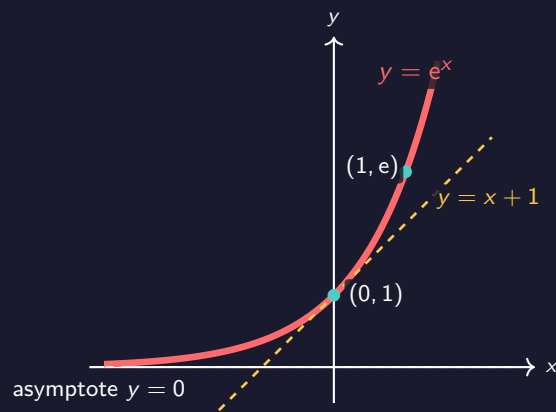


Fonction exponentielle

$f' = f$ et $f(0) = 1$ ■ Propriétés algébriques ■ Croissance & décroissance



Première ■ Spécialité Mathématiques ■ Programme officiel

 Cours complet

 22 exercices

 Problème prépa

 Corrigés

Table des matières

1	 Pourquoi étudier l'exponentielle ?	3
1.1	Le problème fondamental	3
1.2	L'idée directrice	3
2	 L'idée avant la formule	4
2.1	Une fonction égale à sa propre vitesse	4
2.2	Transformer les sommes en produits	4
2.3	Le lien avec les suites géométriques	4
3	 Le cours complet	5
3.1	Définition	5
3.2	L'exponentielle ne s'annule jamais et reste positive	5
3.3	La relation fonctionnelle	5
3.4	Lien avec les suites géométriques	6
3.5	Signe, variations et courbe	7
3.6	Dérivée de e^{ax+b}	7
3.7	Équations et inéquations	8
3.8	Modéliser une évolution exponentielle	8
3.9	Synthèse : étudier une fonction avec exponentielle	9
4	 Pour aller plus loin : une inégalité fondamentale	10
5	 Boîte à outils : réflexes pour le bac	11
6	 Exercices	13
7	 Problème : Autour de l'équation $f' = f$ ★★	16
8	 Corrigés détaillés	17
9	 Fiche-mémoire	24

1 ? Pourquoi étudier l'exponentielle ?

1.1 Le problème fondamental

Existe-t-il une fonction égale à sa propre dérivée, c'est-à-dire vérifiant $f' = f$? Cette question, en apparence très abstraite, surgit dès qu'on modélise un phénomène où la **vitesse de variation est proportionnelle à la quantité présente** : plus il y a de noyaux radioactifs, plus il s'en désintègre ; plus un capital est gros, plus il rapporte d'intérêts. La fonction qui décrit ces évolutions est l'**exponentielle**.



Radioactivité
 $N' = -kN$
décroissance



Finance
intérêts
composés continus



Biologie
croissance
d'une population



Thermique
refroidissement
(loi de Newton)

Radioactivité. Le nombre de noyaux vérifie $N'(t) = -k N(t)$: la solution est $N(t) = N_0 e^{-kt}$, une **décroissance exponentielle**.

Finance. Un capital placé à intérêts composés continus au taux r vaut $C(t) = C_0 e^{rt}$: une **croissance exponentielle**.

Biologie, thermique... Population, dilution ou refroidissement : l'exponentielle apparaît lorsque le taux d'évolution est constant. C'est le pendant « à temps continu » des suites géométriques de la fiche 1.

1.2 L'idée directrice

L'idée directrice :

L'exponentielle est l'**unique fonction égale à sa propre dérivée** et valant 1 en 0. Elle transforme les **sommes en produits** ($e^{a+b} = e^a e^b$), est **toujours strictement positive, strictement croissante**, et modélise tout phénomène de **croissance ou décroissance proportionnelle**.

Intuition | Pourquoi c'est un chapitre clé

L'exponentielle est l'une des fonctions les plus importantes des mathématiques et des sciences. Elle réunit tout ce qu'on a vu : **dérivation** (elle se définit par $f' = f$), **variations** (on étudie sa croissance), et **suites géométriques** (la suite (e^{na}) est géométrique). En Terminale, elle sera le socle de l'étude des limites, du logarithme et des équations différentielles.

2 L'idée avant la formule

2.1 Une fonction égale à sa propre vitesse

Intuition | L'emballlement

Imagine une fonction dont la **vitesse de variation** (f') est égale à la **valeur** elle-même (f) :

$$f'(x) = f(x).$$

Quand f est grande, elle croît vite, donc elle devient encore plus grande, donc elle croît encore plus vite... c'est l'**emballement exponentiel**. Cette propriété $f' = f$, jointe à $f(0) = 1$, **caractérise** complètement l'exponentielle : il n'existe qu'une seule fonction comme ça.

2.2 Transformer les sommes en produits

Intuition | La propriété magique

L'exponentielle « transforme les additions en multiplications » :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b.$$

Ajouter dans l'exposant revient à multiplier les valeurs. C'est exactement la règle des puissances ($x^{a+b} = x^a x^b$), mais valable pour **tous** les réels, pas seulement les entiers. Cette propriété est la clé de tous les calculs avec l'exponentielle.

2.3 Le lien avec les suites géométriques

Intuition | Discret et continu

Une suite géométrique multiplie par une raison q à chaque étape (temps **discret**). L'exponentielle fait la même chose, mais « en continu » : si on regarde l'exponentielle aux instants entiers $0, a, 2a, 3a, \dots$, on obtient les valeurs $1, e^a, e^{2a}, e^{3a}, \dots$, c'est-à-dire une **suite géométrique** de raison e^a . L'exponentielle est donc la « version continue » d'une évolution à taux constant.

3 Le cours complet

3.1 Définition

Définition | La fonction exponentielle

On admet qu'il existe une **unique** fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et notée $\exp$. On note $\exp(x)$, ou plus souvent e^x , son image en x .

Intuition | Ce que dit la définition

La définition contient **deux** informations : la fonction est égale à sa dérivée ($\exp' = \exp$, donc $(e^x)' = e^x$), et elle « part » de 1 en 0 ($e^0 = 1$). L'existence et l'unicité sont **admises** en Première (on les justifie partiellement dans le problème).

3.2 L'exponentielle ne s'annule jamais et reste positive

★ Théorème | Signe de l'exponentielle

Pour tout réel x : $e^x \times e^{-x} = 1$, et donc $e^x > 0$. L'exponentielle ne s'annule jamais.

Démonstration | $e^x e^{-x} = 1$ et $e^x > 0$

Considérons la fonction $\varphi(x) = e^x e^{-x}$. En dérivant ce produit (et en utilisant $(e^{-x})' = -e^{-x}$) :

$$\varphi'(x) = e^x \cdot e^{-x} + e^x \cdot (-e^{-x}) = e^x e^{-x} - e^x e^{-x} = 0.$$

Donc φ est **constante**. Comme $\varphi(0) = e^0 e^0 = 1 \times 1 = 1$, on a $\varphi(x) = 1$ pour tout x , c'est-à-dire $e^x e^{-x} = 1$.

Cette égalité montre déjà que $e^x \neq 0$ (sinon le produit serait nul). De plus e^x ne change jamais de signe : la fonction $\exp$ est dérivable donc continue, et une fonction continue qui ne s'annule pas garde un signe constant. Comme $e^0 = 1 > 0$, on conclut $e^x > 0$ pour tout x . ■

3.3 La relation fonctionnelle

★ Théorème | Relation fonctionnelle

Pour tous réels x et y :

$$e^{x+y} = e^x \times e^y.$$

 Démonstration / Relation fonctionnelle (approfondissement)

Fixons un réel y et considérons $g(x) = e^{x+y} e^{-x}$. Dérivons (produit, avec $(e^{x+y})' = e^{x+y}$ et $(e^{-x})' = -e^{-x}$) :

$$g'(x) = e^{x+y} e^{-x} + e^{x+y} (-e^{-x}) = 0.$$

Donc g est constante. Or $g(0) = e^y e^0 = e^y$. Ainsi $g(x) = e^y$ pour tout x , soit $e^{x+y} e^{-x} = e^y$. En multipliant par e^x (et comme $e^x e^{-x} = 1$) : $e^{x+y} = e^x e^y$. ■

 Propriété | Conséquences (règles de calcul)

Pour tous réels x, y et tout entier n :

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}, \quad e^{nx} = (e^x)^n.$$

 Démonstration / Quelques conséquences

$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ vient directement de $e^x e^{-x} = 1$. Ensuite $e^{x-y} = e^{x+(-y)} = e^x e^{-y} = \frac{e^x}{e^y}$. Enfin $e^{nx} = (e^x)^n$ s'obtient en appliquant n fois la relation fonctionnelle : $e^{x+x+\dots+x} = e^x e^x \dots e^x$. ■

 Définition | Le nombre e

On note $e = \exp(1)$ le **nombre d'Euler** : $e \approx 2,718$. Grâce aux règles ci-dessus, pour tout entier n , $\exp(n) = e^n$; on étend cette notation à tout réel : $\exp(x) = e^x$.

3.4 Lien avec les suites géométriques

 Propriété | La suite (e^{na}) est géométrique

Pour tout réel a fixé, la suite définie par $u_n = e^{na}$ est **géométrique** de raison e^a et de premier terme $u_0 = 1$.

 Démonstration / (e^{na}) géométrique

On calcule le rapport de deux termes consécutifs :

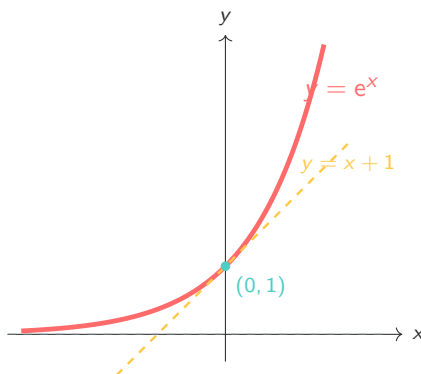
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{(n+1)a}}{e^{na}} = e^{(n+1)a-na} = e^a.$$

Ce rapport est constant (égal à e^a), donc la suite est géométrique de raison e^a . ■

3.5 Signe, variations et courbe

★ Théorème | Variations de l'exponentielle

La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $(e^x)' = e^x > 0$. Elle est donc **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. De plus $e^x > 0$ pour tout x .



✓ Propriété | Propriétés graphiques

- La courbe passe par $(0; 1)$ et par $(1; e)$.
- Elle est **entièrement au-dessus de l'axe des abscisses** ($e^x > 0$).
- Sa **tangente en 0** a pour équation $y = x + 1$ (car $e^0 = 1$ et la pente est $e^0 = 1$).
- L'axe des abscisses ($y = 0$) est « asymptote » à gauche (la courbe s'en rapproche quand x diminue : approche intuitive).

3.6 Dérivée de e^{ax+b}

★ Théorème | Dérivée de e^{ax+b}

Pour tous réels a et b , la fonction $x \mapsto e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{(e^{ax+b})' = a e^{ax+b}.$$

En particulier $(e^{kx})' = k e^{kx}$ et $(e^{-kx})' = -k e^{-kx}$.

💡 Exemple | Dériver des exponentielles

- (1) $f(x) = e^{3x} : f'(x) = 3e^{3x}$.
- (2) $g(x) = e^{-2x+1} : g'(x) = -2e^{-2x+1}$.
- (3) $h(x) = x e^x$ (produit) : $h'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1+x)e^x$.
- (4) $k(x) = \frac{e^x}{x}$ (quotient, $x \neq 0$) : $k'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$.

⚠ Attention | Le signe d'une expression avec e^x

Comme $e^x > 0$ **toujours**, le signe d'un produit comme $(2x - 1)e^x$ ne dépend que du **facteur restant** $2x - 1$. Réflexe : « e^x ne change jamais le signe, on le met de côté ».

3.7 Équations et inéquations

★ Théorème | Résolution par injectivité et croissance

Comme $\exp$ est strictement croissante, pour tous réels A et B :

$$e^A = e^B \iff A = B, \quad e^A < e^B \iff A < B.$$

En particulier $e^A = 1 = e^0 \iff A = 0$.

⚠ Attention | Pas de logarithme en Première

On résout uniquement des équations où les deux membres s'écrivent comme des exponentielles (ou après factorisation pour se ramener à $e^A = e^B$). On ne sait **pas encore** résoudre $e^x = 5$ exactement : cela demande le **logarithme**, vu en Terminale.

💡 Exemple | Résolutions

(1) $e^{3x-2} = 1 \iff 3x - 2 = 0 \iff x = \frac{2}{3}$.

(2) $e^{x^2} = e^4 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2$.

(3) $e^{2x} - e^x = 0 \iff e^x(e^x - 1) = 0 \iff e^x = 1$ (car $e^x \neq 0$) $\iff x = 0$.

(4) $e^{-x} \leq e^3 \iff -x \leq 3 \iff x \geq -3$.

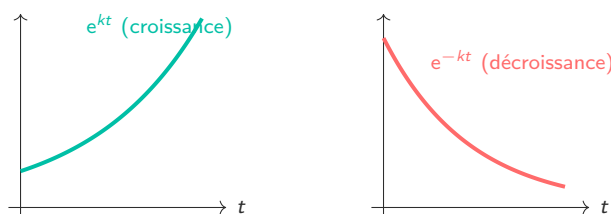
3.8 Modéliser une évolution exponentielle

✂ Méthode | Croissance et décroissance exponentielles

Pour $k > 0$:

- $t \mapsto e^{kt}$ modélise une **croissance** exponentielle (de plus en plus rapide) ;
- $t \mapsto e^{-kt}$ modélise une **décroissance** exponentielle (de plus en plus lente, vers 0).

Une grandeur du type $A(t) = A_0 e^{kt}$ part de A_0 en $t = 0$ et évolue à taux proportionnel.



3.9 Synthèse : étudier une fonction avec exponentielle

✂ Méthode | Réflexe d'étude

Pour étudier f contenant une exponentielle : on dérive (produit/quotient), on **factorise f' en isolant l'exponentielle**, puis comme $e^{(\dots)} > 0$, le **signe de f' est celui du facteur restant**.

💡 Exemple | Étude complète de $f(x) = x^2 e^{-x}$

Sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2x e^{-x} + x^2(-e^{-x}) = (2x - x^2)e^{-x} = x(2 - x)e^{-x}$. Comme $e^{-x} > 0$, le signe de f' est celui de $x(2 - x)$: positif sur $]0; 2[$, négatif ailleurs. Valeurs : $f(0) = 0$ (minimum) et $f(2) = 4e^{-2} \approx 0,54$ (maximum local).

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		− 0 +	0 −	
f				

Comme $x^2 \geq 0$ et $e^{-x} > 0$, on a de plus $f(x) \geq 0$ pour tout x .

4 🦉 Pour aller plus loin : une inégalité fondamentale

★ Théorème | L'exponentielle est au-dessus de sa tangente en 0

Pour tout réel x ,

$$e^x \geq 1 + x.$$

L'égalité a lieu uniquement pour $x = 0$.

✍ Démonstration | Démonstration par les variations

Posons $g(x) = e^x - x - 1$. Alors $g'(x) = e^x - 1$. Comme l'exponentielle est strictement croissante et $e^0 = 1$, on a $g'(x) < 0$ si $x < 0$, $g'(0) = 0$ et $g'(x) > 0$ si $x > 0$.

La fonction g décroît donc jusqu'à 0, puis croît. Son minimum vaut $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$. Ainsi $g(x) \geq 0$, c'est-à-dire $e^x \geq 1 + x$. ■

🧠 Intuition | Ce que dit vraiment l'inégalité

La droite $y = 1 + x$ est la tangente à la courbe de l'exponentielle en 0. L'inégalité affirme que toute la courbe reste au-dessus de cette tangente. Près de 0, elle justifie aussi l'approximation $e^x \approx 1 + x$.

💡 Exemple | Deux conséquences accessibles

En appliquant l'inégalité à x puis à $-x$,

$$e^x \geq 1 + x \quad \text{et} \quad e^{-x} \geq 1 - x.$$

En additionnant, on obtient

$$e^x + e^{-x} \geq 2.$$

Cette preuve ne demande ni logarithme, ni convexité : seulement les variations.

5 Boîte à outils : réflexes pour le bac

Méthode | Les réflexes essentiels

1. $e^x > 0$ **toujours** : le signe d'une expression dépend du **reste**, pas de e^x .
2. $e^{a+b} = e^a e^b$ (somme $\rightarrow$ produit); $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$; $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$.
3. **Dériver** : $(e^x)' = e^x$, $(e^{ax+b})' = a e^{ax+b}$ (ne pas oublier le a).
4. **Résoudre** : se ramener à $e^A = e^B \Leftrightarrow A = B$ (jamais de logarithme en Première).
5. **Factoriser par** e^x pour résoudre $e^{2x} + \dots e^x = 0$.
6. **Croissance/décroissance** : e^{kt} croît, e^{-kt} décroît (vers 0).
7. **Strictement croissante** : $e^A < e^B \Leftrightarrow A < B$.

Méthode | Récapitulatif des règles de calcul

Règle	Formule
Définition	$(e^x)' = e^x$, $e^0 = 1$
Signe	$e^x > 0$ pour tout x
Somme	$e^{a+b} = e^a e^b$
Opposé	$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
Différence	$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
Puissance	$e^{na} = (e^a)^n$
Dérivée composée	$(e^{ax+b})' = a e^{ax+b}$

Attention | Top 6 des erreurs à éviter

1. **Écrire** $e^{a+b} = e^a + e^b$. C'est un **produit** : $e^a e^b$.
2. **Dire que** e^x **peut être négatif ou nul**. Jamais : $e^x > 0$.
3. **Oublier le** a dans $(e^{ax+b})' = a e^{ax+b}$.
4. **Vouloir résoudre** $e^x = 5$ « exactement » : impossible sans logarithme (Terminale).
5. **Confondre** e^{x^2} et $(e^x)^2 = e^{2x}$.
6. **Oublier** $e^x \neq 0$ en factorisant (on élimine la solution $e^x = 0$, impossible).

 Méthode | Algorithmes : approcher e

(a) Par la suite $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (qui se rapproche de e) :

```
1 for n in [1, 10, 100, 1000, 10000]:  
2     print(n, (1 + 1/n)**n)    # tend vers e = 2.718...
```

(b) Par la méthode d'Euler (on suit $y' = y$ par petits pas) :

```
1 def euler(x, n):  
2     h = x / n  
3     y = 1                # exp(0) = 1  
4     for k in range(n):  
5         y = y + h * y    # approximation : y(t+h) = y(t) + h*y'(t)  
6     return y  
7  
8 print(euler(1, 1000))    # approche exp(1) = e
```

6 Exercices

Exercice 1 : Simplifier (sans calculatrice)

a) $e^2 \cdot e^3$

c) $(e^{-1})^4$

e) $(e^2)^3$

b) $\frac{e^5}{e^2}$

d) $e^x \cdot e^{-x}$

f) $e^3 \cdot e^{-3}$

Exercice 2 : Simplifier des expressions en x

a) $e^{2x} \cdot e^x$

c) $(e^x)^3$

b) $\frac{e^{5x}}{e^{2x}}$

d) $e^x \cdot e^{1-x}$

Exercice 3 : Dériver

a) $f(x) = e^x$

c) $h(x) = e^{-3x+2}$

b) $g(x) = e^{4x}$

d) $k(x) = 3e^x - e^{2x}$

Exercice 4 : Résoudre des équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $e^{2x} = e^6$

c) $e^{3x-1} = 1$

b) $e^{x^2} = e^9$

d) $e^{x+1} = e^{2x}$

Exercice 5 : Résoudre des inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $e^{2x} > e^4$

c) $e^{x-1} < 1$

b) $e^{-x} \leq e^2$

d) $e^{2x} \geq e^{x+3}$

Exercice 6 : Dériver des produits et quotients

a) $f(x) = xe^x$

c) $h(x) = x^2e^{-x}$

b) $g(x) = (2x + 1)e^x$

d) $k(x) = \frac{e^x}{x+1}$

Exercice 7 : Factoriser et résoudre

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $e^{2x} - e^x = 0$

b) $e^{2x} = e^{x+2}$

c) $(e^x - 1)(e^x - e^2) = 0$

d) $e^{3x} - e^{2x} = 0$

Exercice 8 ★★☆☆ : Tangentes

1. Montrer que la tangente à la courbe de $\exp$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 1$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $g(x) = e^{2x}$ au point d'abscisse 0.

Exercice 9 ★★☆☆ : Étude de $f(x) = xe^x$

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (1 + x)e^x$.
2. Étudier le signe de f' , puis dresser le tableau de variations de f .
3. En déduire le minimum de f .

Exercice 10 ★★☆☆ : Lien avec les suites géométriques

Soit la suite $u_n = e^{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que (u_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
2. Exprimer u_n à l'aide de e^2 .

Exercice 11 ★★☆☆ : Décroissance radioactive

Une source radioactive contient $N(t) = N_0 e^{-0,1t}$ noyaux à l'instant t (en jours), avec N_0 le nombre initial.

1. Quelle fraction des noyaux reste-t-il à $t = 10$ jours ? (on donnera la valeur exacte e^{-1} puis une valeur approchée).
2. Justifier que N est strictement décroissante.

Exercice 12 ★★★☆☆ : Démonstrations de cours

1. En étudiant $\varphi(x) = e^x e^{-x}$, montrer que $e^x e^{-x} = 1$, puis que $e^x > 0$.
2. Montrer que la suite (e^{na}) est géométrique de raison e^a .

Exercice 13 ★★★☆☆ : L'inégalité $e^x \geq x + 1$

Soit $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variations de g et en déduire son minimum.
3. Conclure que $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x .

Exercice 14 ★★★☆☆ : Étude de $f(x) = (x - 1)e^x$

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = x e^x$.
2. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variations.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Exercice 15 ★★★☆☆ : Approcher le nombre e

1. Calculer $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 10$ et $n = 100$ (valeurs approchées).
2. Vers quel nombre ces valeurs semblent-elles tendre ?
3. En utilisant la tangente $y = x + 1$ en 0, donner une valeur approchée de $e^{0,01}$.

Exercice 16 ★★☆☆ : Étude de $f(x) = (x - 2)e^x$

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (x - 1)e^x$.
2. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variations. En déduire le minimum de f .

Exercice 17 ★★☆☆ : Équations et inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $e^{x^2-1} = 1$

b) $e^{2x} \cdot e^{-x} = e^3$

c) $(e^x)^2 = e^{x+2}$

d) $e^{-x} > e$

Exercice 18 ★★☆☆ : Croissance d'un capital

Un capital placé suit $C(t) = 5000e^{0,03t}$ (en euros, t en années).

1. Quelle est la valeur initiale ?
2. Calculer $C(10)$ (on utilisera $e^{0,3} \approx 1,350$).
3. Justifier que C est strictement croissante.

Exercice 19 ★★★☆☆ : Étude de $f(x) = (2 - x)e^x$

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (1 - x)e^x$.
2. Étudier le signe de f' , dresser le tableau de variations et donner le maximum de f .

Exercice 20 ★★★☆☆ : Conséquences de $e^x \geq x + 1$

On admet l'inégalité $e^x \geq x + 1$ (valable pour tout réel x).

1. En déduire que $e^x > x$ pour tout réel x .
2. En remplaçant x par $-x$, montrer que $e^{-x} \geq 1 - x$ pour tout réel x .

Exercice 21 ★★☆☆ : Comparer deux exponentielles

On pose $g(t) = e^{2t}$ et $h(t) = e^t$.

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $e^{2t} \geq e^t$.
2. Calculer $g(1)$ et $h(1)$ (valeurs approchées, avec $e \approx 2,718$ et $e^2 \approx 7,389$).

Exercice 22 ★★★☆☆ : Étude de $f(x) = (x + 1)e^{-x}$

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = -xe^{-x}$.
2. Étudier le signe de f' , dresser le tableau de variations et donner le maximum de f .

7 Problème : Autour de l'équation $f' = f$ ★★

Problème style prépa

Ce problème établit, par la méthode des **fonctions auxiliaires**, les fondements de l'exponentielle : son unicité, la relation fonctionnelle, sa positivité et sa croissance, puis le lien avec les suites géométriques. On admet l'existence d'une fonction $\exp$ dérivable telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$, et on note $e^x = \exp(x)$.

Partie A : unicité

1. On admet que $e^x e^{-x} = 1$ (donc $e^x \neq 0$). Soit g une fonction dérivable telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$. On pose $k(x) = g(x) e^{-x}$. Calculer $k'(x)$.
2. En déduire que k est constante, puis que $g(x) = e^x$ pour tout x . Conclure sur l'unicité.

Partie B : relation fonctionnelle

3. On fixe un réel y et on pose $h(x) = e^{x+y} e^{-x}$. Calculer $h'(x)$ et en déduire que h est constante.
4. Calculer $h(0)$, puis en déduire que $e^{x+y} = e^x e^y$ pour tous x, y .

Partie C : positivité et croissance

5. À partir de $e^x e^{-x} = 1$, justifier que $e^x \neq 0$, puis (en utilisant la continuité et $e^0 = 1$) que $e^x > 0$ pour tout x .
6. En déduire le signe de $(e^x)'$ et conclure que $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Partie D : suites géométriques et approximation

7. Soit a un réel et $u_n = e^{na}$. Montrer que (u_n) est géométrique ; préciser sa raison.
8. Application : pour $a = 1$, donner u_0, u_1, u_2 en fonction de e . La suite est-elle croissante ?
9. À l'aide de la tangente $y = x + 1$ en 0, justifier que pour h petit, $e^h \approx 1 + h$. En déduire une valeur approchée de $e^{0,1}$.

8 Corrigés détaillés

Intuition | Comment lire un corrigé

Chaque corrigé rappelle la méthode et détaille tous les calculs. Cherche d'abord seul, puis compare.

Corrigé 1

Démonstration

$$\begin{array}{lll} \text{a)} e^2 e^3 = e^{2+3} = e^5. & \text{b)} \frac{e^5}{e^2} = e^{5-2} = e^3. & \text{c)} (e^{-1})^4 = e^{-4}. \\ \text{d)} } e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1. & \text{e)} (e^2)^3 = e^6. & \text{f)} } e^3 e^{-3} = e^0 = 1. \end{array}$$

Corrigé 2

Démonstration

$$\text{a)} e^{2x} e^x = e^{3x}. \quad \text{b)} } \frac{e^{5x}}{e^{2x}} = e^{3x}. \quad \text{c)} } (e^x)^3 = e^{3x}. \quad \text{d)} } e^x e^{1-x} = e^{x+1-x} = e^1 = e.$$

Corrigé 3

Démonstration

$$\text{a)} f'(x) = e^x. \quad \text{b)} g'(x) = 4e^{4x}. \quad \text{c)} h'(x) = -3e^{-3x+2}. \quad \text{d)} k'(x) = 3e^x - 2e^{2x}.$$

Corrigé 4

Démonstration

On utilise $e^A = e^B \Leftrightarrow A = B$.

$$\text{a)} e^{2x} = e^6 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3.$$

$$\text{b)} e^{x^2} = e^9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

$$\text{c)} e^{3x-1} = 1 = e^0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

$$\text{d)} e^{x+1} = e^{2x} \Leftrightarrow x + 1 = 2x \Leftrightarrow x = 1.$$

Corrigé 5

Démonstration

exp étant strictement croissante, $e^A < e^B \Leftrightarrow A < B$.

$$\text{a)} e^{2x} > e^4 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow x > 2. \quad \text{b)} } e^{-x} \leq e^2 \Leftrightarrow -x \leq 2 \Leftrightarrow x \geq -2.$$

$$\text{c)} } e^{x-1} < 1 = e^0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1. \quad \text{d)} } e^{2x} \geq e^{x+3} \Leftrightarrow 2x \geq x + 3 \Leftrightarrow x \geq 3.$$

Corrigé 6

✎ Démonstration

a) $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1+x)e^x.$

b) $g'(x) = 2e^x + (2x+1)e^x = (2x+3)e^x.$

c) $h'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = (2x - x^2)e^{-x} = x(2-x)e^{-x}.$

d) $k'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}.$

Corrigé 7

✎ Démonstration

a) $e^{2x} - e^x = e^x(e^x - 1) = 0.$ Comme $e^x \neq 0$, on a $e^x = 1$, donc $x = 0$.

b) $e^{2x} = e^{x+2} \Leftrightarrow 2x = x+2 \Leftrightarrow x = 2.$

c) $(e^x - 1)(e^x - e^2) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \text{ ou } e^x = e^2, \text{ soit } x = 0 \text{ ou } x = 2.$

d) $e^{3x} - e^{2x} = e^{2x}(e^x - 1) = 0.$ Comme $e^{2x} \neq 0$, $e^x = 1$, donc $x = 0$.

Corrigé 8

✎ Démonstration

1. Pour $\exp$: $f(0) = e^0 = 1$ et $f'(0) = e^0 = 1$. Tangente : $y = f(0) + f'(0)(x-0) = 1+x = x+1.$

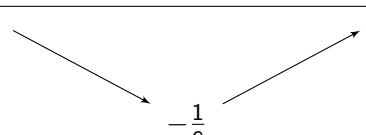
2. Pour $g(x) = e^{2x}$: $g(0) = e^0 = 1$ et $g'(x) = 2e^{2x}$ donc $g'(0) = 2$. Tangente : $y = 1 + 2(x-0) = 2x+1.$

Corrigé 9

✎ Démonstration

1. $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1+x)e^x.$

2. Comme $e^x > 0$, le signe de f' est celui de $1+x$: $f' < 0$ sur $] -\infty; -1[$, $f' > 0$ sur $] -1; +\infty[$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f			

3. Minimum en $x = -1$: $f(-1) = (-1)e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0,37.$

Corrigé 10

✎ Démonstration

- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{2(n+1)}}{e^{2n}} = e^{2(n+1)-2n} = e^2$, constant : (u_n) est **géométrique** de raison e^2 , de premier terme $u_0 = e^0 = 1$.
- $u_n = u_0 \times (e^2)^n = (e^2)^n = e^{2n}$ (cohérent avec la définition).

Corrigé 11

✎ Démonstration

- $\frac{N(10)}{N_0} = e^{-0,1 \times 10} = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,368$: il reste environ 36,8 % des noyaux.
- $N'(t) = N_0 \times (-0,1)e^{-0,1t} = -0,1 N_0 e^{-0,1t}$. Comme $N_0 > 0$ et $e^{-0,1t} > 0$, on a $N'(t) < 0$: N est strictement décroissante.

Corrigé 12

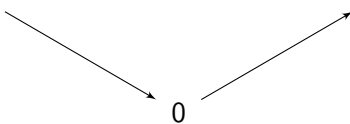
✎ Démonstration

- $\varphi(x) = e^x e^{-x}$, $\varphi'(x) = e^x e^{-x} + e^x (-e^{-x}) = 0$, donc φ est constante. Comme $\varphi(0) = 1$, $e^x e^{-x} = 1$: ainsi $e^x \neq 0$. $\exp$ étant continue, ne s'annulant jamais et valant $1 > 0$ en 0, elle reste > 0 : $e^x > 0$.
- $\frac{e^{(n+1)a}}{e^{na}} = e^a$, constant : la suite (e^{na}) est géométrique de raison e^a .

Corrigé 13

✎ Démonstration

- $g'(x) = e^x - 1$. Or $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 = e^0 \Leftrightarrow x > 0$. Donc $g' < 0$ sur $] -\infty ; 0[$ et $g' > 0$ sur $]0 ; +\infty[$.
-

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
g			

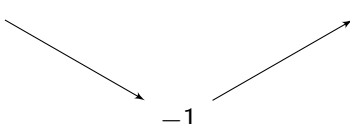
Le minimum de g est $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$.

- Donc $g(x) \geq 0$ pour tout x , c'est-à-dire $e^x - x - 1 \geq 0$, soit $e^x \geq x + 1$.

Corrigé 14

 Démonstration

1. $f'(x) = 1 \cdot e^x + (x - 1)e^x = (1 + x - 1)e^x = x e^x$.
2. Comme $e^x > 0$, le signe de f' est celui de x : $f' < 0$ sur $] -\infty ; 0[$, $f' > 0$ sur $]0 ; +\infty[$. Minimum en $x = 0$: $f(0) = (0 - 1)e^0 = -1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f			

3. $f(0) = -1$ et $f'(0) = 0 \cdot e^0 = 0$: tangente horizontale $y = -1$.

Corrigé 15

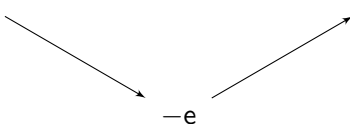
 Démonstration

1. $\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$; $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 1,5^2 = 2,25$; $\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} \approx 2,594$; $\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2,705$.
2. Ces valeurs se rapprochent du nombre $e \approx 2,718$.
3. Près de 0, la courbe est proche de sa tangente : $e^x \approx x + 1$. Donc $e^{0,01} \approx 1 + 0,01 = 1,01$ (la vraie valeur est $\approx 1,01005$).

Corrigé 16

 Démonstration

1. $f'(x) = 1 \cdot e^x + (x - 2)e^x = (1 + x - 2)e^x = (x - 1)e^x$.
2. Comme $e^x > 0$, le signe de f' est celui de $x - 1$: $f' < 0$ sur $] -\infty ; 1[$, $f' > 0$ sur $]1 ; +\infty[$. Minimum en $x = 1$: $f(1) = (1 - 2)e^1 = -e \approx -2,72$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f			

Corrigé 17

✎ Démonstration

- a) $e^{x^2-1} = 1 = e^0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
 b) $e^{2x}e^{-x} = e^x = e^3 \Leftrightarrow x = 3$.
 c) $(e^x)^2 = e^{2x} = e^{x+2} \Leftrightarrow 2x = x + 2 \Leftrightarrow x = 2$.
 d) $e^{-x} > e = e^1 \Leftrightarrow -x > 1 \Leftrightarrow x < -1$.

Corrigé 18

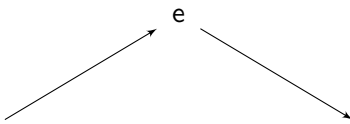
✎ Démonstration

1. Valeur initiale : $C(0) = 5000 e^0 = 5000$ €.
 2. $C(10) = 5000 e^{0,3} \approx 5000 \times 1,350 = 6750$ €.
 3. $C'(t) = 5000 \times 0,03 e^{0,03t} = 150 e^{0,03t} > 0$ (car $e^{0,03t} > 0$), donc C est strictement croissante.

Corrigé 19

✎ Démonstration

1. $f'(x) = -1 \cdot e^x + (2-x)e^x = (-1+2-x)e^x = (1-x)e^x$.
 2. Comme $e^x > 0$, le signe de f' est celui de $1-x$: $f' > 0$ sur $] -\infty; 1[$, $f' < 0$ sur $]1; +\infty[$.
 Maximum en $x = 1$: $f(1) = (2-1)e^1 = e \approx 2,72$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f			

Corrigé 20

✎ Démonstration

1. Pour tout x , $x+1 > x$. Or $e^x \geq x+1$, donc $e^x \geq x+1 > x$, d'où $e^x > x$.
 2. L'inégalité $e^X \geq X+1$ vaut pour tout réel X . En prenant $X = -x$: $e^{-x} \geq -x+1 = 1-x$.

Corrigé 21

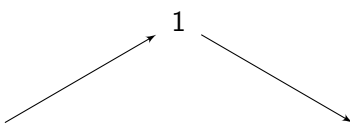
✎ Démonstration

1. Par croissance de $\exp$: $e^{2t} \geq e^t \Leftrightarrow 2t \geq t \Leftrightarrow t \geq 0$. L'inégalité est donc vraie pour tout $t \geq 0$.
 2. $g(1) = e^2 \approx 7,39$ et $h(1) = e \approx 2,72$ (on a bien $g(1) > h(1)$).

Corrigé 22

 Démonstration

1. $f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + (x+1)(-e^{-x}) = e^{-x}(1 - (x+1)) = e^{-x}(-x) = -x e^{-x}$.
2. Comme $e^{-x} > 0$, le signe de f' est celui de $-x$: $f' > 0$ sur $] -\infty; 0[$, $f' < 0$ sur $]0; +\infty[$.
Maximum en $x = 0$: $f(0) = (0+1)e^0 = 1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f			

Corrigé du problème : Autour de $f' = f$ Démonstration / Partie A : unicité

1. $k(x) = g(x)e^{-x}$, donc $k'(x) = g'(x)e^{-x} + g(x)(-e^{-x}) = e^{-x}(g'(x) - g(x))$. Comme $g' = g$, on a $k'(x) = 0$.
2. k est donc constante, égale à $k(0) = g(0)e^0 = 1 \times 1 = 1$. Ainsi $g(x)e^{-x} = 1$, et en multipliant par e^x : $g(x) = e^x$. Toute fonction vérifiant $g' = g$ et $g(0) = 1$ est donc égale à $\exp$: c'est l'unicité.

 Démonstration / Partie B : relation fonctionnelle

3. $h(x) = e^{x+y}e^{-x}$, donc $h'(x) = e^{x+y}e^{-x} + e^{x+y}(-e^{-x}) = 0$: h est constante.
4. $h(0) = e^{0+y}e^0 = e^y$. Donc $h(x) = e^y$ pour tout x , soit $e^{x+y}e^{-x} = e^y$. En multipliant par e^x : $e^{x+y} = e^x e^y$.

 Démonstration / Partie C : positivité et croissance

5. De $e^x e^{-x} = 1$, on tire $e^x \neq 0$ (un produit nul aurait donné $0 \neq 1$). La fonction $\exp$ est dérivable donc continue ; ne s'annulant jamais et valant $e^0 = 1 > 0$, elle garde un signe constant strictement positif : $e^x > 0$.
6. $(e^x)' = e^x > 0$ pour tout x , donc $\exp$ est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

 Démonstration / Partie D : suites géométriques

7. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{(n+1)a}}{e^{na}} = e^a$: la suite (u_n) est géométrique de raison e^a .
8. Pour $a = 1$: $u_0 = e^0 = 1$, $u_1 = e$, $u_2 = e^2$. La raison $e > 1$ et les termes sont positifs : la suite est **croissante**.
9. Près de 0, $e^h \approx 1 + h$ (la courbe est proche de sa tangente $y = x + 1$). Donc $e^{0,1} \approx 1 + 0,1 = 1,1$ (valeur exacte $\approx 1,105$).

Bilan de la fiche. Tu sais désormais : utiliser la définition $\exp' = \exp$, $\exp(0) = 1$; appliquer les règles de calcul ($e^{a+b} = e^a e^b$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x} \dots$) ; dériver e^{ax+b} ; résoudre équations et inéquations par injectivité et croissance (sans logarithme) ; étudier des fonctions mêlant polynômes et exponentielle ; et modéliser une croissance ou décroissance. En Terminale, l'exponentielle reviendra avec les limites, le logarithme et les équations différentielles.

9 Fiche-mémoire

L'exponentielle transforme les sommes en produits

Définition | Définition

$\exp$ est l'unique fonction vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. On note $e^x = \exp(x)$.

Méthode | Calcul

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.$$

Toujours $e^x > 0$.

Méthode | Dériver

$(e^x)' = e^x$ et $(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$. Pour un produit, utiliser $u'v + uv'$ puis factoriser l'exponentielle.

Méthode | Variations et équations

$\exp$ est strictement croissante. Ainsi

$$e^A = e^B \text{ si et seulement si } A = B,$$

$$e^A < e^B \text{ si et seulement si } A < B.$$

Pas besoin de logarithme en Première.

Méthode | Modéliser

Croissance : $C(t) = C_0 e^{kt}$ avec $k > 0$. Décroissance : $C_0 e^{-kt}$. La suite (e^{na}) est géométrique de raison e^a .

Théorème | Inégalité

Pour tout x , $e^x \geq 1 + x$. La courbe reste au-dessus de sa tangente en 0.

Attention | Les réflexes

Ne jamais donner un signe négatif à e^x ; isoler et factoriser l'exponentielle ; pour une approximation près de 0, utiliser $e^h \approx 1 + h$ en annonçant qu'elle est approchée.