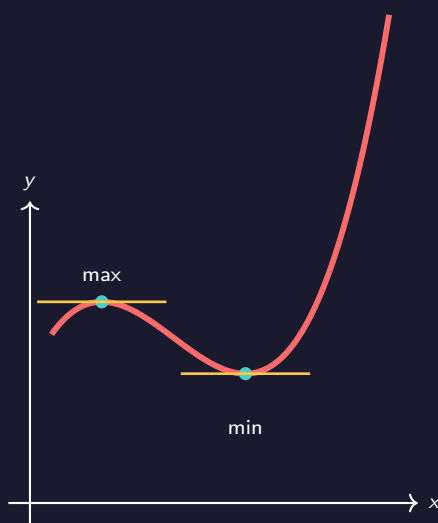


FICHE 04

Variations & courbes

Signe de f' & variations ■ Extremums ■ Optimisation



Première ■ Spécialité Mathématiques ■ Programme officiel



Cours complet



20 exercices



Problème prépa



Corrigés

Table des matières

1	 Pourquoi étudier les variations ?	3
1.1	Le problème fondamental	3
1.2	L'idée directrice	3
2	 L'idée avant la formule	4
2.1	La dérivée indique la pente	4
2.2	L'extremum : quand la pente change de signe	4
3	 Le cours complet	5
3.1	Le théorème fondamental	5
3.2	La méthode du tableau de variations	5
3.3	Extremums	6
3.4	Optimisation	6
3.5	Inégalités par étude de fonction	7
3.6	Position relative de deux courbes	7
3.7	Application au trinôme du second degré	7
3.8	Lecture graphique de la dérivée	8
3.9	Synthèse : étude complète d'une fonction	8
4	 Pour aller plus loin : comprendre la méthode de Newton	10
5	 Boîte à outils : réflexes pour le bac	11
6	 Exercices	13
7	 Problème : Étude complète d'une cubique ★★ ★	16
8	 Corrigés détaillés	17
9	 Fiche-mémoire	24

1 ? Pourquoi étudier les variations ?

1.1 Le problème fondamental

Une fois qu'on sait **dériver** (fiche précédente), une question naturelle se pose : à quoi ça sert ? La réponse est spectaculaire. Le signe de la dérivée f' permet de **connaître les variations** de f sans calculer des dizaines de valeurs : là où $f' > 0$, la fonction monte ; là où $f' < 0$, elle descend. On peut alors trouver les **maximums et minimums**, tracer précisément une courbe, résoudre des problèmes d'**optimisation** et même **démontrer des inégalités**.



Extremums. En un sommet (max) ou un creux (min), la tangente est **horizontale** : la dérivée s'annule. C'est le point de départ de toute recherche d'optimum.

Optimisation. « Quel est le volume maximal d'une boîte ? », « quel prix maximise le bénéfice ? » : on exprime la quantité à optimiser comme une fonction, et on cherche son extremum grâce à f' .

Tracer et comparer. Le tableau de variations donne l'allure exacte d'une courbe. Étudier le signe de $f - g$ permet de savoir quelle courbe est **au-dessus** de l'autre.

1.2 L'idée directrice

L'idée directrice :

Le **signe de f'** gouverne les **variations** de f . Étudier une fonction se résume à : calculer f' , étudier son signe, en déduire un **tableau de variations**. Les **extremums** se trouvent là où f' **change de signe**. C'est l'outil universel pour optimiser, tracer et comparer.

Intuition | Pourquoi c'est un chapitre clé

C'est l'aboutissement de la dérivation : on transforme un calcul (f') en information visuelle (les variations). Cette méthode te servira sur **toutes** les fonctions de Première et de Terminale (polynômes, exponentielle, et plus tard logarithme). L'optimisation est de plus un grand classique des problèmes du bac.

2 L'idée avant la formule

2.1 La dérivée indique la pente

Intuition | Monter, descendre, ou faire une pause

Imagine que tu marches le long de la courbe de f , de gauche à droite. À chaque pas, la **tangente** t'indique si tu montes ou si tu descends, et sa pente est f' .

- Si $f'(x) > 0$: la pente est positive, **tu montes** (fonction croissante).
- Si $f'(x) < 0$: la pente est négative, **tu descends** (fonction décroissante).
- Si $f'(x) = 0$: la pente est nulle, tu es sur un **palier** : souvent un sommet ou un creux.

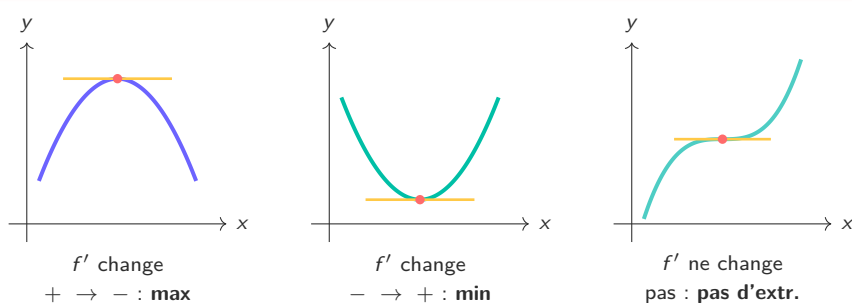
La dérivée est donc une sorte de **GPS de la pente** : son signe seul suffit à reconstituer toute la « topographie » de la courbe.

2.2 L'extremum : quand la pente change de signe

Intuition | Au sommet, on est à plat

Au sommet d'une colline, juste avant tu montais ($f' > 0$), juste après tu descends ($f' < 0$) : entre les deux, à l'instant précis du sommet, la pente est **nulle** ($f' = 0$) et la tangente est horizontale. C'est ainsi qu'on **repère** les extremums : ce sont les endroits où f' **s'annule en changeant de signe**.

Attention : il ne suffit pas que f' s'annule. Si f' s'annule **sans changer de signe** (comme pour x^3 en 0), il n'y a **pas** d'extremum : juste un petit palier.



3 Le cours complet

3.1 Le théorème fondamental

★ Théorème | Signe de la dérivée et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) > 0$ pour tout x de I (sauf éventuellement en quelques points isolés où f' s'annule), alors f est **strictement croissante** sur I .
- Si $f'(x) < 0$ pour tout x de I , alors f est **strictement décroissante** sur I .
- Si $f'(x) = 0$ pour tout x de I , alors f est **constante** sur I .

(Ce théorème est **admis** en Première.)

⚠ Attention | « Sur un intervalle » : c'est essentiel

Le lien signe de f' / variations n'est valable que **sur un intervalle**. Par exemple $f(x) = \frac{1}{x}$ a pour dérivée $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, mais f n'est pas décroissante « sur $\mathbb{R}^*$ » (qui n'est pas un intervalle) : elle est décroissante **séparément** sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

3.2 La méthode du tableau de variations

✂ Méthode | Étudier les variations d'une fonction

1. **Domaine** : préciser l'ensemble d'étude.
2. **Dériver** : calculer $f'(x)$ et la mettre sous forme **factorisée** (pour lire son signe).
3. **Signe de f'** : étudier le signe de $f'(x)$ (souvent un trinôme : « signe de a sauf entre les racines »).
4. **Tableau** : reporter le signe de f' , en déduire les flèches de variation de f , et calculer les valeurs aux points clés (extremums, bornes).

💡 Exemple | Étude complète

Soit $f(x) = x^3 - 3x$ sur $\mathbb{R}$. On calcule $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$. Ce trinôme ($a = 3 > 0$) est positif à l'extérieur de $[-1; 1]$ et négatif entre -1 et 1 . On calcule $f(-1) = -1 + 3 = 2$ (maximum local) et $f(1) = 1 - 3 = -2$ (minimum local).

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
f			2		-2	

f croît jusqu'à $x = -1$ (max local 2), décroît jusqu'à $x = 1$ (min local -2), puis recroît.

3.3 Extremums

Définition | Extremum local

f admet un **maximum local** en a si, pour x proche de a , $f(x) \leq f(a)$. (De même pour un **minimum local** avec $f(x) \geq f(a)$.) Un **extremum** est un maximum ou un minimum.

Théorème | Extremum et dérivée

Si f est dérivable sur un intervalle ouvert et admet un extremum local à l'intérieur en a , alors $f'(a) = 0$: la tangente est **horizontale** en ce point.

Réciproque fausse : $f'(a) = 0$ n'implique pas qu'il y ait un extremum. Il y a extremum seulement si f' change de signe en a .

Attention | Le contre-exemple x^3

Pour $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ s'annule en 0, mais $f'(x) \geq 0$ partout (le signe ne change pas) : f est croissante sur $\mathbb{R}$, il n'y a **pas** d'extremum en 0, juste un « point d'inflexion à tangente horizontale ». Conclusion : pour un extremum, exige toujours un **changement de signe** de f' .

3.4 Optimisation

Méthode | Résoudre un problème d'optimisation

1. **Choisir la variable** (souvent une longueur) et préciser son **intervalle** de variation.
2. **Exprimer** la quantité à optimiser (aire, volume, coût...) comme une fonction de cette variable.
3. **Dériver**, étudier le signe de la dérivée, dresser le tableau de variations.
4. **Conclure** : lire l'extremum et répondre à la question posée (sans oublier les unités).

Exemple | Le champ rectangulaire

Avec 40 m de clôture, quelle aire maximale pour un rectangle ? On note x la largeur ($0 < x < 20$). L'aire est $A(x) = x(20 - x) = -x^2 + 20x$. Alors $A'(x) = -2x + 20$, qui s'annule en $x = 10$: $A' > 0$ avant, $A' < 0$ après, donc **maximum** en $x = 10$. L'aire maximale est $A(10) = 100 \text{ m}^2$ (un carré de côté 10).

3.5 Inégalités par étude de fonction

✂ Méthode | Démontrer une inégalité $f(x) \geq 0$

Pour montrer que $f(x) \geq 0$ sur un intervalle : on étudie les variations de f et on montre que son **minimum** est positif ou nul. Si le minimum de f vaut $m \geq 0$, alors $f(x) \geq m \geq 0$ pour tout x .

💡 Exemple | Une inégalité

Montrons que $x^3 - 3x + 2 \geq 0$ pour tout $x \geq 0$. Soit $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Alors $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$; sur $[0; +\infty[$, f' est négative sur $[0; 1]$ et positive ensuite : f admet un **minimum** en $x = 1$, et $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$. Donc $f(x) \geq f(1) = 0$: l'inégalité est prouvée.

3.6 Position relative de deux courbes

✂ Méthode | Comparer deux courbes

Pour comparer les courbes de f et g : on étudie le **signe de la différence** $d(x) = f(x) - g(x)$.

- $d(x) > 0$: la courbe de f est **au-dessus** de celle de g ;
- $d(x) < 0$: la courbe de f est **en dessous** ;
- $d(x) = 0$: les courbes se **croisent** (point d'intersection).

💡 Exemple | Position relative

Comparons $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x - 1$. On étudie $d(x) = x^2 - (2x - 1) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$. Donc la courbe de f est **toujours au-dessus** de la droite, et elles se touchent en $x = 1$ (la droite est tangente à la parabole).

3.7 Application au trinôme du second degré

✓ Propriété | Retrouver les variations d'un trinôme

Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$, on a $f'(x) = 2ax + b$, qui s'annule en $x = -\frac{b}{2a}$ (l'abscisse du **sommet**). Le signe de f' redonne exactement les variations vues à la fiche 2 : si $a > 0$, f décroît puis croît (minimum au sommet) ; si $a < 0$, f croît puis décroît (maximum au sommet). La dérivation **confirme** et généralise l'étude du second degré.

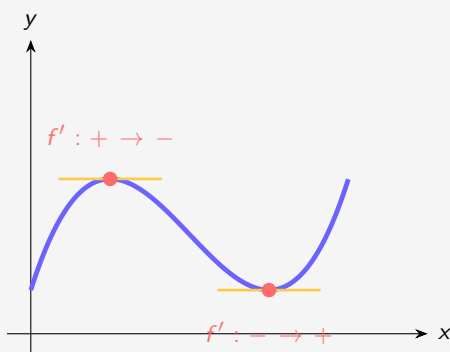
3.8 Lecture graphique de la dérivée

✂ Méthode | Passer de la courbe de f au signe de f' (et inversement)

- Là où la courbe de f **monte**, $f' > 0$; là où elle **descend**, $f' < 0$.
- Aux **sommets et creux** (tangente horizontale), $f' = 0$.
- Inversement, si on connaît le **signe de f'** , on en déduit les flèches de variation de f .

💡 Exemple | Lire f' sur la courbe de f

La courbe ci-dessous monte jusqu'à un sommet en $x = 1$, redescend jusqu'à un creux en $x = 3$, puis remonte.



On en déduit immédiatement : $f' > 0$ sur $]0; 1[$, $f'(1) = 0$, $f' < 0$ sur $]1; 3[$, $f'(3) = 0$, $f' > 0$ sur $]3; 4[$. Le sommet en $x = 1$ est un **maximum**, le creux en $x = 3$ un **minimum**.

3.9 Synthèse : étude complète d'une fonction

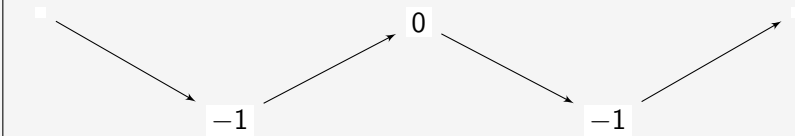
✂ Méthode | Le plan type d'une étude de fonction

1. Préciser le **domaine** (et une éventuelle parité/symétrie).
2. Calculer et **factoriser** $f'(x)$.
3. Étudier le **signe** de f' , dresser le **tableau de variations** avec les valeurs clés.
4. Calculer quelques **points utiles** (ordonnée à l'origine, intersections avec l'axe des abscisses) et **tracer** l'allure.

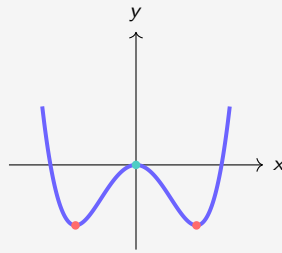
💡 Exemple | Étude complète d'une fonction de degré 4

Soit $f(x) = x^4 - 2x^2$ sur $\mathbb{R}$. **Parité** : $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$, donc f est **paire** (courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées).

Dérivée : $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1)$, qui s'annule en -1 , 0 et 1 . Valeurs : $f(0) = 0$, $f(-1) = f(1) = 1 - 2 = -1$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f							

f admet **deux minimums** (valeur -1 en $x = -1$ et $x = 1$) et un **maximum local** (valeur 0 en $x = 0$) : c'est la célèbre courbe « en W ».



4 🦋 Pour aller plus loin : comprendre la méthode de Newton

💡 Intuition | Remplacer la courbe par une droite

On cherche une solution α de $f(x) = 0$. Depuis une valeur x_n , on remplace localement la courbe par sa tangente. L'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses fournit une nouvelle valeur x_{n+1} , souvent beaucoup plus proche de α .

✎ Démonstration | Construction de la formule

La tangente à la courbe au point d'abscisse x_n a pour équation

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

Son intersection avec l'axe des abscisses vérifie $y = 0$. Si $f'(x_n) \neq 0$,

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n),$$

d'où

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

La formule n'est donc pas magique : elle est simplement l'abscisse où la tangente coupe l'axe. ■

💡 Exemple | Approcher $\sqrt{2}$ sans touche racine

Pour $f(x) = x^2 - 2$, on a $f'(x) = 2x$, donc

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

En partant de $x_0 = 2$:

$$x_1 = 1,5, \quad x_2 \approx 1,4167, \quad x_3 \approx 1,414216.$$

Trois étapes donnent déjà plusieurs décimales exactes de $\sqrt{2}$.

⚠ Attention | Newton n'est pas une baguette magique

La méthode exige $f'(x_n) \neq 0$. Un mauvais point de départ peut envoyer les valeurs loin de la solution, provoquer une division par zéro ou faire osciller la suite. En Première, on l'utilise seulement dans des cas favorables et on **vérifie toujours** le résultat en calculant $f(x_n)$.

5 Boîte à outils : réflexes pour le bac

Méthode | Les réflexes essentiels

1. $f' > 0 \Rightarrow$ **croissante**, $f' < 0 \Rightarrow$ **décroissante**, $f' = 0$ **partout** $\Rightarrow$ **constante**.
2. **Toujours factoriser** f' pour lire son signe facilement.
3. **Extremum** $\Leftrightarrow f'$ **change de signe** (pas seulement $f' = 0$).
4. **Optimisation** : variable $\rightarrow$ fonction $\rightarrow$ dérivée $\rightarrow$ tableau $\rightarrow$ conclusion (+ unités).
5. **Inégalité** $f \geq 0$: montrer que le minimum de f est ≥ 0 .
6. **Position de deux courbes** : étudier le signe de $f - g$.
7. **Sur un intervalle** seulement : $\frac{1}{x}$ décroît sur chaque intervalle, pas sur $\mathbb{R}^*$.

Méthode | Mots-clés à repérer

Tu lis dans l'énoncé...

Tu penses à...

« étudier les variations »	dériver, signe de f' , tableau
« maximum / minimum / optimal »	$f' = 0$ avec changement de signe
« volume / aire / coût maximal »	problème d'optimisation
« montrer que $f(x) \geq 0$ »	étudier le minimum de f
« position relative / au-dessus »	signe de $f(x) - g(x)$
« tangente horizontale »	$f'(a) = 0$

Attention | Top 5 des erreurs à éviter

1. **Conclure à un extremum dès que** $f' = 0$ sans vérifier le changement de signe.
2. **Oublier de factoriser** f' , ce qui rend le signe illisible.
3. **Annoncer « décroissante sur $\mathbb{R}^*$ »** alors que ce n'est pas un intervalle.
4. **Oublier l'intervalle de la variable** dans un problème d'optimisation.
5. **Confondre** f' et f dans le tableau (la ligne des signes est celle de f').

Méthode | Algorithme : méthode de Newton

La méthode de Newton approche une solution de $f(x) = 0$ en suivant les tangentes. Dans des cas favorables, elle converge très vite.

```
1 def f(x):
```

```
2     return x**2 - 2          # on cherche une racine : ici racine(2)
3
4 def fprime(x):
5     return 2*x
6
7 def newton(x0, n):
8     x = x0
9     for k in range(n):
10        x = x - f(x) / fprime(x)    # on suit la tangente
11    return x
12
13 print(newton(2, 5))          # approche tres precise de racine(2)
```

6 Exercices

Exercice 1 : Du signe de f' aux variations

On donne le signe de la dérivée d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$: $f'(x) > 0$ sur $] -\infty ; -2[$, $f'(-2) = 0$, $f'(x) < 0$ sur $] -2 ; 3[$, $f'(3) = 0$, $f'(x) > 0$ sur $] 3 ; +\infty[$.

1. Dresser le tableau de variations de f .
2. Préciser la nature (max ou min) des extremums en -2 et en 3 .

Exercice 2 : Dériver et donner le signe

Pour chaque fonction, calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

c) $h(x) = x^3 - 3x^2$

b) $g(x) = -x^2 + 4x$

d) $k(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

Exercice 3 : Tableau de variations d'un trinôme

Soit $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ et préciser son minimum.

Exercice 4 : Tableau d'une fonction cube

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Calculer $f'(x)$, l'étudier, puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 : Extremums

Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$.

1. Calculer et factoriser $f'(x)$.
2. Déterminer les extremums locaux de f (abscisses, valeurs, nature).

Exercice 6 : Aire maximale

Un rectangle a un périmètre de 24 cm. On note x sa largeur.

1. Exprimer l'aire $A(x)$ en fonction de x (et préciser l'intervalle).
2. Étudier A et déterminer l'aire maximale.

Exercice 7 : Enclos contre un mur

On dispose de 60 m de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire **contre un mur** (le mur sert d'un des côtés, on ne grille donc que trois côtés). On note x la largeur (les deux côtés perpendiculaires au mur).

1. Exprimer la longueur, puis l'aire $A(x)$.
2. Déterminer les dimensions qui maximisent l'aire, et cette aire maximale.

Exercice 8 : La fonction $x + \frac{1}{x}$

Soit $f(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$.

1. Calculer $f'(x)$ et l'écrire sous la forme $\frac{x^2 - 1}{x^2}$.

2. Étudier les variations de f et en déduire son minimum.

3. En déduire que $x + \frac{1}{x} \geq 2$ pour tout $x > 0$.

Exercice 9 ★★☆☆ : Position relative

Comparer les courbes de $f(x) = x^3$ et $g(x) = x$: étudier le signe de $f(x) - g(x)$ et préciser, selon x , laquelle est au-dessus.

Exercice 10 ★★☆☆ : Inégalité

Montrer, par une étude de fonction, que pour tout réel x : $x^2 \geq 2x - 1$.

Exercice 11 ★★☆☆ : Tangentes horizontales

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2$.

1. Déterminer les points où la tangente à la courbe est horizontale.
2. Préciser la nature de chacun (max ou min).

Exercice 12 ★★★☆☆ : Rectangle inscrit sous une parabole

On inscrit un rectangle sous la parabole $y = 9 - x^2$: sa base est sur l'axe des abscisses et ses deux sommets supérieurs sont sur la parabole, aux abscisses $-x$ et x (avec $0 < x < 3$).

1. Montrer que l'aire du rectangle est $A(x) = 2x(9 - x^2) = 18x - 2x^3$.
2. Déterminer la valeur de x qui maximise A , et l'aire maximale (valeur exacte).

Exercice 13 ★★★☆☆ : f' s'annule sans extremum

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = 3(x - 1)^2$.
2. En déduire que f est croissante sur $\mathbb{R}$, bien que $f'(1) = 0$. Y a-t-il un extremum en 1 ?

Exercice 14 ★★★☆☆ : Étude complète

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1. Calculer et factoriser $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (avec les valeurs des extremums).
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
4. Tracer l'allure de la courbe (extremums, ordonnée à l'origine).

Exercice 15 ★★★☆☆ : Une inégalité classique

Montrer, par une étude de fonction, que pour tout $x \geq 0$: $\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$.

Exercice 16 ★★☆☆ : Étude avec un facteur sans racine

Soit $f(x) = x^4 - 4x$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = 4(x-1)(x^2+x+1)$.
2. Justifier que $x^2+x+1 > 0$ pour tout x , puis en déduire le signe de $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de f et donner son minimum.

Exercice 17 ★★☆☆ : Boîte de coût minimal

On fabrique une boîte **sans couvercle**, à base carrée de côté x (en mètres) et de hauteur h , de volume 4 m^3 .

1. Justifier que $h = \frac{4}{x^2}$, puis que l'aire de tôle utilisée est $A(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ (pour $x > 0$).
2. Étudier A et déterminer les dimensions qui minimisent l'aire, ainsi que cette aire minimale.

Exercice 18 ★★☆☆ : Lecture graphique

La courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ monte sur $] -\infty ; 1[$, redescend sur $]1 ; 4[$, puis remonte sur $]4 ; +\infty[$.

1. Donner le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles.
2. En quels points la tangente à la courbe est-elle horizontale ? Préciser la nature des extremums.

Exercice 19 ★★☆☆ : Périmètre minimal

Un rectangle a une aire de 36 m^2 . On note x sa largeur (en m).

1. Exprimer la longueur, puis le périmètre $P(x) = 2x + \frac{72}{x}$ (pour $x > 0$).
2. Étudier P et déterminer les dimensions qui minimisent le périmètre.

Exercice 20 ★★☆☆ : Courbe et tangente

Soit $f(x) = x^3$ et la droite $\mathcal{D} : y = 3x - 2$.

1. Vérifier que $\mathcal{D}$ est tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
2. Étudier le signe de $f(x) - (3x - 2)$ en factorisant $x^3 - 3x + 2$.
3. En déduire la position de la courbe par rapport à $\mathcal{D}$.

7 🦉 Problème : Étude complète d'une cubique ★★ ★

🔥 Problème style prépa

On étudie la fonction $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ sur l'intervalle $[0; 4]$ (par exemple un modèle de concentration). Ce problème rassemble tout le chapitre : dérivée et signe, tableau de variations, extremums, inégalité, et position relative par rapport à une droite.

Partie A : variations et extremums

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; 4]$.
3. Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$ et $f(4)$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[0; 4]$. Préciser le maximum et le minimum.

Partie B : une inégalité

4. Dédire du tableau que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0; 4]$.
5. Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) = 0$?

Partie C : position par rapport à une droite

6. On considère la droite $\mathcal{D} : y = x$. Étudier le signe de $f(x) - x$ en factorisant $x^3 - 6x^2 + 8x$.
7. En déduire, sur $[0; 4]$, les positions relatives de la courbe de f et de la droite $\mathcal{D}$, et leurs points d'intersection.

Partie D : tangente et tracé

8. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.
9. À l'aide de tout ce qui précède, tracer l'allure de la courbe de f sur $[0; 4]$ (extremums, intersections avec $\mathcal{D}$).

8 Corrigés détaillés

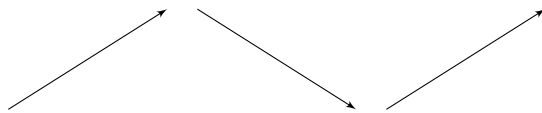
Intuition | Comment lire un corrigé

Chaque corrigé rappelle la méthode et détaille tous les calculs. Cherche d'abord seul, puis compare.

Corrigé 1

Démonstration

1. On reporte le signe de f' et on en déduit les flèches :

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f					

2. En -2 , f' passe de $+$ à $-$: c'est un **maximum** local. En 3 , f' passe de $-$ à $+$: c'est un **minimum** local.

Corrigé 2

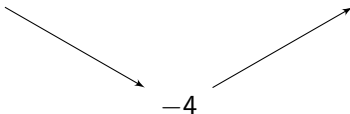
Démonstration

- a) $f'(x) = 2x - 6$: positif pour $x > 3$, négatif pour $x < 3$.
- b) $g'(x) = -2x + 4$: positif pour $x < 2$, négatif pour $x > 2$.
- c) $h'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$: positif sur $] -\infty ; 0[$ et $]2 ; +\infty[$, négatif sur $]0 ; 2[$.
- d) $k'(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$: positif à l'extérieur de $[-1 ; 1]$, négatif entre -1 et 1 .

Corrigé 3

Démonstration

$f'(x) = 2x - 6$, qui s'annule en $x = 3$ ($f' < 0$ avant, $f' > 0$ après). On calcule $f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$.

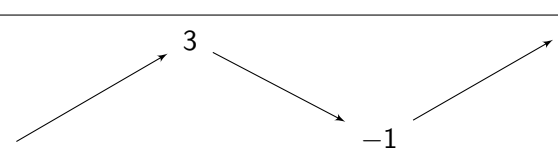
x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f			

f admet un **minimum** égal à -4 en $x = 3$.

Corrigé 4

 Démonstration

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$: positif à l'extérieur de $[-1; 1]$, négatif entre. $f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$ (max), $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$ (min).

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f					

Corrigé 5

 Démonstration

- $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x - 2)(x + 1)$.
- f' est positive à l'extérieur de $[-1; 2]$, négative entre. Donc f admet un **maximum** local en $x = -1$ et un **minimum** local en $x = 2$.

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 5 = -2 - 3 + 12 + 5 = 12,$$

$$f(2) = 2 \times 8 - 3 \times 4 - 12 \times 2 + 5 = 16 - 12 - 24 + 5 = -15.$$

Maximum local 12 en $x = -1$, minimum local -15 en $x = 2$.

Corrigé 6

 Démonstration

- Périmètre 24 donc largeur + longueur = 12 : longueur = $12 - x$. Aire : $A(x) = x(12 - x) = 12x - x^2$, pour $0 < x < 12$.
- $A'(x) = 12 - 2x$, qui s'annule en $x = 6$ ($A' > 0$ avant, $A' < 0$ après) : **maximum** en $x = 6$. $A(6) = 6 \times 6 = 36$. L'aire maximale est 36 cm^2 (un carré de côté 6).

Corrigé 7

 Démonstration

- On grille deux largeurs x et une longueur L : $2x + L = 60$, donc $L = 60 - 2x$. Aire : $A(x) = x(60 - 2x) = 60x - 2x^2$, pour $0 < x < 30$.
- $A'(x) = 60 - 4x$, qui s'annule en $x = 15$ ($A' > 0$ avant, $A' < 0$ après) : **maximum**. Alors $L = 60 - 30 = 30$ et $A(15) = 15 \times 30 = 450$. Aire maximale 450 m^2 pour une largeur de 15 m et une longueur de 30 m.

Corrigé 8

✎ Démonstration

$$1. f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

2. Sur $]0; +\infty[$, $x^2 > 0$ donc le signe de f' est celui de $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Comme $x > 0$, $x + 1 > 0$: le signe est celui de $x - 1$. Donc $f' < 0$ sur $]0; 1[$ et $f' > 0$ sur $]1; +\infty[$: f admet un **minimum** en $x = 1$, $f(1) = 1 + 1 = 2$.

3. Le minimum de f sur $]0; +\infty[$ vaut 2, donc $f(x) \geq 2$ pour tout $x > 0$, c'est-à-dire $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Corrigé 9

✎ Démonstration

$f(x) - g(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$. Tableau de signes (racines $-1, 0, 1$) :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x^3 - x$	$-$	0	$+$	0	$+$

Donc la courbe de f est **au-dessus** de celle de g sur $] -1; 0[$ et $]1; +\infty[$, et **en dessous** sur $] -\infty; -1[$ et $]0; 1[$. Elles se croisent en $x = -1, 0$ et 1 .

Corrigé 10

✎ Démonstration

Posons $f(x) = x^2 - (2x - 1) = x^2 - 2x + 1$. Alors $f'(x) = 2x - 2$, qui s'annule en $x = 1$ ($f' < 0$ avant, $f' > 0$ après) : minimum en $x = 1$, et $f(1) = 1 - 2 + 1 = 0$. Donc $f(x) \geq 0$ pour tout x , c'est-à-dire $x^2 \geq 2x - 1$. (On reconnaît d'ailleurs $f(x) = (x - 1)^2 \geq 0$.)

Corrigé 11

✎ Démonstration

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, qui s'annule en $x = 0$ et $x = 2$. Points : $f(0) = 0$ et $f(2) = 8 - 12 = -4$, soit $(0; 0)$ et $(2; -4)$.

2. f' est positive sur $] -\infty; 0[$, négative sur $]0; 2[$, positive sur $]2; +\infty[$. En $x = 0$ ($+$ $\rightarrow$ $-$) : **maximum** local. En $x = 2$ ($-$ $\rightarrow$ $+$) : **minimum** local.

Corrigé 12

✎ Démonstration

1. Le rectangle a pour largeur $2x$ (de $-x$ à x) et pour hauteur $9 - x^2$ (l'ordonnée du point de la parabole). Donc $A(x) = 2x(9 - x^2) = 18x - 2x^3$.

2. $A'(x) = 18 - 6x^2 = 6(3 - x^2)$, qui s'annule (sur $]0; 3[$) en $x = \sqrt{3}$ ($A' > 0$ avant, $A' < 0$ après) :

maximum. L'aire maximale vaut

$$A(\sqrt{3}) = 18\sqrt{3} - 2(\sqrt{3})^3 = 18\sqrt{3} - 2 \times 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \approx 20,8.$$

Corrigé 13

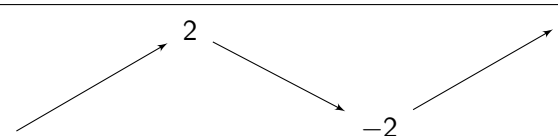
 *Démonstration*

- $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$.
- Un carré est toujours ≥ 0 , donc $f'(x) \geq 0$ pour tout x , et $f'(x) = 0$ **seulement** en $x = 1$. La dérivée ne change donc **pas** de signe : f est croissante sur $\mathbb{R}$. Même si $f'(1) = 0$, il n'y a **pas d'extremum** en 1 (la courbe y présente une tangente horizontale puis repart à la hausse : point d'inflexion).

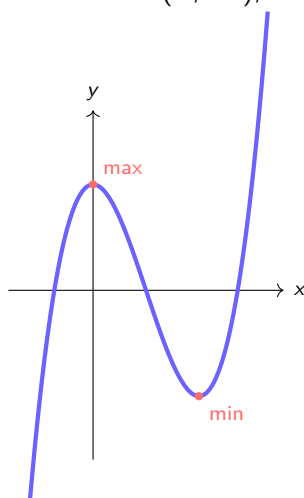
Corrigé 14

 *Démonstration*

- $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.
- $f' > 0$ sur $] -\infty ; 0[$, $f' < 0$ sur $]0 ; 2[$, $f' > 0$ sur $]2 ; +\infty[$. $f(0) = 2$ (max local), $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$ (min local).

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
f						

- $f(0) = 2$ et $f'(0) = 0$: tangente horizontale $y = 2$.
- Allure : maximum local $(0 ; 2)$, minimum local $(2 ; -2)$, ordonnée à l'origine 2.



Corrigé 15

 Démonstration

Posons $f(x) = \frac{x+1}{2} - \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$. Alors

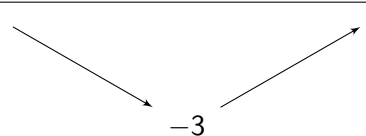
$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

Le dénominateur est positif, donc le signe de f' est celui de $\sqrt{x} - 1$: $f' < 0$ sur $]0; 1[$, $f' > 0$ sur $]1; +\infty[$. f admet donc un **minimum** en $x = 1$: $f(1) = \frac{2}{2} - 1 = 0$. Ainsi $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, c'est-à-dire $\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$.

Corrigé 16

 Démonstration

- $f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)$. Comme $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$, on a $f'(x) = 4(x-1)(x^2 + x + 1)$.
- Le trinôme $x^2 + x + 1$ a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ et son coefficient dominant est positif : il est donc **strictement positif** pour tout x . Le signe de f' est alors celui de $4(x-1)$, c'est-à-dire le signe de $x-1$: $f' < 0$ sur $] -\infty; 1[$, $f' > 0$ sur $]1; +\infty[$.
- f décroît puis croît : **minimum** en $x = 1$, $f(1) = 1 - 4 = -3$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f			

Corrigé 17

 Démonstration

- Le volume est (base) $\times$ (hauteur) $= x^2 h = 4$, donc $h = \frac{4}{x^2}$. L'aire comprend le fond (x^2) et les quatre côtés ($4xh$) : $A = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \times \frac{4}{x^2} = x^2 + \frac{16}{x}$.
- $A'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2} = \frac{2(x^3 - 8)}{x^2}$. Sur $]0; +\infty[$, $x^2 > 0$ donc le signe de A' est celui de $x^3 - 8$, qui s'annule en $x = 2$: $A' < 0$ sur $]0; 2[$, $A' > 0$ sur $]2; +\infty[$. **Minimum** en $x = 2$: $A(2) = 4 + 8 = 12$. Dimensions optimales : côté $x = 2$ m et hauteur $h = 1$ m, pour une aire minimale de 12 m^2 .

Corrigé 18

 Démonstration

1. La courbe monte sur $] - \infty ; 1[$ donc $f' > 0$; elle descend sur $]1 ; 4[$ donc $f' < 0$; elle remonte sur $]4 ; +\infty[$ donc $f' > 0$.
2. La tangente est horizontale là où $f' = 0$, soit en $x = 1$ et $x = 4$. En $x = 1$ ($+$ $\rightarrow$ $-$) : **maximum**.
En $x = 4$ ($-$ $\rightarrow$ $+$) : **minimum**.

Corrigé 19

 Démonstration

1. L'aire vaut largeur $\times$ longueur = 36, donc la longueur est $\frac{36}{x}$. Le périmètre est $P(x) = 2\left(x + \frac{36}{x}\right) = 2x + \frac{72}{x}$, pour $x > 0$.
2. $P'(x) = 2 - \frac{72}{x^2} = \frac{2(x^2 - 36)}{x^2}$. Sur $]0 ; +\infty[$, le signe est celui de $x^2 - 36 = (x - 6)(x + 6)$, soit (puisque $x > 0$) celui de $x - 6$: $P' < 0$ sur $]0 ; 6[$, $P' > 0$ sur $]6 ; +\infty[$. **Minimum** en $x = 6$: $P(6) = 12 + 12 = 24$. Le périmètre est minimal pour un **carré** de côté 6 m ($P = 24$ m).

Corrigé 20

 Démonstration

1. $f(1) = 1$ et $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(1) = 3$. La tangente en $x = 1$ est $y = 1 + 3(x - 1) = 3x - 2 = \mathcal{D}$: $\mathcal{D}$ est donc tangente à la courbe en $x = 1$.
2. $f(x) - (3x - 2) = x^3 - 3x + 2$. Comme 1 est racine : $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2) = (x - 1)^2(x + 2)$.
3. $(x - 1)^2 \geq 0$, donc le signe est celui de $x + 2$: la courbe est **au-dessus** de $\mathcal{D}$ sur $] - 2 ; +\infty[$ (avec contact en $x = 1$) et **en dessous** sur $] - \infty ; - 2[$.

Corrigé du problème : Étude d'une cubique

 Démonstration / Partie A : variations

1. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$.
2. Sur $[0 ; 4]$, le trinôme $(x - 1)(x - 3)$ est positif à l'extérieur de $[1 ; 3]$ et négatif entre. Donc $f' > 0$ sur $[0 ; 1[$, $f' < 0$ sur $]1 ; 3[$, $f' > 0$ sur $]3 ; 4]$.
3. $f(0) = 0$, $f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$, $f(3) = 27 - 54 + 27 = 0$, $f(4) = 64 - 96 + 36 = 4$.

x	0	1	3	4	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	0	4	0	4	

Sur $[0; 4]$, le **maximum** de f vaut 4 (atteint en $x = 1$ et $x = 4$) et le **minimum** vaut 0 (atteint en $x = 0$ et $x = 3$).

 *Démonstration / Partie B : inégalité*

4. D'après le tableau, f varie entre 0 et 4 sur $[0; 4]$; en particulier $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0; 4]$.

5. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = x(x - 3)^2$. Donc $f(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 3$.

 *Démonstration / Partie C : position par rapport à $\mathcal{D}$*

6. $f(x) - x = x^3 - 6x^2 + 9x - x = x^3 - 6x^2 + 8x = x(x^2 - 6x + 8) = x(x - 2)(x - 4)$. Sur $[0; 4]$, tableau de signes (racines 0, 2, 4) :

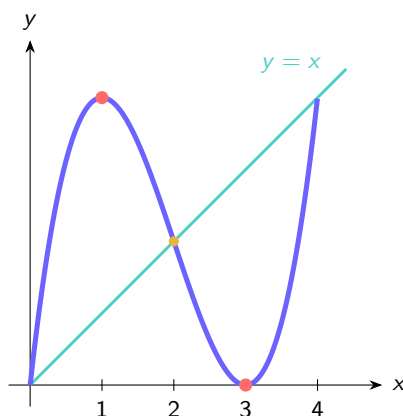
x	0	2	4	
$x(x-2)(x-4)$	0	+	-	0

7. Donc, sur $[0; 4]$: la courbe de f est **au-dessus** de $\mathcal{D}$ sur $]0; 2[$, **en dessous** sur $]2; 4[$; elles se croisent en $x = 0$, $x = 2$ et $x = 4$.

 *Démonstration / Partie D : tangente et tracé*

8. $f(2) = 8 - 24 + 18 = 2$ et $f'(2) = 3(2 - 1)(2 - 3) = 3 \times 1 \times (-1) = -3$. Tangente : $y = f(2) + f'(2)(x - 2) = 2 - 3(x - 2) = -3x + 8$.

9. Allure de la courbe sur $[0; 4]$ (maximum (1; 4), minimum (3; 0), intersections avec $y = x$ en 0, 2, 4) :



Bilan de la fiche. Tu sais désormais : relier le **signe de f'** aux variations de f , dresser un tableau de variations, trouver les extremums (avec changement de signe de f'), résoudre un problème d'optimisation, démontrer une inégalité en étudiant un minimum, et comparer deux courbes via le signe de $f - g$. C'est la boîte à outils d'analyse que tu utiliseras sur toutes les fonctions, jusqu'en Terminale.

9 Fiche-mémoireDu signe de f' au comportement de f

★ Théorème | Variations

Sur un intervalle : $f' > 0$ entraîne que f croît ;
 $f' < 0$ que f décroît ; $f' = 0$ partout que f est constante.

✂ Méthode | Optimiser

Choisir la variable et son intervalle, construire la fonction, étudier ses variations, puis conclure avec la valeur et l'unité demandées.

✂ Méthode | Tableau

Domaine $\rightarrow$ calcul de f' $\rightarrow$ factorisation $\rightarrow$ signe de f' $\rightarrow$ variations de f $\rightarrow$ valeurs aux points importants.

✂ Méthode | Comparer ou prouver

Pour comparer f et g , étudier le signe de $f - g$.
Pour montrer $f \geq 0$, montrer que le minimum de f est positif ou nul.

✂ Méthode | Extremum

Chercher un changement de signe de f' . De + vers - : maximum ; de - vers + : minimum.

✂ Méthode | Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Vérifier $f'(x_n) \neq 0$ et contrôler que $f(x_n)$ devient petit.

⚠ Attention | Le piège n°1

$f'(a) = 0$ signifie seulement que la tangente est horizontale. Sans changement de signe, il peut ne pas y avoir d'extremum.