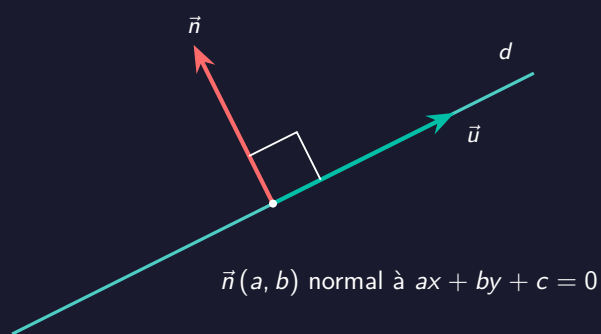


FICHE 08

Géométrie repérée

Vecteur normal ■ Équation de cercle ■ Parabole



Première ■ Spécialité Mathématiques ■ Programme officiel

 Cours complet

 16 exercices

 Problème prépa

 Corrigés

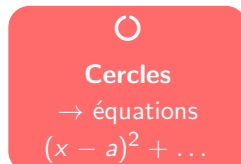
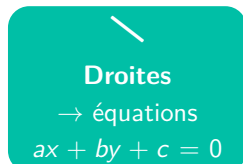
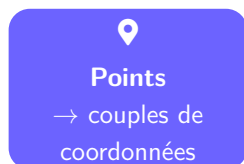
Table des matières

1	🔍 Pourquoi la géométrie repérée ?	3
1.1	Le problème fondamental	3
1.2	L'idée directrice	3
2	🧠 L'idée avant la formule	4
2.1	Un vecteur perpendiculaire pour décrire une droite	4
2.2	Un cercle, c'est une distance constante	4
2.3	La parabole, vieille connaissance	4
3	📖 Le cours complet	5
3.1	Rappels : équation d'une droite et vecteur directeur	5
3.2	Vecteur normal à une droite	5
3.3	Équation d'une droite par un point et un vecteur normal	6
3.4	Projeté orthogonal d'un point sur une droite	7
3.5	Équation d'un cercle	8
3.6	Intersection d'un cercle et d'une droite	9
3.7	La parabole $y = ax^2 + bx + c$	9
3.8	Pour aller plus loin : la parabole comme lieu	10
4	🧰 Boîte à outils : réflexes pour le bac	11
5	✎ Exercices	13
6	🚀 Problème : <i>Un triangle inscrit dans un cercle</i> ★★ ★	15
7	✔ Corrigés détaillés	16
8	📌 Fiche-mémoire	21

1 ? Pourquoi la géométrie repérée ?

1.1 Le problème fondamental

La géométrie « pure » (figures, règle et compas) est belle mais parfois difficile : il faut de l'astuce pour chaque problème. L'idée géniale de Descartes a été de poser un **repère** : chaque point devient un couple de **coordonnées**, chaque droite une **équation**, chaque cercle une **équation** aussi. La géométrie se transforme alors en **calcul** : on « résout » une figure comme on résout une équation.



Vecteur normal. Pour repérer l'**inclinaison** d'une droite, on utilise un vecteur qui lui est **perpendiculaire** (le vecteur normal). Grâce au produit scalaire (fiche précédente), « être sur la droite » devient une simple condition d'orthogonalité.

Cercles. Un cercle est l'ensemble des points à distance fixe d'un centre : sa définition est déjà une **équation**.

Paraboles. On relie l'étude du second degré (fiche 2) à la géométrie : la courbe de $y = ax^2 + bx + c$ est une parabole dont on lit l'axe et le sommet.

1.2 L'idée directrice

L'idée directrice :

Dans un repère orthonormé, une **droite** a une équation $ax + by + c = 0$, et le vecteur $\vec{n}(a, b)$ lui est **normal** (perpendiculaire). Un **cercle** de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R a pour équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Tout problème géométrique (perpendiculaire, projeté, tangente, intersection) devient un **calcul de coordonnées**.

Intuition | Pourquoi c'est un chapitre clé

La géométrie repérée unit **tout** le programme : le **produit scalaire** (vecteur normal, orthogonalité), le **second degré** (parabole), et la résolution d'équations. C'est le langage de l'infographie, de la robotique et du GPS. En Terminale, on l'étend à l'espace (plans, sphères).

2 🧠 L'idée avant la formule

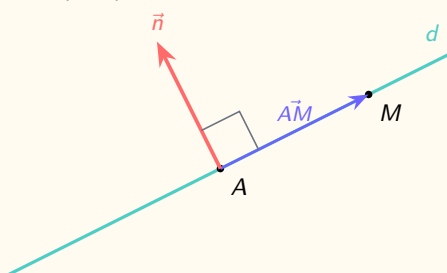
2.1 Un vecteur perpendiculaire pour décrire une droite

🧠 Intuition | Être sur la droite = être perpendiculaire au normal 🧠

Donne-toi une droite d , un point A dessus, et un vecteur $\vec{n}$ **perpendiculaire** à d (le **vecteur normal**). Alors un point M est sur d **exactement quand** $\vec{AM}$ est perpendiculaire à $\vec{n}$, c'est-à-dire quand

$$\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0.$$

En développant ce produit scalaire en coordonnées, on obtient directement l'équation $ax + by + c = 0$ de la droite. Le vecteur normal $\vec{n}(a, b)$ se **lit dans l'équation** : ce sont les coefficients de x et y .



2.2 Un cercle, c'est une distance constante

🧠 Intuition | Tous les points à distance R 🕒

Un cercle de centre Ω et de rayon R est, par définition, l'ensemble des points M tels que $\Omega M = R$. En élevant au carré (pour enlever la racine) et en passant aux coordonnées, $\Omega M^2 = R^2$ devient

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

où $\Omega(a, b)$. La définition géométrique « à distance R du centre » **est** l'équation du cercle. Réciproquement, toute équation de cette forme cache un cercle, dont on retrouve le centre et le rayon.

2.3 La parabole, vieille connaissance

🧠 Intuition | Le second degré vu comme une courbe 🧠

La courbe de $y = ax^2 + bx + c$ (fiche 2) est une **parabole**. La géométrie repérée en donne le vocabulaire : un **axe de symétrie** vertical d'équation $x = -\frac{b}{2a}$, et un **sommet** sur cet axe. On retrouve tout ce qu'on savait sur la forme canonique, mais en langage de courbe.

3 Le cours complet

Dans toute la fiche, le plan est muni d'un repère **orthonormé** $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3.1 Rappels : équation d'une droite et vecteur directeur

Définition | Équation cartésienne et vecteur directeur

Toute droite d admet une **équation cartésienne** de la forme

$$ax + by + c = 0 \quad \text{avec } (a, b) \neq (0, 0).$$

Un **vecteur directeur** de d est un vecteur non nul $\vec{u}$ « qui suit la droite ». Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $ax + by + c = 0$.

Attention | c ne change pas la direction

Deux droites $ax + by + c = 0$ et $ax + by + c' = 0$ ont les **mêmes** a et b : elles sont **parallèles** (même direction, donc même vecteur directeur et même vecteur normal). Seul c change : il « translate » la droite.

3.2 Vecteur normal à une droite

Définition | Vecteur normal

Un **vecteur normal** à une droite d est un vecteur non nul $\vec{n}$ **orthogonal** à d (perpendiculaire à sa direction).

Théorème | Lecture du vecteur normal dans l'équation

La droite d'équation $ax + by + c = 0$ admet pour **vecteur normal** $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et pour **vecteur directeur** $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

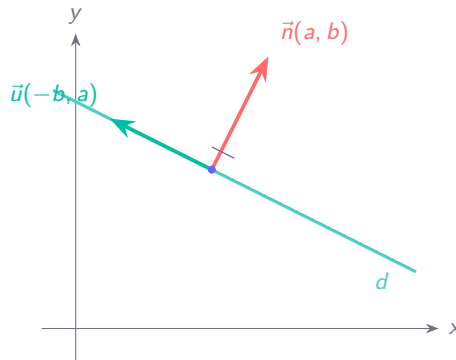
Démonstration | Pourquoi $\vec{n}(a, b)$ est normal

Soient $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ deux points de la droite : $ax_1 + by_1 + c = 0$ et $ax_2 + by_2 + c = 0$.
En soustrayant ces deux égalités :

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0.$$

Or $M_1 \vec{M}_2 \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite, et l'égalité ci-dessus s'écrit exactement $\vec{n} \cdot M_1 \vec{M}_2 = 0$. Donc $\vec{n}(a, b)$ est orthogonal à la direction de la droite : c'est un vecteur normal.

Enfin $\vec{u}(-b, a)$ vérifie $\vec{n} \cdot \vec{u} = a(-b) + b(a) = 0$: c'est bien un vecteur directeur. ■



3.3 Équation d'une droite par un point et un vecteur normal

★ Théorème | Droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$

La droite passant par $A(x_0; y_0)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ a pour équation

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad \text{soit} \quad ax + by + c = 0 \quad \text{avec} \quad c = -(ax_0 + by_0).$$

Démonstration | Équation par point et normal

Un point $M(x; y)$ appartient à la droite si et seulement si $\vec{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$, c'est-à-dire $\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$. Or $\vec{AM} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$, donc

$$\vec{n} \cdot \vec{AM} = a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

En développant : $ax + by - (ax_0 + by_0) = 0$, soit $ax + by + c = 0$ avec $c = -(ax_0 + by_0)$. ■

Exemple | Déterminer une équation de droite

Droite passant par $A(3; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$: $2(x - 3) - 5(y - 1) = 0$, soit $2x - 5y - 6 + 5 = 0$, c'est-à-dire $2x - 5y - 1 = 0$.

Méthode | Droite perpendiculaire / parallèle à une droite donnée

Pour la droite $ax + by + c = 0$:

- une **parallèle** a le même vecteur normal (a, b) : son équation est $ax + by + c' = 0$;
- une **perpendiculaire** a pour vecteur normal le directeur $(-b, a)$: son équation est $-bx + ay + c'' = 0$.

On détermine c' ou c'' en écrivant qu'elle passe par le point voulu.

3.4 Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition | Projeté orthogonal

Le **projeté orthogonal** d'un point A sur une droite d est le point H de d tel que (AH) est **perpendiculaire** à d . C'est le point de d le **plus proche** de A , et AH est la **distance** de A à d .

Méthode | Déterminer le projeté orthogonal H

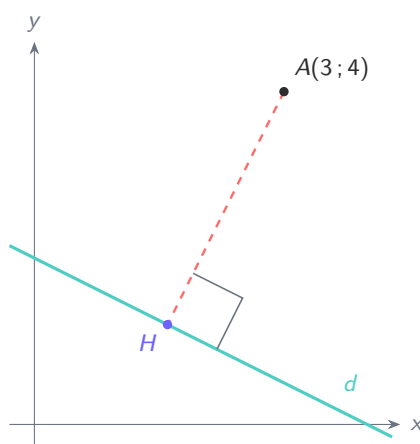
1. Écrire la perpendiculaire d' à d passant par A (vecteur normal de $d' =$ vecteur directeur de d).
2. H est le **point d'intersection** de d et d' : on résout le système des deux équations.

Exemple | Calcul d'un projeté

Projeté de $A(3; 4)$ sur $d : x + 2y - 4 = 0$. Le vecteur normal de d est $\vec{n}(1, 2)$; la perpendiculaire d' passe par A et a pour **directeur** $\vec{n}$, donc pour équation paramétrique $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$. On reporte dans d :

$$(3 + t) + 2(4 + 2t) - 4 = 0 \implies 7 + 5t = 0 \implies t = -\frac{7}{5}.$$

Donc $H\left(3 - \frac{7}{5}; 4 - \frac{14}{5}\right) = \left(\frac{8}{5}; \frac{6}{5}\right)$. (Vérif : $\frac{8}{5} + 2 \times \frac{6}{5} - 4 = \frac{8+12-20}{5} = 0 \checkmark$.)



Méthode | Distance d'un point à une droite (résultat utile)

La distance du point $A(x_0; y_0)$ à la droite $d : ax + by + c = 0$ est

$$d(A, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exemple : distance de $A(3; 4)$ à $x + 2y - 4 = 0$: $\frac{|3 + 8 - 4|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} \approx 3,13$.

3.5 Équation d'un cercle

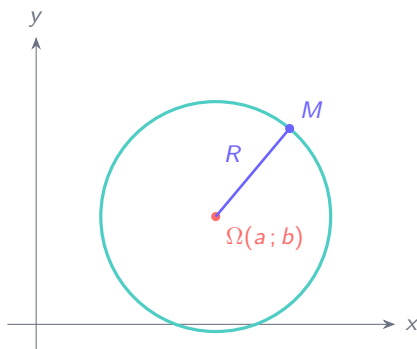
★ Théorème | Équation d'un cercle (centre et rayon)

Le cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R a pour équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

✎ Démonstration | Équation du cercle

Un point $M(x; y)$ est sur le cercle si et seulement si sa distance au centre vaut R , soit $\Omega M = R$. Comme $\Omega M \geq 0$ et $R \geq 0$, c'est équivalent à $\Omega M^2 = R^2$. Or, en repère orthonormé, $\Omega M^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$. D'où l'équation. ■



✓ Propriété | Forme développée

En développant, l'équation devient $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - R^2) = 0$: une équation du type

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Réciproquement, une telle équation est (parfois) celle d'un cercle : on retrouve le centre et le rayon en **complétant les carrés**.

✂ Méthode | Reconnaître un cercle : compléter les carrés

On regroupe les x et les y et on complète chaque carré (comme la forme canonique du second degré) :

$$x^2 + \alpha x = \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4}, \quad y^2 + \beta y = \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4}.$$

Si, après regroupement, le membre de droite est **strictement positif**, c'est un cercle (sinon : un point, ou l'ensemble vide).

💡 Exemple | Reconnaître centre et rayon

$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$. On complète : $(x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 - 3 = 0$, soit $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$.
C'est le cercle de **centre** $\Omega(3; -2)$ et de **rayon** $R = 4$ (car $16 = 4^2$).

✅ Propriété | Cercle de diamètre $[AB]$ (lien avec la fiche 7)

Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$. En coordonnées, avec $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$:

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0.$$

3.6 Intersection d'un cercle et d'une droite

✂ Méthode | Trouver les points d'intersection

Pour intersecter un cercle et une droite : on **remplace** (par substitution) l'expression de la droite dans l'équation du cercle, ce qui donne une équation du **second degré**. Le nombre de solutions (donc de points d'intersection) est donné par le **discriminant** :

- $\Delta > 0$: la droite est **sécante** (deux points) ;
- $\Delta = 0$: la droite est **tangente** (un point) ;
- $\Delta < 0$: pas d'intersection.

💡 Exemple | Intersection avec une droite parallèle à un axe

Cercle $x^2 + y^2 = 25$ (centre O , rayon 5) et droite $x = 3$. On remplace : $9 + y^2 = 25$, donc $y^2 = 16$, soit $y = \pm 4$. Deux points : $(3; 4)$ et $(3; -4)$.

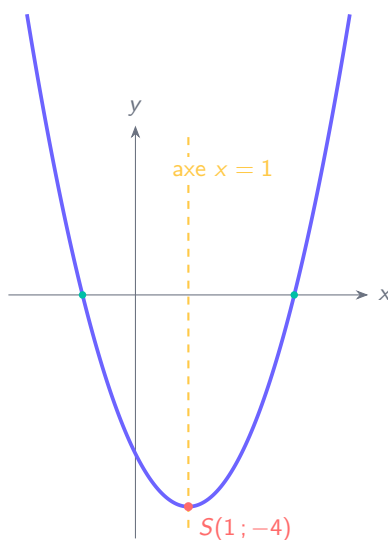
3.7 La parabole $y = ax^2 + bx + c$

★ Théorème | Parabole, axe et sommet

La courbe représentative de $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) est une **parabole**. Elle admet :

- un **axe de symétrie** vertical d'équation $x = -\frac{b}{2a}$;
- un **sommet** $S\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$; la parabole est tournée vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$.

(On retrouve la forme canonique de la fiche 2.)



💡 Exemple | Axe et sommet

Pour $y = 2x^2 - 8x + 5$: axe $x = -\frac{-8}{2 \times 2} = 2$; sommet $S(2; f(2))$ avec $f(2) = 8 - 16 + 5 = -3$, donc $S(2; -3)$.

3.8 Pour aller plus loin : la parabole comme lieu

🧠 Intuition | Approfondissement guidé

On peut définir une parabole **géométriquement** : l'ensemble des points M à **égale distance** d'un point fixe F (le **foyer**) et d'une droite fixe (la **directrice**). Par exemple, l'ensemble des points $M(x; y)$ équidistants du point $F(0; \frac{1}{4})$ et de l'axe des abscisses ($y = -\frac{1}{4}$) vérifie, en égalant les carrés des distances, $x^2 + (y - \frac{1}{4})^2 = (y + \frac{1}{4})^2$, ce qui se simplifie en $y = x^2$: on retrouve une parabole.

4 Boîte à outils : réflexes pour le bac

Méthode | Les réflexes essentiels

1. **Droite** $ax + by + c = 0$: normal $\vec{n}(a, b)$, directeur $\vec{u}(-b, a)$ (on lit dans l'équation).
2. **Droite par point A + normal** $\vec{n}(a, b)$: $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.
3. **Perpendiculaire** : on échange (normal $\leftrightarrow$ directeur). **Parallèle** : mêmes a, b .
4. **Projeté orthogonal** : intersection de d et de la perpendiculaire à d passant par le point.
5. **Cercle centre** $\Omega(a, b)$, **rayon** R : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.
6. **Reconnaître un cercle** : compléter les carrés.
7. **Position droite/cercle** : comparer la **distance** centre-droite au **rayon** (ou discriminant).
8. **Parabole** $y = ax^2 + bx + c$: axe $x = -\frac{b}{2a}$, sommet sur l'axe.

Méthode | Formulaire complet

Objet	Résultat
Droite	$ax + by + c = 0$
Normal / directeur	$\vec{n}(a, b) \quad / \quad \vec{u}(-b, a)$
Droite par A, normal $\vec{n}$	$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$
Distance point-droite	$d(A, d) = \frac{ ax_0 + by_0 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$
Cercle (centre, rayon)	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$
Cercle de diamètre $[AB]$	$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$
Parabole	$y = ax^2 + bx + c$, axe $x = -\frac{b}{2a}$

Attention | Top 6 des erreurs à éviter

1. **Confondre normal et directeur** : normal (a, b) , directeur $(-b, a)$.
2. **Oublier que $xx' + yy'$ et la distance exigent un repère ORTHONORMÉ.**
3. **Oublier la valeur absolue** dans la formule de distance.
4. **Croire que toute équation $x^2 + y^2 + \dots = 0$ est un cercle** : vérifier que le rayon² est > 0 .
5. **Se tromper de signe** en complétant les carrés.
6. **Oublier le $-$** dans l'axe $x = -\frac{b}{2a}$.

 Méthode | Algorithme : position d'une droite et d'un cercle

```
1 from math import sqrt
2
3 def position(a, b, c, xc, yc, R):
4     """Droite ax+by+c=0 et cercle de centre (xc,yc), rayon R."""
5     d = abs(a*xc + b*yc + c) / sqrt(a**2 + b**2) # distance centre-
        droite
6     if d < R: return "secante (2 points)"
7     if d == R: return "tangente (1 point)"
8     return "exterieure (0 point)"
9
10 print(position(3, 4, -14, 2, 1, 3)) # distance 0.8 < 3 -> secante
```

5 Exercices

Exercice 1 : Normal et directeur

Pour chaque droite, donner un vecteur normal et un vecteur directeur.

a) $3x - 2y + 5 = 0$

c) $y = 2x + 3$ (*mettre sous forme $ax + by + c = 0$*)

b) $x + 4y - 1 = 0$

d) $x = 7$

Exercice 2 : Équation par point et normal

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

1. $A(1; -2)$, $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $A(-3; 0)$, $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 : Parallèle et perpendiculaire

Soit $d : 2x + 3y - 1 = 0$.

1. Déterminer la parallèle à d passant par $A(1; 1)$.
2. Déterminer la perpendiculaire à d passant par l'origine.

Exercice 4 : Équation de cercle

Déterminer l'équation du cercle de centre Ω et de rayon R .

1. $\Omega(-1; 3)$, $R = \sqrt{5}$.
2. $\Omega(0; 2)$, $R = 4$.

Exercice 5 : Reconnaître un cercle

Pour chaque équation, dire si c'est un cercle et, si oui, donner centre et rayon.

1. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$.
2. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$.

Exercice 6 : Projeté orthogonal

Déterminer le projeté orthogonal H de $A(5; 2)$ sur la droite $d : x - y - 1 = 0$.

Exercice 7 : Distance

Calculer la distance de $A(5; 2)$ à la droite $d : x - y - 1 = 0$. Comparer avec AH de l'exercice précédent.

Exercice 8 : Position droite / cercle

Soit le cercle $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 9$ et la droite $d : y = x + 5$.

1. Donner le centre et le rayon de $\mathcal{C}$.
2. En comparant la distance du centre à d au rayon, préciser la position de d par rapport à $\mathcal{C}$.

Exercice 9 ★★☆☆ : Intersection droite / cercle

Déterminer les points d'intersection du cercle $x^2 + y^2 = 5$ et de la droite $y = 2x$.

Exercice 10 ★★☆☆ : Cercle de diamètre

On donne $A(1; 2)$ et $B(5; 6)$.

1. Déterminer le centre et le rayon du cercle de diamètre $[AB]$.
2. Donner son équation.

Exercice 11 ★★☆☆ : Parabole

Soit la parabole $\mathcal{P} : y = -x^2 + 4x - 1$.

1. Déterminer l'axe de symétrie et le sommet.
2. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec la droite $y = 2$.

Exercice 12 ★★☆☆ : Démonstrations de cours

1. Démontrer que $\vec{n}(a, b)$ est un vecteur normal à la droite $ax + by + c = 0$.
2. Démontrer que l'équation du cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R est $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Exercice 13 ★★☆☆ : Hauteur d'un triangle

On donne $A(0; 0)$, $B(4; 2)$, $C(1; 3)$.

1. Déterminer une équation de la droite (BC) .
2. Déterminer une équation de la hauteur issue de A (perpendiculaire à (BC) passant par A).
3. Déterminer le pied H de cette hauteur (projeté de A sur (BC)).

Exercice 14 ★★☆☆ : Médiatrice

On donne $A(0; 0)$ et $B(4; 2)$. Déterminer une équation de la médiatrice de $[AB]$ (droite passant par le milieu et de vecteur normal $\vec{AB}$).

Exercice 15 ★★☆☆ : Cercle passant par trois points

Déterminer l'équation du cercle passant par $A(0; 0)$, $B(4; 0)$ et $C(0; 2)$. (On cherchera une équation $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$.) En déduire son centre et son rayon.

Exercice 16 ★★☆☆ : Un lieu géométrique

Déterminer l'ensemble des points $M(x; y)$ équidistants du point $F(0; 1)$ et de la droite $y = -1$. Reconnaitre cet ensemble.

6 🐼 Problème : *Un triangle inscrit dans un cercle* ★★ ★

🔥 Problème style prépa

Dans un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ et les points $A(-1; 1)$, $B(2; 4)$, $C(5; 1)$. Ce problème combine cercle, points, diamètre, orthogonalité (fiche 7), tangente et droites.

Partie A : le cercle

1. En complétant les carrés, déterminer le centre Ω et le rayon R de $\mathcal{C}$.
2. Vérifier que A , B et C appartiennent à $\mathcal{C}$.

Partie B : un diamètre et un angle droit

3. Montrer que $[AC]$ est un **diamètre** de $\mathcal{C}$ (calculer le milieu de $[AC]$ et la longueur AC).
4. En déduire, sans calcul supplémentaire, que le triangle ABC est rectangle en B . Vérifier par $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.

Partie C : une tangente

5. La tangente à $\mathcal{C}$ en C est perpendiculaire à $\vec{\Omega C}$. Calculer $\vec{\Omega C}$, puis déterminer une équation de cette tangente.

Partie D : une corde

6. Déterminer une équation de la droite (AB) .
7. Calculer la distance de Ω à la droite (AB) , et vérifier qu'elle est inférieure à R (donc (AB) est bien une corde du cercle).

7 Corrigés détaillés

Intuition | Comment lire un corrigé

Chaque corrigé rappelle la méthode et détaille tous les calculs. Réflexes : normal = (a, b) , directeur = $(-b, a)$; pour un cercle, compléter les carrés.

Corrigé 1

Démonstration

On lit $\vec{n}(a, b)$ et $\vec{u}(-b, a)$.

a) $3x - 2y + 5 = 0 : \vec{n}(3, -2), \vec{u}(2, 3).$ b) $x + 4y - 1 = 0 : \vec{n}(1, 4), \vec{u}(-4, 1).$

c) $y = 2x + 3 \Leftrightarrow 2x - y + 3 = 0 : \vec{n}(2, -1), \vec{u}(1, 2).$ d) $x = 7 \Leftrightarrow x - 7 = 0 : \vec{n}(1, 0), \vec{u}(0, 1).$

Corrigé 2

Démonstration

1. $4(x - 1) + 1(y + 2) = 0 \Rightarrow 4x - 4 + y + 2 = 0 \Rightarrow 4x + y - 2 = 0.$

2. $2(x + 3) - 5(y - 0) = 0 \Rightarrow 2x + 6 - 5y = 0 \Rightarrow 2x - 5y + 6 = 0.$

Corrigé 3

Démonstration

1. Parallèle : même (a, b) , donc $2x + 3y + c' = 0$. Elle passe par $A(1; 1) : 2 + 3 + c' = 0 \Rightarrow c' = -5.$

Équation : $2x + 3y - 5 = 0.$

2. Perpendiculaire : vecteur normal = directeur de d , soit $(-3, 2)$. Équation $-3x + 2y + c'' = 0$ passant par l'origine : $c'' = 0$, soit $3x - 2y = 0.$

Corrigé 4

Démonstration

1. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5.$ 2. $x^2 + (y - 2)^2 = 16.$

Corrigé 5

Démonstration

1. $(x + 1)^2 - 1 + (y - 3)^2 - 9 + 6 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4.$ **Cercle** de centre $(-1; 3)$, rayon 2.

2. $(x - 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 + 9 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = -4.$ Le rayon² serait négatif : **ce n'est pas un cercle** (ensemble vide).

Corrigé 6

 *Démonstration*

$d : x - y - 1 = 0$ a pour vecteur directeur $(1, 1)$ et normal $(1, -1)$. La perpendiculaire d' à d passant par $A(5; 2)$ a pour directeur $(1, -1) : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$. On reporte dans d :

$$(5 + t) - (2 - t) - 1 = 0 \Rightarrow 2 + 2t = 0 \Rightarrow t = -1.$$

Donc $H(5 - 1; 2 + 1) = (4; 3)$ (vérif : $4 - 3 - 1 = 0$ ✓).

Corrigé 7

 *Démonstration*

$d(A, d) = \frac{|5 - 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1,41$. Et $AH = \sqrt{(5 - 4)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{2}$: c'est bien la même valeur (la distance est la longueur du segment au projeté).

Corrigé 8

 *Démonstration*

1. $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 9$: centre $O(0; 0)$, rayon $R = 3$.

2. $d : y = x + 5 \Leftrightarrow x - y + 5 = 0$. Distance : $\frac{|0 - 0 + 5|}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3,54 > 3 = R$. La droite est **extérieure** au cercle : pas d'intersection.

Corrigé 9

 *Démonstration*

On remplace $y = 2x$ dans $x^2 + y^2 = 5$: $x^2 + 4x^2 = 5 \Rightarrow 5x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Pour $x = 1$, $y = 2$; pour $x = -1$, $y = -2$. Points d'intersection : $(1; 2)$ et $(-1; -2)$.

Corrigé 10

 *Démonstration*

1. Centre = milieu de $[AB] = \left(\frac{1+5}{2}; \frac{2+6}{2} \right) = (3; 4)$. Rayon = $\frac{AB}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(5-1)^2 + (6-2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{32} = 2\sqrt{2}$.

2. Équation : $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 8$.

Corrigé 11

✎ Démonstration

1. Axe : $x = -\frac{4}{2 \times (-1)} = 2$. Sommet : $f(2) = -4 + 8 - 1 = 3$, soit $S(2; 3)$.
2. $-x^2 + 4x - 1 = 2 \Rightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 3) = 0$, soit $x = 1$ ou $x = 3$. Points : $(1; 2)$ et $(3; 2)$.

Corrigé 12

✎ Démonstration

1. Soient M_1, M_2 deux points de la droite : $ax_1 + by_1 + c = 0$ et $ax_2 + by_2 + c = 0$. Par soustraction, $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$, c'est-à-dire $\vec{n} \cdot \vec{M_1M_2} = 0$. Comme $\vec{M_1M_2}$ dirige la droite, $\vec{n}(a, b)$ lui est orthogonal : c'est un vecteur normal.
2. $M(x; y)$ est sur le cercle si et seulement si $\Omega M = R$, si et seulement si $\Omega M^2 = R^2$ (quantités positives), si et seulement si $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Corrigé 13

✎ Démonstration

Avec $A(1; 3)$, $B(0; 0)$, $C(6; 3)$.

1. $\vec{BC} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ dirige (BC) , donc $\vec{n}(3, -6)$, ou plus simplement $\vec{n}(1, -2)$, est normal. Équation de (BC) passant par $B(0; 0)$: $1(x - 0) - 2(y - 0) = 0$, soit $x - 2y = 0$.
2. La hauteur issue de A est perpendiculaire à (BC) : son vecteur normal est le directeur de (BC) , soit $(2, 1)$. Équation passant par $A(1; 3)$: $2(x - 1) + 1(y - 3) = 0 \Rightarrow 2x + y - 5 = 0$.
3. H est l'intersection : $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$. De la première, $x = 2y$; on reporte : $2(2y) + y - 5 = 0 \Rightarrow 5y = 5 \Rightarrow y = 1$, $x = 2$. Donc $H(2; 1)$.

Corrigé 14

✎ Démonstration

Milieu de $[AB]$: $M(2; 1)$. Vecteur normal $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Médiatrice : $4(x - 2) + 2(y - 1) = 0 \Rightarrow 4x + 2y - 10 = 0 \Rightarrow 2x + y - 5 = 0$.

Corrigé 15

✎ Démonstration

On cherche $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$. Par $A(0; 0)$: $\gamma = 0$. Par $B(4; 0)$: $16 + 4\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -4$.
 Par $C(0; 2)$: $4 + 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = -2$. Équation : $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$, soit $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$:
 centre $(2; 1)$, rayon $\sqrt{5}$.

Corrigé 16

✎ Démonstration

$MF = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$ et la distance de M à la droite $y = -1$ vaut $|y+1|$. On égale les carrés :

$$x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1 \Rightarrow x^2 = 4y.$$

L'ensemble est la **parabole** d'équation $y = \frac{x^2}{4}$.

Corrigé du problème : Un triangle inscrit dans un cercle

✎ Démonstration / Partie A : le cercle

- $x^2 - 4x + y^2 - 2y - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$.
Centre $\Omega(2; 1)$, rayon $R = 3$.
- $A(-1; 1)$: $(-1-2)^2 + (1-1)^2 = 9 + 0 = 9 \checkmark$. $B(2; 4)$: $0 + 9 = 9 \checkmark$. $C(5; 1)$: $9 + 0 = 9 \checkmark$.
Les trois points sont sur $\mathcal{C}$.

✎ Démonstration / Partie B : diamètre et angle droit

3. Milieu de $[AC]$: $\left(\frac{-1+5}{2}; \frac{1+1}{2}\right) = (2; 1) = \Omega$. Et $AC = \sqrt{(5+1)^2 + 0} = 6 = 2R$. Donc $[AC]$ est un **diamètre** de $\mathcal{C}$.

4. B est sur le cercle et $[AC]$ est un diamètre : B voit le diamètre sous un angle droit, donc le triangle ABC est **rectangle en B**. Vérification : $\vec{BA} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{BC} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -9 + 9 = 0 \checkmark$.

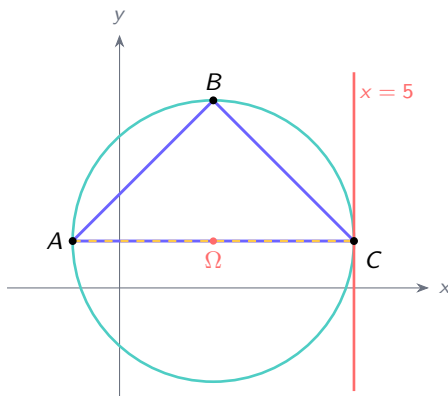
✎ Démonstration / Partie C : une tangente

5. $\vec{\Omega C} \begin{pmatrix} 5-2 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. La tangente en C est perpendiculaire à $\vec{\Omega C}$, donc admet $\vec{\Omega C}(3, 0)$ comme vecteur normal. Équation passant par $C(5; 1)$: $3(x-5) + 0(y-1) = 0 \Rightarrow x = 5$. La tangente est la droite verticale $x = 5$.

 Démonstration / Partie D : une corde

6. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ dirige (AB) ; un normal est $(1, -1)$. Équation par $A(-1; 1)$: $1(x + 1) - 1(y - 1) = 0 \Rightarrow x - y + 2 = 0$.

7. Distance de $\Omega(2; 1)$ à (AB) : $\frac{|2 - 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2,12 < 3 = R$. Donc (AB) coupe le cercle : c'est une **corde**.



Bilan de la fiche. Tu sais désormais : lire le vecteur normal (a, b) et le directeur $(-b, a)$ d'une droite, écrire l'équation d'une droite par un point et un normal, déterminer un projeté orthogonal et une distance, reconnaître et utiliser une équation de cercle (centre, rayon), étudier la position d'une droite et d'un cercle, et retrouver axe et sommet d'une parabole. Tout cela en transformant la géométrie en **calcul de coordonnées**.

8 Fiche-mémoire

Transformer une figure en équations

Méthode | Droite

$ax + by + c = 0$ admet pour normal (a, b) et pour directeur $(-b, a)$. Par $A(x_A, y_A)$ avec normal (a, b) :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0.$$

Méthode | Projeté

Le projeté H de A sur d vérifie $H \in d$ et $\vec{AH}$ colinéaire à un vecteur normal de d .

Méthode | Distance à une droite

$$d(A, d) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Méthode | Cercle

Centre (α, β) et rayon R :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2.$$

Compléter les carrés pour reconnaître centre et rayon.

Méthode | Parabole

Axe $x = -b/(2a)$, sommet $S(\alpha, f(\alpha))$. Si $a > 0$, ouverture vers le haut ; si $a < 0$, vers le bas.

Méthode | Intersection

Résoudre le système des deux équations. Le nombre de solutions correspond au nombre de points d'intersection.

Attention | Toujours contrôler géométriquement

Un rayon doit être positif ; un projeté doit appartenir à la droite ; une tangente au cercle est perpendiculaire au rayon ; l'orientation d'une parabole dépend du signe de a .