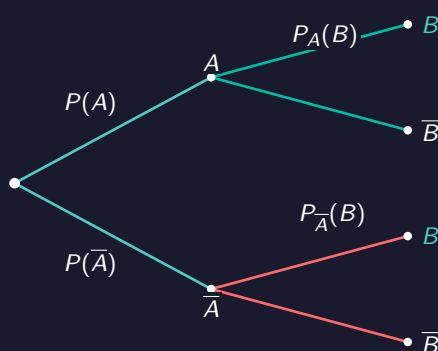


Probabilités conditionnelles

Conditionnement & arbres ■ Probabilités totales ■ Indépendance



Première ■ Spécialité Mathématiques ■ Programme officiel

 Cours complet

 16 exercices

 Problème prépa

 Corrigés

Table des matières

1	🔍 Pourquoi les probabilités conditionnelles ?	3
1.1	Le problème fondamental	3
1.2	L'idée directrice	3
2	🧠 L'idée avant la formule	4
2.1	Conditionner, c'est réduire l'univers	4
2.2	L'arbre pondéré : suivre les chemins	4
2.3	L'indépendance : quand l'info ne change rien	4
3	📖 Le cours complet	5
3.1	Rappels de probabilités	5
3.2	Probabilité conditionnelle	5
3.3	Arbres pondérés	6
3.4	Tableaux croisés d'effectifs	7
3.5	Partition et formule des probabilités totales	8
3.6	Indépendance de deux événements	9
3.7	Inverser le conditionnement (situations de « faux positifs »)	10
4	🚀 Pour aller plus loin : une marche aléatoire	12
5	📦 Boîte à outils : réflexes pour le bac	14
6	✍ Exercices	16
7	🔧 Problème : Contrôle qualité ★★ ★	19
8	✔ Corrigés détaillés	20
9	📖 Fiche-mémoire	25

1 ? Pourquoi les probabilités conditionnelles ?

1.1 Le problème fondamental

Une probabilité mesure une « chance » ; mais cette chance **change** dès qu'on apprend une information. Quelle est la probabilité qu'il pleuve aujourd'hui ? Et **sachant** que le ciel est gris ? Quelle est la probabilité d'être malade ? Et **sachant** qu'un test est positif ? Les probabilités **conditionnelles** formalisent cette mise à jour : comment une information nouvelle modifie les chances.



Le piège de l'inversion. « La probabilité d'être positif au test sachant qu'on est malade » ($P_M(+)$) n'est pas « la probabilité d'être malade sachant qu'on est positif » ($P_+(M)$). Confondre les deux est l'erreur la plus célèbre des probabilités (et la plus lourde de conséquences). Ce chapitre apprend à les distinguer.

Les outils. Deux représentations rendent tout simple : l'**arbre pondéré** (on suit des chemins) et le **tableau croisé** (on compte des effectifs).

1.2 L'idée directrice

L'idée directrice :

Conditionner par A , c'est se replacer « dans le monde où A est réalisé » : la probabilité de B y devient $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Un **arbre pondéré** organise ces calculs : on **multiplie** les probabilités le long d'un chemin, et on **additionne** les chemins qui mènent au même événement. Deux événements sont **indépendants** quand l'information n'y change rien : $P_A(B) = P(B)$.

Intuition | Pourquoi c'est un chapitre clé

Les probabilités conditionnelles sont **partout** dans la vie courante (médecine, justice, assurance, intelligence artificielle). C'est aussi la base des **variables aléatoires** (fiche suivante) et de toute la statistique. Et surtout, c'est un formidable entraînement à la **rigueur** : un raisonnement faux sur les conditionnements mène à des conclusions absurdes.

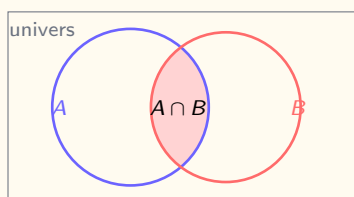
2 L'idée avant la formule

2.1 Conditionner, c'est réduire l'univers

Intuition | Se replacer dans le monde où A est vrai

Au départ, tous les résultats possibles forment l'**univers**. Quand on apprend que A est réalisé, on « oublie » tout ce qui est hors de A : le nouvel univers, c'est A . La probabilité de B **sachant** A compte alors la part de B à l'intérieur de A :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\text{« taille » de } A \cap B}{\text{« taille » de } A}.$$



On « normalise » par $P(A)$ pour que, dans ce nouveau monde, la probabilité totale fasse bien 1.

2.2 L'arbre pondéré : suivre les chemins

Intuition | Multiplier le long, additionner les chemins

Un **arbre pondéré** représente une succession de choix. Sur chaque branche, on écrit une probabilité (la première « normale », les suivantes **conditionnelles**). Deux règles simples :

- **Règle du produit** : la probabilité d'un **chemin** est le **produit** des probabilités de ses branches.
- **Règle de la somme** : la probabilité d'un **événement** est la **somme** des probabilités des chemins qui y mènent.

Tout calcul du chapitre se ramène à ces deux gestes : **multiplier** et **additionner**.

2.3 L'indépendance : quand l'info ne change rien

Intuition | Savoir A n'apprend rien sur B

Parfois, connaître A ne modifie **pas** la probabilité de B : c'est l'**indépendance**. Par exemple, le résultat d'un dé n'influe pas sur celui d'un autre dé. Dans ce cas $P_A(B) = P(B)$, et la règle du produit devient toute simple : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

3 Le cours complet

3.1 Rappels de probabilités

Définition | Univers, événement, probabilité

L'**univers** Ω est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. Un **événement** est une partie de Ω . Une **probabilité** P associe à chaque événement un nombre de $[0; 1]$, avec $P(\Omega) = 1$.

Propriété | Formules de base (rappels de Seconde)

- **Événement contraire** : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- **Réunion** : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- **Équiprobabilité** : si tous les résultats sont équiprobables, $P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.

3.2 Probabilité conditionnelle

Définition | Probabilité conditionnelle

Soient A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$. La **probabilité de B sachant A** est

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Intuition | Comprendre la formule avec des effectifs

Imagine une classe de 100 élèves. A : « fait de l'allemand » (30 élèves); B : « fait du sport »; et $A \cap B$: « allemand **et** sport » (12 élèves). On choisit un élève d'allemand au hasard : quelle est la probabilité qu'il fasse du sport ? On ne regarde **que les 30 élèves d'allemand** (c'est le nouvel univers), et parmi eux 12 font du sport :

$$P_A(B) = \frac{12}{30} = 0,4.$$

On retrouve la formule : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{12/100}{30/100} = \frac{12}{30}$. **Le dénominateur $P(A)$ sert à se replacer dans le sous-groupe A** : on « oublie » les 70 autres élèves. C'est pourquoi on exige $P(A) \neq 0$: on ne peut pas se replacer dans un groupe vide.

Théorème | Règle du produit

En isolant $P(A \cap B)$ dans la définition :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A).$$

⚠ Attention | $P_A(B)$ n'est pas $P_B(A)$

« La probabilité de B sachant A » et « la probabilité de A sachant B » sont **deux nombres différents** en général. Exemple : presque tous les joueurs de basket professionnels mesurent plus de 1,80 m, mais presque personne mesurant plus de 1,80 m n'est joueur professionnel. Ne les confonds jamais (voir §3.7).

💡 Exemple | Calcul direct

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. Soit A : « la carte est un cœur » (8 cartes) et B : « la carte est une dame » (4 cartes). On a $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $A \cap B$: « la dame de cœur » (1 carte), donc $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$. Ainsi

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/32}{1/4} = \frac{1}{8}.$$

Sachant que la carte est un cœur, la probabilité que ce soit une dame est $\frac{1}{8}$ (il y a 1 dame parmi les 8 cœurs).

3.3 Arbres pondérés

★ Théorème | Règles de l'arbre pondéré

- Sur chaque branche on écrit une probabilité ; la **première** est « normale », les **suivantes** sont **conditionnelles**.
- **Somme des branches** : la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1.
- **Règle du produit** : la probabilité d'un **chemin** est le **produit** des probabilités de ses branches.
- **Règle de la somme** : la probabilité d'un **événement** est la **somme** des probabilités des chemins qui le réalisent.

✂ Méthode | Construire et lire un arbre, pas à pas

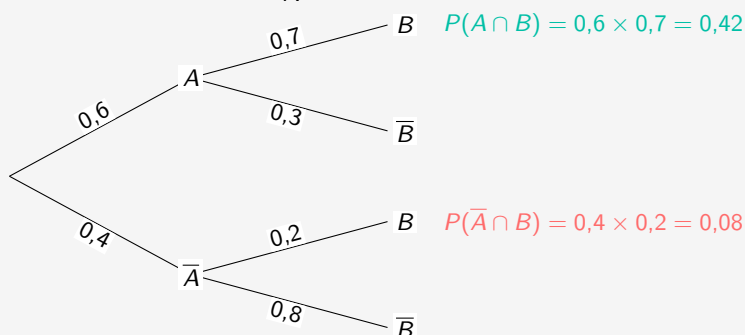
1. **Premier niveau.** On choisit le premier événement et son contraire ($A, \bar{A}$). Sur ces deux branches on écrit $P(A)$ et $P(\bar{A})$: leur somme fait 1.
2. **Deuxième niveau.** Depuis **chaque** nœud, on repart vers B et $\bar{B}$. Les probabilités y sont **conditionnelles** : $P_A(B)$ depuis le nœud A , $P_{\bar{A}}(B)$ depuis le nœud $\bar{A}$. À chaque nœud, les deux branches somment encore à 1 (donc $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$).
3. **Probabilité d'un chemin.** On **multiplie** toutes les probabilités rencontrées le long du chemin. Le chemin « A puis B » donne $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
4. **Probabilité d'un événement.** On repère **tous** les chemins qui le réalisent et on **additionne** leurs probabilités.

Pourquoi ça marche ? *Multiplier* traduit la règle du produit ($P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$) ; *additionner* traduit le fait que les différents chemins mènent à des situations **incompatibles** (on ne peut pas

suivre deux chemins en même temps), et les probabilités d'événements incompatibles s'ajoutent.

💡 Exemple | Lire un arbre

$P(A) = 0,6$, et selon A : $P_A(B) = 0,7$, $P_{\bar{A}}(B) = 0,2$.



Par la règle de la somme : $P(B) = 0,42 + 0,08 = 0,50$.

3.4 Tableaux croisés d'effectifs

🔧 Méthode | Lire des probabilités dans un tableau

Quand une population est décrite par un **tableau croisé**, on tire un individu au hasard (équiprobabilité). Alors toute probabilité est un **quotient d'effectifs** :

$$P(A) = \frac{\text{effectif de } A}{\text{effectif total}}, \quad P_A(B) = \frac{\text{effectif de } A \cap B}{\text{effectif de } A}.$$

💡 Exemple | Probabilités à partir d'un tableau

Dans un lycée de 200 élèves :

	Externe (E)	Demi-pension (D)	Total
Fille (F)	40	70	110
Garçon (G)	30	60	90
Total	70	130	200

$P(F) = \frac{110}{200} = 0,55$. $P(F \cap D) = \frac{70}{200} = 0,35$. $P_D(F) = \frac{70}{130} \approx 0,54$ (parmi les demi-pensionnaires). $P_F(D) = \frac{70}{110} \approx 0,64$ (parmi les filles). On voit que $P_D(F) \neq P_F(D)$.

3.5 Partition et formule des probabilités totales

Définition | Partition de l'univers (système complet)

Des événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une **partition** de l'univers (un **système complet d'événements**) lorsqu'ils sont **deux à deux incompatibles** ($A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$) et que leur **réunion** est Ω . Le cas le plus simple est $\{A; \bar{A}\}$.

★ Théorème | Formule des probabilités totales

Si $A_1, \dots, A_n$ est une partition de Ω (chaque $P(A_i) \neq 0$), alors pour tout événement B :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P_{A_i}(B).$$

En particulier, avec la partition $\{A; \bar{A}\}$:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) P_A(B) + P(\bar{A}) P_{\bar{A}}(B).$$

Démonstration | Formule des probabilités totales

Comme les A_i recouvrent Ω et sont incompatibles, l'événement B se découpe en morceaux disjoints :

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B),$$

où ces morceaux sont deux à deux incompatibles. La probabilité d'une réunion d'événements incompatibles est la somme des probabilités :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P_{A_i}(B)$$

(la dernière égalité par la règle du produit). ■

Intuition | C'est exactement la règle de la somme sur l'arbre

La formule des probabilités totales, c'est « on additionne tous les chemins qui mènent à B ». Sur l'arbre $\{A; \bar{A}\}$, B est atteint par deux chemins : par A (poids $P(A)P_A(B)$) et par $\bar{A}$ (poids $P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$). On les additionne.

Exemple | Application

Une usine a deux machines. La machine 1 produit 60% des pièces, dont 5% sont défectueuses ; la machine 2 produit 40% des pièces, dont 8% défectueuses. Quelle est la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit défectueuse (D) ?

Avec la partition $\{M_1; M_2\}$: $P(D) = P(M_1)P_{M_1}(D) + P(M_2)P_{M_2}(D) = 0,6 \times 0,05 + 0,4 \times 0,08 =$

$$0,03 + 0,032 = 0,062.$$

3.6 Indépendance de deux événements

Définition | Événements indépendants

Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

★ Théorème | Caractérisation par la conditionnelle

Si $P(A) \neq 0$, alors A et B sont indépendants si et seulement si

$$P_A(B) = P(B).$$

Autrement dit : savoir que A est réalisé **ne change pas** la probabilité de B .

Démonstration | Équivalence des deux définitions

Par définition, $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Si A, B sont indépendants, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, donc $P_A(B) = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$. Réciproquement, si $P_A(B) = P(B)$, alors $P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P(A)P(B)$: indépendance. ■

Attention | Indépendant n'est PAS incompatible

Deux événements **incompatibles** (disjoints, $A \cap B = \emptyset$) ne sont presque jamais indépendants : si A est réalisé, alors B ne l'est pas, donc A **change tout** pour B . **Incompatible** = « ne peuvent pas arriver ensemble » ; **indépendant** = « n'ont aucune influence l'un sur l'autre ». Ce sont des idées **opposées**.

Exemple | Tester l'indépendance

On lance deux fois une pièce équilibrée. A : « pile au 1^{er} lancer », B : « pile au 2^e lancer ». $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ (un seul cas PP sur 4). Comme $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, A et B sont **indépendants** : le premier lancer n'influe pas sur le second.

Intuition | Indépendance : un test en deux temps

Pour décider si A et B sont indépendants, deux réflexes équivalents :

- **Par le calcul** : vérifier si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

— **Par le sens** : se demander « savoir que A est réalisé change-t-il la probabilité de B ? ». Si la réponse est **non**, ils sont indépendants.

Attention : l'indépendance ne se « voit » pas sur un dessin, elle se **calcule**. Deux événements peuvent sembler liés et être pourtant indépendants (« premier dé = 6 » et « somme = 7 », exercice 8), ou sembler séparés sans l'être. Ne te fie qu'au calcul.

3.7 Inverser le conditionnement (situations de « faux positifs »)

Méthode | Passer de $P_A(B)$ à $P_B(A)$

On veut souvent $P_B(A)$ alors qu'on connaît $P_A(B)$ (et $P_{\bar{A}}(B)$). On combine la définition et les probabilités totales :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) P_A(B)}{P(A) P_A(B) + P(\bar{A}) P_{\bar{A}}(B)}.$$

En pratique : on construit l'**arbre**, on calcule $P(A \cap B)$ (un chemin) et $P(B)$ (somme des chemins), puis on divise.

Exemple | Pourquoi un test positif n'est pas une condamnation

Une maladie touche 1% de la population. Un test la détecte dans 90% des cas chez un malade, mais donne 5% de « faux positifs » chez un bien-portant. Quelle est la probabilité d'être malade (M) sachant que le test est positif (+) ?

$$P(+) = P(M)P_{M}(+) + P(\bar{M})P_{\bar{M}}(+) = 0,01 \times 0,9 + 0,99 \times 0,05 = 0,009 + 0,0495 = 0,0585.$$

$$P_{+}(M) = \frac{P(M \cap +)}{P(+)} = \frac{0,009}{0,0585} \approx 0,154.$$

Surprise : même avec un test positif, la probabilité d'être malade n'est que d'environ **15%** ! (Parce que la maladie est rare, les faux positifs sont très nombreux.) C'est tout l'enjeu de **ne pas confondre** $P_M(+)$ et $P_{+}(M)$.

 Intuition | Voir les faux positifs sur 10 000 personnes

Le calcul paraît abstrait : rendons-le concret sur 10 000 personnes (maladie à 1%, test positif chez 90% des malades et 5% des bien-portants).

- **Malades** : 1% de 10 000 = 100 personnes. Parmi elles, 90% sont positives : **90 vrais positifs**.
- **Bien-portants** : 9 900 personnes. Parmi elles, 5% sont (à tort) positives : **495 faux positifs**.
- **Total de positifs** : $90 + 495 = 585$. Or sur ces 585 positifs, seuls 90 sont vraiment malades :

$$P_+(M) = \frac{90}{585} \approx 0,154.$$

La morale : les bien-portants étant très nombreux, même un petit taux de faux positifs (5%) produit énormément de positifs à tort, qui « noient » les vrais malades. C'est tout l'enjeu de ne pas confondre $P_M(+)$ (grande : un malade est presque toujours détecté) et $P_+(M)$ (petite : un positif est rarement malade quand la maladie est rare).

4 🐼 Pour aller plus loin : une marche aléatoire

🧠 Intuition | Du hasard local à une trajectoire globale

Une marche aléatoire se construit pas après pas. À chaque étape, on avance de $+1$ avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou de -1 avec probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment des pas précédents. Une trajectoire compliquée naît donc de la répétition d'une expérience très simple.

📖 Définition | Position après n pas

On part de $S_0 = 0$. Si le $(n+1)$ -ième pas vaut $X_{n+1} \in \{-1, 1\}$, alors

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}.$$

Après n pas, S_n est la somme des n déplacements. Une position positive signifie que la marche se trouve à droite de l'origine ; une position négative, à gauche.

💡 Exemple | Revenir à l'origine en quatre pas

Pour revenir en 0 après quatre pas, il faut exactement deux pas $+1$ et deux pas -1 . Les six ordres possibles sont

$++--$, $+-+-$, $+--+$, $-++-$, $-+-+$, $--++$.

Il existe $2^4 = 16$ trajectoires de quatre pas, toutes de probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$. Ainsi

$$P(S_4 = 0) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

On a multiplié le long de chaque chemin, puis additionné les six chemins favorables.

🔧 Méthode | Simuler une trajectoire

```
1 from random import choice
2
3 def marche(n):
4     position = 0
5     trajectoire = [0]
6     for k in range(n):
7         pas = choice([-1, 1])
8         position = position + pas
9         trajectoire.append(position)
10    return trajectoire
```

La liste renvoyée contient toutes les positions successives. Deux exécutions donnent généralement deux trajectoires différentes : c'est normal, car une simulation reproduit le hasard au lieu de calculer une probabilité exacte.

⚠ Attention | Indépendant ne veut pas dire sans histoire

Les **pas** sont indépendants : connaître les anciens pas ne change pas la probabilité du prochain. En revanche, la **position** S_n dépend de tous les pas précédents, puisqu'elle est leur somme. Il faut toujours préciser quels objets sont supposés indépendants.

5 Boîte à outils : réflexes pour le bac

Méthode | Les réflexes essentiels

1. **Conditionnelle** : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ (penser « part de B dans A »).
2. **Produit** : $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$ (multiplier le long d'un chemin).
3. **Probabilités totales** : $P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$ (additionner les chemins).
4. **Arbre** : somme des branches d'un nœud = 1 ; produit sur un chemin ; somme des chemins.
5. **Indépendance** : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, soit $P_A(B) = P(B)$.
6. **Inversion** : $P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$ (toujours via l'arbre).
7. **Tableau croisé** : toute probabilité est un quotient d'effectifs.

Méthode | Formulaire complet

Objet	Formule
Conditionnelle	$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
Règle du produit	$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$
Probabilités totales	$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$
Indépendance	$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ($P_A(B) = P(B)$)
Inversion (Bayes)	$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$
Contraire / réunion	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Attention | Top 6 des erreurs à éviter

1. **Confondre** $P_A(B)$ et $P_B(A)$ (l'erreur n°1, cf. faux positifs).
2. **Confondre indépendant et incompatible** (ce sont des idées opposées).
3. **Oublier de pondérer** dans les probabilités totales (multiplier par $P(A_i)$).
4. **Additionner les probabilités le long d'un chemin** (on les multiplie).
5. **Écrire** $P_A(B) = P(A \cap B)$ (oubli du dénominateur $P(A)$).
6. **Croire que** $P_A(B) + P_A(\bar{B}) \neq 1$: si, ils valent 1 (même nœud).

 Méthode | Algorithme : méthode de Monte-Carlo (estimer π)

On tire des points au hasard dans le carré $[0; 1]^2$; la proportion qui tombe dans le quart de disque approche son aire $\frac{\pi}{4}$.

```
1 import random
2
3 def estimer_pi(n):
4     dedans = 0
5     for _ in range(n):
6         x, y = random.random(), random.random()    # point au hasard
7         if x*x + y*y <= 1:                          # dans le quart
8             de disque
9             dedans += 1
10
11     return 4 * dedans / n                          # 4 x (pi/4) = pi
12
13 print(estimer_pi(1000000))    # ~ 3.14
```

6 Exercices

Exercice 1 : Probabilité conditionnelle directe

On donne $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,2$.

1. Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.
2. A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 2 : Règle du produit

On donne $P(A) = 0,3$ et $P_A(B) = 0,6$. Calculer $P(A \cap B)$.

Exercice 3 : Lire un arbre

On considère l'arbre : $P(A) = 0,2$; $P_A(B) = 0,9$; $P_{\bar{A}}(B) = 0,3$.

1. Calculer $P(A \cap B)$ et $P(\bar{A} \cap B)$.
2. En déduire $P(B)$.

Exercice 4 : Tableau croisé

Sur 500 clients, 300 sont des femmes ; 180 femmes et 80 hommes ont acheté en ligne (L).

1. Compléter mentalement les effectifs, puis calculer $P(L)$.
2. Calculer $P_F(L)$ (probabilité d'acheter en ligne sachant que c'est une femme).
3. Calculer $P_L(F)$. Comparer avec $P_F(L)$.

Exercice 5 : Réunion et contraire

On donne $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$, $P(A \cap B) = 0,25$. Calculer $P(A \cup B)$ et $P(\bar{A})$.

Exercice 6 : Arbre et probabilités totales

Un sac contient 3 jetons rouges et 2 bleus. On tire un jeton, on note sa couleur, on le **remet**, puis on tire un second jeton.

1. Représenter la situation par un arbre.
2. Calculer la probabilité d'obtenir deux jetons de la même couleur.

Exercice 7 : Tester l'indépendance

On donne $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,3$. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier de deux façons.

Exercice 8 : Deux dés

On lance deux dés équilibrés. A : « le premier dé donne 6 », B : « la somme vaut 7 ».

1. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.
2. A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 9 ★★☆☆ : Deux machines

La machine 1 fabrique 70% des pièces (3% défectueuses), la machine 2 les 30% restants (5% défectueuses). Calculer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse.

Exercice 10 ★★☆☆ : Inversion

Avec les données de l'exercice 9, une pièce est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de la machine 2 ?

Exercice 11 ★★☆☆ : Tableau et indépendance

Dans un groupe, on classe les personnes selon le sport (S) et la musique (M) :

	M	$\overline{M}$	Total
S	24	16	40
$\overline{S}$	36	24	60
Total	60	40	100

Les événements S et M sont-ils indépendants ? Justifier par le calcul.

Exercice 12 ★★★★★ : Faux positifs

Une maladie touche 2% d'une population. Un test est positif chez 95% des malades et chez 4% des bien-portants.

1. Calculer la probabilité qu'un test soit positif.
2. Calculer la probabilité d'être malade sachant que le test est positif. Commenter.

Exercice 13 ★★★★★ : Démonstrations

1. Démontrer la formule des probabilités totales pour la partition $\{A; \overline{A}\}$.
2. Montrer que si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont aussi.

Exercice 14 ★★★★★ : Tirage sans remise

Une urne contient 4 boules rouges et 3 noires. On tire deux boules **successivement et sans remise**.

1. Construire l'arbre (attention : les probabilités du 2^e tirage dépendent du 1^{er}).
2. Calculer la probabilité de tirer deux boules rouges, puis la probabilité d'obtenir une rouge et une noire (dans un ordre quelconque).

Exercice 15 ★★★★★ : Succession d'épreuves indépendantes

Un joueur réussit un panier avec probabilité 0,8, indépendamment d'un tir à l'autre. Il tire 3 fois.

1. Probabilité de réussir les trois tirs.
2. Probabilité de rater au moins un tir.

Exercice 16 ★★ ★ : Inversion dans un tableau

Reprendre le tableau lycée du cours (110 filles, 90 garçons ; 70 externes, 130 demi-pensionnaires ; 40 filles externes). Un élève tiré au sort est externe : quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

7 🧠 Problème : *Contrôle qualité* ★★ ★

🔥 Problème style prépa

Une entreprise reçoit des composants de deux fournisseurs : F_1 livre 70% des composants, F_2 les 30% restants. Parmi les composants de F_1 , 2% sont défectueux ; parmi ceux de F_2 , 6% le sont. On prélève un composant au hasard. Ce problème combine arbre, probabilités totales, inversion (Bayes) et indépendance.

Partie A : arbre et probabilités totales

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation (fournisseur, puis défectueux D ou non).
2. Calculer $P(F_1 \cap D)$ et $P(F_2 \cap D)$.
3. En déduire la probabilité $P(D)$ qu'un composant soit défectueux.

Partie B : inversion (d'où vient le défaut ?)

4. Un composant prélevé est défectueux. Calculer la probabilité qu'il provienne de F_2 , soit $P_D(F_2)$.
5. Commenter : pourquoi cette probabilité est-elle bien plus grande que les 30% de composants fournis par F_2 ?

Partie C : deux composants indépendants

6. On prélève deux composants « au hasard » (tirages indépendants). Calculer la probabilité que les **deux** soient bons.
7. Calculer la probabilité qu'**au moins un** des deux soit défectueux.

Partie D : un bon composant

8. Un composant prélevé est **bon** ($\overline{D}$). Calculer la probabilité qu'il provienne de F_1 , soit $P_{\overline{D}}(F_1)$.

8 Corrigés détaillés

Intuition | Comment lire un corrigé

Chaque corrigé rappelle la méthode et détaille tous les calculs. Réflexe du chapitre : **fais un arbre** (ou un tableau), multiplie le long des chemins, additionne les chemins.

Corrigé 1

Démonstration

- $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$. $P_B(A) = \frac{0,2}{0,5} = 0,4$.
- $P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,5 = 0,2 = P(A \cap B)$: A et B sont **indépendants**.

Corrigé 2

Démonstration

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,3 \times 0,6 = 0,18.$$

Corrigé 3

Démonstration

- $P(A \cap B) = 0,2 \times 0,9 = 0,18$; $P(\bar{A} \cap B) = 0,8 \times 0,3 = 0,24$.
- $P(B) = 0,18 + 0,24 = 0,42$ (formule des probabilités totales).

Corrigé 4

Démonstration

Effectifs : 300 femmes, 200 hommes ; L : $180 + 80 = 260$.

- $P(L) = \frac{260}{500} = 0,52$.
- $P_F(L) = \frac{180}{300} = 0,6$.
- $P_L(F) = \frac{180}{260} \approx 0,69$. On a $P_L(F) \neq P_F(L)$.

Corrigé 5

Démonstration

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,4 - 0,25 = 0,65. \quad P(\bar{A}) = 1 - 0,5 = 0,5.$$

Corrigé 6

 Démonstration

À chaque tirage (avec remise) : $P(R) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{2}{5}$, et les deux tirages sont **indépendants**.

$$P(\text{même couleur}) = P(RR) + P(BB) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{4}{25} = \frac{13}{25} = 0,52.$$

Corrigé 7

 Démonstration

1^{re} façon : $P(A) \times P(B) = 0,6 \times 0,5 = 0,3 = P(A \cap B)$: indépendants.

2^e façon : $P_A(B) = \frac{0,3}{0,6} = 0,5 = P(B)$: savoir A ne change pas $P(B)$, donc **indépendants**.

Corrigé 8

 Démonstration

1. $P(A) = \frac{1}{6}$. La somme 7 s'obtient par 6 couples sur 36, donc $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. $A \cap B$: premier dé 6 et somme 7, soit le seul couple $(6; 1)$: $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$.

2. $P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = P(A \cap B)$: A et B sont **indépendants** (résultat surprenant mais vrai).

Corrigé 9

 Démonstration

$$P(D) = P(M_1)P_{M_1}(D) + P(M_2)P_{M_2}(D) = 0,7 \times 0,03 + 0,3 \times 0,05 = 0,021 + 0,015 = 0,036.$$

Corrigé 10

 Démonstration

$$P_D(M_2) = \frac{P(M_2 \cap D)}{P(D)} = \frac{0,015}{0,036} \approx 0,42. \text{ (Environ 42\% des pièces défectueuses viennent de la machine 2.)}$$

Corrigé 11

 Démonstration

$$P(S) = \frac{40}{100} = 0,4, P(M) = \frac{60}{100} = 0,6, P(S \cap M) = \frac{24}{100} = 0,24. \text{ Comme } P(S) \times P(M) = 0,4 \times 0,6 = 0,24 = P(S \cap M), \text{ les événements } S \text{ et } M \text{ sont } \mathbf{indépendants}.$$

Corrigé 12

 Démonstration

1. $P(+) = P(M)P_{M|+} + P(\overline{M})P_{\overline{M}|+} = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,04 = 0,019 + 0,0392 = 0,0582$.
2. $P_+(M) = \frac{P(M \cap +)}{P(+)} = \frac{0,019}{0,0582} \approx 0,326$. Même avec un test positif, on n'a qu'environ 33% de risque d'être malade : la maladie étant rare, les faux positifs (issus des 98% de bien-portants) sont très nombreux.

Corrigé 13

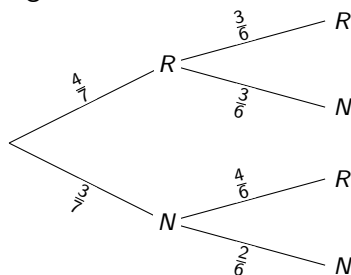
 Démonstration

1. A et $\overline{A}$ forment une partition, donc $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$, réunion d'événements incompatibles. Donc $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$.
2. Si A, B indépendants : $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\overline{A})$. Donc $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Corrigé 14

 Démonstration

1. Sans remise, après un premier tirage il reste 6 boules. Arbre (R rouge, N noire) :



2. $P(RR) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$. Une rouge et une noire : $P(RN) + P(NR) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{12}{42} + \frac{12}{42} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$.

Corrigé 15

 Démonstration

1. Tirs indépendants : $P(3 \text{ réussis}) = 0,8^3 = 0,512$.
2. $P(\text{au moins un raté}) = 1 - P(3 \text{ réussis}) = 1 - 0,512 = 0,488$.

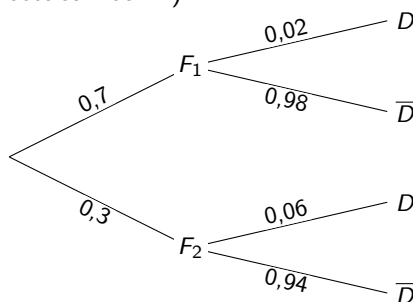
Corrigé 16

✎ Démonstration

$$P_E(F) = \frac{\text{filles externes}}{\text{externes}} = \frac{40}{70} = \frac{4}{7} \approx 0,57.$$

Corrigé du problème : Contrôle qualité

✎ Démonstration / Partie A : arbre et probabilités totales

1. Arbre (fournisseur, puis D défectueux ou $\bar{D}$) :

$$2. P(F_1 \cap D) = 0,7 \times 0,02 = 0,014; \quad P(F_2 \cap D) = 0,3 \times 0,06 = 0,018.$$

$$3. P(D) = 0,014 + 0,018 = 0,032.$$

✎ Démonstration / Partie B : inversion

$$4. P_D(F_2) = \frac{P(F_2 \cap D)}{P(D)} = \frac{0,018}{0,032} = 0,5625.$$

5. Bien que F_2 ne fournisse que 30% des composants, son **taux de défaut** (6%) est trois fois celui de F_1 (2%). Parmi les composants défectueux, F_2 est donc surreprésenté : il en fournit plus de la moitié (56,25%).

✎ Démonstration / Partie C : deux composants indépendants

6. Un composant est bon avec probabilité $P(\bar{D}) = 1 - 0,032 = 0,968$. Les deux prélèvements étant indépendants :

$$P(\text{deux bons}) = 0,968^2 = 0,937024 \approx 0,937.$$

$$7. P(\text{au moins un défectueux}) = 1 - P(\text{deux bons}) = 1 - 0,937 = 0,063.$$

✎ Démonstration / Partie D : un bon composant

$$8. P_{\bar{D}}(F_1) = \frac{P(F_1 \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{0,7 \times 0,98}{0,968} = \frac{0,686}{0,968} \approx 0,709. \text{ Un composant en bon état provient de } F_1 \text{ avec une probabilité d'environ } 71\%.$$

Bilan de la fiche. Tu sais désormais : calculer une probabilité conditionnelle $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, construire et lire un **arbre pondéré** (produit le long, somme des chemins), appliquer la **formule des probabilités totales**, tester l'**indépendance**, et surtout **inverser** un conditionnement (distinguer $P_A(B)$ et $P_B(A)$, faux positifs). C'est la base des variables aléatoires (fiche suivante).

9 Fiche-mémoire

Conditionner : changer l'univers de référence

Définition | Conditionnelle

Si $P(A) > 0$,

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B).$$

Méthode | Indépendance

A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Si $P(A) > 0$, cela revient à $P_A(B) = P(B)$.

Méthode | Arbre pondéré

Somme des branches issues d'un nœud : 1. Multiplier le long d'un chemin ; additionner les chemins qui réalisent le même événement.

Méthode | Inverser

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}.$$

Refaire l'arbre et calculer d'abord $P(B)$; ne jamais permuter simplement les indices.

Méthode | Probabilités totales

Pour une partition (A_i) ,

$$P(B) = \sum_i P(A_i)P_{A_i}(B).$$

Méthode | Simulation

Une fréquence observée approche une probabilité lorsque le nombre de répétitions augmente, mais fluctue d'une exécution à l'autre.

Attention | L'erreur la plus grave

$P_A(B)$ et $P_B(A)$ sont deux questions différentes. Indépendants ne signifie pas incompatibles. Dans une marche aléatoire, les pas peuvent être indépendants alors que la position dépend de toute l'histoire.