec sa tangente, ce qui conduit à

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h.$$

Cette formule ne remplace pas une égalité : elle donne une **approximation locale** dont la qualité dépend de la petitesse de h .

✍ Démonstration | Le cas de la fonction carré : voir exactement l'erreur

Pour $f(x) = x^2$, on a $f'(a) = 2a$. Or

$$f(a + h) = (a + h)^2 = a^2 + 2ah + h^2.$$

La tangente prédit $f(a) + f'(a)h = a^2 + 2ah$. La différence exacte est donc

$$f(a + h) - (f(a) + f'(a)h) = h^2.$$

Quand h est divisé par 10, l'erreur h^2 est divisée par 100 : voilà pourquoi l'approximation devient très vite excellente. ■

💡 Exemple | Calcul mental d'une racine carrée

Prenons $f(x) = \sqrt{x}$ au voisinage de $a = 25$. Comme $f(25) = 5$ et $f'(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10}$,

$$\sqrt{25 + h} \approx 5 + \frac{h}{10}.$$

Avec $h = 0,2$,

$$\sqrt{25,2} \approx 5,02.$$

La calculatrice donne environ 5,01996 : l'erreur est inférieure à 0,0001.

🔧 Méthode | Mode d'emploi

Pour approcher $f(x)$ près d'un nombre simple a :

1. écris $x = a + h$ avec $h = x - a$ petit ;
2. calcule $f(a)$ et $f'(a)$;
3. utilise $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$;
4. annonce qu'il s'agit d'une valeur **approchée**, pas d'une égalité.

★ Théorème | Une propriété remarquable de la parabole

La courbe de $f(x) = x^2$ est au-dessus de chacune de ses tangentes. Plus précisément, la tangente au point d'abscisse a a pour équation $T_a(x) = 2ax - a^2$ et

$$f(x) - T_a(x) = (x - a)^2 \geq 0.$$

 Démonstration / Démonstration

On calcule directement

$$x^2 - (2ax - a^2) = x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2 \geq 0.$$

L'égalité a lieu seulement pour $x = a$: la tangente touche la parabole en ce point et reste en dessous partout ailleurs. ■

5 Boîte à outils : réflexes pour le bac

Méthode | Les réflexes essentiels

1. **Nombre dérivé** = **pende de la tangente** = vitesse de variation en un point.
2. **Tangente** : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Toujours $f(a)$ puis $f'(a)$.
3. **Produit** : $(uv)' = u'v + uv'$ (jamais $u'v'$!).
4. **Quotient** : $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ (attention au signe et à l'ordre).
5. **Forme** $g(ax + b)$: on multiplie la dérivée par a .
6. **Tangente horizontale** $\Leftrightarrow f'(a) = 0$ (utile pour les extremums, fiche suivante).
7. **À partir de la définition** : simplifie $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ jusqu'à pouvoir poser $h = 0$.

Méthode | Tableau récapitulatif des dérivées

$f(x)$	$f'(x)$	Opération	Dérivée
k	0	$u + v$	$u' + v'$
x^n	nx^{n-1}	ku	ku'
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	uv	$u'v + uv'$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Attention | Top 6 des erreurs à éviter

1. **Dériver un produit comme $u'v'$** . C'est $u'v + uv'$.
2. **Inverser le numérateur du quotient** : c'est $u'v - uv'$, pas $uv' - u'v$.
3. **Oublier le facteur a dans $g(ax + b)$** (ex. $(2x + 1)^3$).
4. **Confondre $f(a)$ et $f'(a)$** dans l'équation de la tangente.
5. **Croire que toute fonction est dérivable partout** ($\sqrt{x}$ et $|x|$ ne le sont pas en 0).
6. **Oublier de simplifier le taux** avant de « faire tendre h vers 0 ».

Méthode | Algorithme : pentes des sécantes

On approche $f'(a)$ par les pentes des sécantes entre a et $a + h$ pour un pas h de plus en plus petit.

```

1 def f(x):
2     return x**2
3
4 def pentes_secantes(a, h, n):
5     """Affiche n pentes de secantes en divisant h par 10 a chaque
```

```
    etape."""
6     for k in range(n):
7         pente = (f(a + h) - f(a)) / h
8         print("h =", h, "    pente =", pente)
9         h = h / 10
10
11 pentes_secantes(2, 1, 5)    # se rapproche de  $f'(2) = 4$ 
```

6 Exercices

Exercice 1 : Taux de variation

1. Calculer le taux de variation de $f(x) = x^2$ entre $a = 1$ et $b = 4$.
2. Calculer le taux de variation de $g(x) = \frac{1}{x}$ entre $a = 2$ et $b = 3$.
3. Pour $f(x) = x^2$, simplifier $\frac{f(3+h) - f(3)}{h}$, puis en déduire $f'(3)$.

Exercice 2 : Dérivées usuelles

Donner la dérivée de chaque fonction.

a) $f(x) = x^3$

c) $h(x) = \sqrt{x}$

b) $g(x) = \frac{1}{x}$

d) $k(x) = x^5$

Exercice 3 : Sommes et multiples

Dériver.

a) $f(x) = 4x^2 - 3x + 7$

c) $h(x) = \frac{2}{x} + 3\sqrt{x}$

b) $g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$

d) $k(x) = 5x^4 - \frac{1}{x}$

Exercice 4 : Équation de tangente

1. Soit $f(x) = x^2$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $a = 3$.
2. Soit $g(x) = x^3$. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $a = 1$.

Exercice 5 : Produits et quotients

Dériver (en précisant u, v).

a) $f(x) = (2x + 1)(x^2 + 3)$

c) $h(x) = \frac{x+1}{x-2}$

b) $g(x) = (x^2 - 1)(3x + 2)$

d) $k(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Exercice 6 : Forme $g(ax + b)$

Dériver.

a) $f(x) = (3x - 1)^2$

c) $h(x) = \sqrt{4x + 1}$

b) $g(x) = (2x + 5)^3$

d) $k(x) = \frac{1}{2x - 3}$

Exercice 7 : Lecture graphique

La courbe d'une fonction f passe par $A(1; 2)$ et sa tangente en A a pour pente -3 .

1. Donner $f(1)$ et $f'(1)$.
2. En déduire l'équation de la tangente en A .
3. La tangente en un point B d'abscisse 4 est horizontale. Que vaut $f'(4)$?

Exercice 8 ★★☆☆ : Dérivée à partir de la définition

Soit $f(x) = x^2 + x$.

1. Écrire et simplifier le taux $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
2. En déduire $f'(a)$, puis vérifier avec les règles d'opérations.

Exercice 9 ★★☆☆ : Nombre dérivé de l'inverse

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. À partir de la définition, retrouver $f'(a)$ pour $a \neq 0$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $a = 2$.

Exercice 10 ★★☆☆ : Tangente parallèle à une droite

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer le point de la courbe où la tangente est **horizontale**.
3. Déterminer le point où la tangente a pour pente 2.

Exercice 11 ★★☆☆ : Vitesse instantanée

Un mobile a pour position (en mètres) à l'instant t (en secondes) $x(t) = t^2 + 2t$, pour $t \geq 0$.

1. Calculer la vitesse moyenne entre $t = 1$ et $t = 3$.
2. La vitesse instantanée est $v(t) = x'(t)$. Calculer $v(t)$, puis la vitesse à $t = 1$ et à $t = 3$.

Exercice 12 ★★★★★ : Démonstrations de cours

1. Redémontrer, à partir de la définition, que la dérivée de $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$.
2. Redémontrer la formule de la dérivée d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$.
3. Justifier l'équation de la tangente $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Exercice 13 ★★★★★ : Tangente passant par un point donné

Soit $f(x) = x^2$ et le point $P(0; -1)$ (qui n'est pas sur la courbe).

1. Écrire l'équation de la tangente T_a au point d'abscisse a .
2. Écrire que P appartient à T_a , et en déduire une équation en a .
3. Résoudre : combien de tangentes à la parabole passent par P ?

Exercice 14 ★★★★★ : Position courbe / tangente

Soit $f(x) = x^3$ et sa tangente T au point d'abscisse $a = 1$.

1. Déterminer l'équation de T .
2. Étudier le signe de $f(x) -$ (ordonnée de T) près de $x = 1$ (on factorisera $x^3 - 3x + 2$ sachant que 1 en est racine).
3. Conclure sur la position de la courbe par rapport à T autour de $x = 1$.

Exercice 15 ★★☆☆ : Coût marginal

Une entreprise produit x objets ($0 \leq x \leq 100$) ; le coût total est $C(x) = 0,1x^2 + 5x + 200$ (en euros).

1. Le coût marginal est $C'(x)$. Calculer $C'(x)$.
2. Interpréter $C'(50)$: que représente concrètement ce nombre ?
3. Comparer $C'(50)$ au coût réel du 51^e objet, $C(51) - C(50)$.

7 🦉 Problème : Les tangentes à la parabole ★★ ★

🔥 Problème style prépa

On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$. Ce problème étudie ses **tangentes** : on les calcule à partir de la définition, on compte combien passent par un point donné (lien avec le discriminant de la fiche 2), et on découvre une propriété remarquable des tangentes perpendiculaires.

Partie A : le nombre dérivé et la tangente

1. À partir de la définition, montrer que pour $f(x) = x^2$, le nombre dérivé en a est $f'(a) = 2a$.
2. En déduire que la tangente T_a à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse a a pour équation $y = 2ax - a^2$.

Partie B : tangentes issues d'un point

3. Soit $P(x_0; y_0)$ un point du plan. Montrer que T_a passe par P si et seulement si a vérifie $a^2 - 2x_0 a + y_0 = 0$.
4. Calculer le discriminant de cette équation d'inconnue a . En déduire, selon la position de P par rapport à $\mathcal{P}$ (c'est-à-dire selon le signe de $x_0^2 - y_0$), le **nombre de tangentes** à $\mathcal{P}$ passant par P .
5. Application : combien de tangentes passent par $P(1; -3)$? Les déterminer.

Partie C : tangentes perpendiculaires

6. Soient T_a et T_b les tangentes aux points d'abscisses a et b ($a \neq b$). Rappeler la condition de perpendicularité sur leurs pentes, et en déduire que $ab = -\frac{1}{4}$.
7. Montrer que le point d'intersection de T_a et T_b a pour abscisse $\frac{a+b}{2}$.
8. En déduire que son ordonnée vaut ab . Conclure : lorsque deux tangentes à $\mathcal{P}$ sont perpendiculaires, elles se coupent **toujours sur la droite** d'équation $y = -\frac{1}{4}$.

Partie D : approche numérique

9. Pour $a = 2$, calculer les pentes des sécantes pour $h = 1$, $h = 0,1$ et $h = 0,01$. Vers quelle valeur tendent-elles?
10. Expliquer en une phrase le lien avec $f'(2)$.

8 Corrigés détaillés

Intuition | Comment lire un corrigé

Chaque corrigé rappelle la méthode et détaille tous les calculs. Cherche d'abord seul, puis compare.

Corrigé 1

Démonstration

1. $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{16 - 1}{3} = \frac{15}{3} = 5.$
2. $\frac{g(3) - g(2)}{3 - 2} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{1} = \frac{-\frac{1}{6}}{1} = -\frac{1}{6}.$
3. $\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 6.$ Donc $f'(3) = 6.$

Corrigé 2

Démonstration

- a) $f'(x) = 3x^2.$ b) $g'(x) = -\frac{1}{x^2}.$ c) $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$ d) $k'(x) = 5x^4.$

Corrigé 3

Démonstration

On dérive terme à terme.

- a) $f'(x) = 8x - 3.$
 b) $g'(x) = 3x^2 - 4x + 1.$
 c) $h(x) = \frac{2}{x} + 3\sqrt{x} = 2 \times \frac{1}{x} + 3\sqrt{x},$ donc $h'(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{2}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}}.$
 d) $k'(x) = 20x^3 - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 20x^3 + \frac{1}{x^2}.$

Corrigé 4

Démonstration

1. $f(x) = x^2, a = 3 : f(3) = 9, f'(x) = 2x$ donc $f'(3) = 6.$ Tangente : $y = 9 + 6(x - 3) = 6x - 9.$
2. $g(x) = x^3, a = 1 : g(1) = 1, g'(x) = 3x^2$ donc $g'(1) = 3.$ Tangente : $y = 1 + 3(x - 1) = 3x - 2.$

Corrigé 5

 Démonstration

a) $u = 2x + 1, v = x^2 + 3, u' = 2, v' = 2x : f' = 2(x^2 + 3) + (2x + 1)(2x) = 2x^2 + 6 + 4x^2 + 2x = 6x^2 + 2x + 6.$

b) $u = x^2 - 1, v = 3x + 2, u' = 2x, v' = 3 : g' = 2x(3x + 2) + (x^2 - 1) \times 3 = 6x^2 + 4x + 3x^2 - 3 = 9x^2 + 4x - 3.$

c) $u = x + 1, v = x - 2, u' = 1, v' = 1 : h' = \frac{1 \times (x - 2) - (x + 1) \times 1}{(x - 2)^2} = \frac{x - 2 - x - 1}{(x - 2)^2} = \frac{-3}{(x - 2)^2}.$

d) $u = x^2, v = x + 1, u' = 2x, v' = 1 : k' = \frac{2x(x + 1) - x^2}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} = \frac{x(x + 2)}{(x + 1)^2}.$

Corrigé 6

 Démonstration

On utilise $(g(ax + b))' = a g'(ax + b).$

a) $f = (3x - 1)^2 : a = 3, g(t) = t^2, g'(t) = 2t, \text{ donc } f' = 3 \times 2(3x - 1) = 6(3x - 1).$

b) $g = (2x + 5)^3 : a = 2, g'(t) = 3t^2, \text{ donc } g' = 2 \times 3(2x + 5)^2 = 6(2x + 5)^2.$

c) $h = \sqrt{4x + 1} : a = 4, \text{ dérivée de } \sqrt{t} \text{ est } \frac{1}{2\sqrt{t}}, \text{ donc } h' = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{4x + 1}} = \frac{2}{\sqrt{4x + 1}}.$

d) $k = \frac{1}{2x - 3} : a = 2, \text{ dérivée de } \frac{1}{t} \text{ est } -\frac{1}{t^2}, \text{ donc } k' = 2 \times \left(-\frac{1}{(2x - 3)^2}\right) = -\frac{2}{(2x - 3)^2}.$

Corrigé 7

 Démonstration

1. $f(1) = 2$ (ordonnée de A) et $f'(1) = -3$ (pente de la tangente en A).

2. Tangente : $y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 2 - 3(x - 1) = -3x + 5.$

3. Une tangente horizontale a une pente nulle, donc $f'(4) = 0.$

Corrigé 8

 Démonstration

1. $\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{(a + h)^2 + (a + h) - (a^2 + a)}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 + a + h - a^2 - a}{h} = \frac{2ah + h^2 + h}{h} = 2a + h + 1.$

2. Quand $h \rightarrow 0 : f'(a) = 2a + 1.$ Vérification par les règles : $f'(x) = 2x + 1.$ ✓

Corrigé 9

 Démonstration

- $\frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{a - (a+h)}{a(a+h)} = \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{a(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{-1}{a^2}$. Donc $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.
- En $a = 2$: $f(2) = \frac{1}{2}$, $f'(2) = -\frac{1}{4}$. Tangente : $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x + 1$.

Corrigé 10

 Démonstration

- $f'(x) = 2x - 4$.
- Tangente horizontale : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, et $f(2) = 4 - 8 + 1 = -3$. Point $(2; -3)$ (le sommet de la parabole).
- Pente 2 : $2x - 4 = 2 \Leftrightarrow x = 3$, et $f(3) = 9 - 12 + 1 = -2$. Point $(3; -2)$.

Corrigé 11

 Démonstration

- Vitesse moyenne entre 1 et 3 : $\frac{x(3) - x(1)}{3 - 1} = \frac{(9+6) - (1+2)}{2} = \frac{15-3}{2} = 6$ m/s.
- $v(t) = x'(t) = 2t + 2$. Donc $v(1) = 4$ m/s et $v(3) = 8$ m/s. (La vitesse moyenne 6 est bien comprise entre $v(1) = 4$ et $v(3) = 8$.)

Corrigé 12

 Démonstration

- $\frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h \rightarrow 2a$, donc $f'(x) = 2x$.
- Pour $p = uv$, on écrit $\frac{p(a+h) - p(a)}{h} = u(a+h) \frac{v(a+h) - v(a)}{h} + v(a) \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$ (en ajoutant et retranchant $u(a+h)v(a)$). En faisant $h \rightarrow 0$: $p' = u v' + v u'$.
- La tangente passe par $A(a; f(a))$ avec la pente $f'(a)$. Une droite de pente m par A s'écrit $y - f(a) = m(x - a)$, d'où $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Corrigé 13

 Démonstration

- Pour $f(x) = x^2$, $f'(a) = 2a$, donc $T_a : y = a^2 + 2a(x - a) = 2ax - a^2$.
- $P(0; -1) \in T_a$ si et seulement si $-1 = 2a \times 0 - a^2 = -a^2$, soit $a^2 = 1$.
- $a^2 = 1$ donne $a = 1$ ou $a = -1$: il y a donc **deux** tangentes à la parabole passant par P . Pour $a = 1$: $T_1 : y = 2x - 1$; pour $a = -1$: $T_{-1} : y = -2x - 1$.

Corrigé 14

 Démonstration

1. $f(1) = 1$, $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(1) = 3$. Tangente : $T : y = 1 + 3(x - 1) = 3x - 2$.
2. $f(x) - (3x - 2) = x^3 - 3x + 2$. Comme 1 est racine, on factorise : $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2) = (x - 1)(x - 1)(x + 2) = (x - 1)^2(x + 2)$.
3. Autour de $x = 1$, $(x - 1)^2 \geq 0$ et $(x + 2) > 0$, donc $f(x) - (3x - 2) \geq 0$: la courbe est **au-dessus** de sa tangente T au voisinage de $x = 1$ (elles se touchent en $x = 1$).

Corrigé 15

 Démonstration

1. $C'(x) = 0,2x + 5$.
2. $C'(50) = 0,2 \times 50 + 5 = 10 + 5 = 15$. C'est le **coût marginal** en $x = 50$: le coût approximatif de production du 51^e objet, soit environ 15 €.
3. $C(51) - C(50)$: $C(51) = 0,1 \times 2601 + 5 \times 51 + 200 = 260,1 + 255 + 200 = 715,1$ et $C(50) = 0,1 \times 2500 + 250 + 200 = 700$. Donc $C(51) - C(50) = 15,1$ €, très proche de $C'(50) = 15$: le coût marginal est une excellente approximation.

Corrigé du problème : Les tangentes à la parabole

 Démonstration / Partie A

1. $\frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2a$, donc $f'(a) = 2a$.
2. $T_a : y = f(a) + f'(a)(x - a) = a^2 + 2a(x - a) = a^2 + 2ax - 2a^2 = 2ax - a^2$.

 Démonstration / Partie B

3. $P(x_0; y_0) \in T_a$ si et seulement si $y_0 = 2ax_0 - a^2$, ce qui s'écrit $a^2 - 2x_0a + y_0 = 0$ (équation d'inconnue a).
4. Discriminant : $\Delta = (-2x_0)^2 - 4 \times 1 \times y_0 = 4x_0^2 - 4y_0 = 4(x_0^2 - y_0)$. Donc :
 - si $y_0 < x_0^2$ (point **sous** la parabole) : $\Delta > 0$, **deux** tangentes ;
 - si $y_0 = x_0^2$ (point **sur** la parabole) : $\Delta = 0$, **une** tangente ;
 - si $y_0 > x_0^2$ (point **au-dessus**) : $\Delta < 0$, **aucune** tangente.
5. Pour $P(1; -3)$: $x_0^2 - y_0 = 1 - (-3) = 4 > 0$, donc deux tangentes. On résout $a^2 - 2a - 3 = 0$: $(a - 3)(a + 1) = 0$, soit $a = 3$ ou $a = -1$. Tangentes : $y = 6x - 9$ et $y = -2x - 1$.

 Démonstration / Partie C

6. Les pentes de T_a et T_b sont $2a$ et $2b$. Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs pentes vaut -1 : $(2a)(2b) = -1$, soit $4ab = -1$, donc $ab = -\frac{1}{4}$.
7. L'intersection vérifie $2ax - a^2 = 2bx - b^2$, soit $2(a - b)x = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Comme

$a \neq b$, on simplifie par $a - b$: $x = \frac{a+b}{2}$.

8. L'ordonnée vaut alors $y = 2a \cdot \frac{a+b}{2} - a^2 = a(a+b) - a^2 = ab$. Or $ab = -\frac{1}{4}$, donc $y = -\frac{1}{4}$: le point d'intersection est toujours sur la droite $y = -\frac{1}{4}$. (C'est la directrice de la parabole.)



Démonstration / Partie D

9. Les pentes des sécantes valent $\frac{(2+h)^2 - 4}{h} = 4 + h$: pour $h = 1, 5$; pour $h = 0,1, 4,1$; pour $h = 0,01, 4,01$. Elles tendent vers 4.

10. Cette valeur limite 4 est précisément $f'(2) = 2 \times 2$: les pentes des sécantes tendent vers le nombre dérivé.

Bilan de la fiche. Tu sais désormais : calculer un taux de variation et un nombre dérivé (y compris à partir de la définition) ; écrire l'équation d'une tangente $y = f(a) + f'(a)(x - a)$; dériver les fonctions usuelles et utiliser les règles sur les sommes, produits, quotients et formes $g(ax + b)$; interpréter f' comme une vitesse ou un coût marginal. La fiche suivante exploite le **signe de f'** pour étudier les variations.

9 Fiche-mémoire**Dériver : mesurer une variation instantanée** **Définition | Nombre dérivé**

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

C'est la pente de la tangente et une vitesse instantanée.

 Méthode | Tangente

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Toujours calculer séparément $f(a)$ puis $f'(a)$.

 Méthode | Dérivées usuelles

$$(x^n)' = nx^{n-1}, (1/x)' = -1/x^2, (\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x}) \text{ pour } x > 0.$$

 Méthode | Opérations

$$(u + v)' = u' + v' \text{ et } (uv)' = u'v + uv'.$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

$$(g(ax + b))' = ag'(ax + b).$$

 Méthode | Approximation affine

Pour h petit,

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h.$$

Annoncer clairement qu'il s'agit d'une approximation.

 Méthode | Lecture graphique

$f'(a) > 0$: pente montante; $f'(a) < 0$: pente descendante; $f'(a) = 0$: tangente horizontale.

 Attention | Les erreurs classiques

Ne pas confondre $f(a)$ et $f'(a)$; ne pas dériver un produit facteur par facteur; respecter les domaines; $f'(a) = 0$ ne suffit pas, à lui seul, à prouver un extremum.