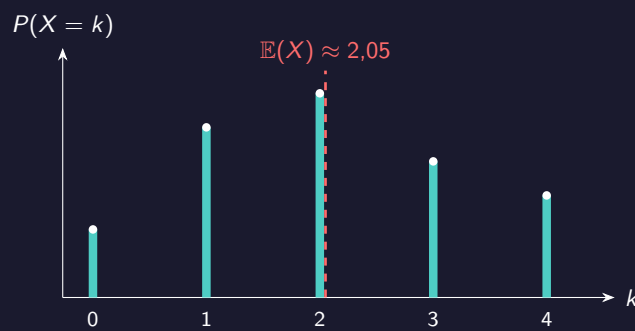


Variables aléatoires

Loi de probabilité ■ Espérance ■ Variance & écart-type



Première ■ Spécialité Mathématiques ■ Programme officiel

 Cours complet

 16 exercices

 Problème prépa

 Corrigés

Table des matières

1	❓ Pourquoi les variables aléatoires ?	3
1.1	Du « lancer de dé » au « nombre qui dépend du hasard »	3
1.2	Les deux questions clés : « en moyenne ? » et « à quel point ça varie ? »	3
1.3	L'idée directrice	3
2	🧠 L'idée avant la formule	4
2.1	Une variable aléatoire, c'est une « machine à transformer le hasard en nombre »	4
2.2	La loi : la « carte d'identité » de la variable	4
2.3	L'espérance : la moyenne « sur le très long terme »	4
2.4	La variance et l'écart-type : la « largeur » du nuage	5
3	🎓 Le cours complet	6
3.1	Variable aléatoire et notations	6
3.2	Loi de probabilité	6
3.3	Espérance	7
3.4	Variance et écart-type	8
3.5	Transformations affines : $\mathbb{E}(aX + b)$ et $\mathbb{V}(aX + b)$	10
3.6	Pour aller plus loin : la meilleure « prévision » (approfondissement)	12
3.7	Échantillon et simulation : l'espérance se « voit » en répétant	12
3.8	Expérimentation officielle : plusieurs échantillons	13
4	🧰 Boîte à outils : réflexes pour le bac	15
5	✎ Exercices	18
6	🔑 Problème type prépa	20
7	✔ Corrigés détaillés	21
8	📖 Fiche-mémoire	30

1 ? Pourquoi les variables aléatoires ?

1.1 Du « lancer de dé » au « nombre qui dépend du hasard »

Jusqu'ici, le hasard donnait des **événements** : « obtenir Pile », « tirer une boule rouge ». Mais dans la vraie vie, ce qui nous intéresse, c'est souvent un **nombre** : le **gain** à un jeu, le **nombre** de clients dans une file, la **durée** d'attente d'un bus, le **score** à un QCM répondu au hasard. Une **variable aléatoire**, c'est exactement ça : **un nombre dont la valeur dépend du résultat d'une expérience aléatoire**.



1.2 Les deux questions clés : « en moyenne ? » et « à quel point ça varie ? »

Dès qu'un nombre dépend du hasard, on veut savoir deux choses. **(1)** Autour de quelle valeur se situe-t-il **en moyenne**, si on répète l'expérience un grand nombre de fois ? C'est l'**espérance** $\mathbb{E}(X)$. **(2)** À quel point les résultats sont-ils **dispersés** autour de cette moyenne, groupés ou éparpillés ? C'est la **variance** $\mathbb{V}(X)$ et l'**écart-type** $\sigma(X)$.

Intuition | Deux jeux peuvent avoir la même moyenne mais pas le même risque

Jeu A : tu gagnes toujours 2 €. Jeu B : une fois sur deux tu gagnes 102 €, une fois sur deux tu perds 98 €. Les deux ont la **même espérance** ($\mathbb{E} = 2$ €), mais le jeu B est **infiniment plus risqué**. La moyenne ne suffit pas : il faut aussi mesurer la **dispersion**. C'est tout le rôle de la variance et de l'écart-type.

1.3 L'idée directrice

L'idée directrice :

Une **variable aléatoire** X transforme chaque résultat du hasard en un **nombre**. Sa **loi** est la liste de toutes ses valeurs possibles avec leurs **probabilités**. À partir de cette loi, on calcule l'**espérance** (la moyenne « sur le long terme », $\mathbb{E}(X) = \sum x_i p_i$) et l'**écart-type** (la dispersion autour de cette moyenne). Tout le chapitre tient dans ce trio : **loi, espérance, dispersion**.

Intuition | Pourquoi c'est un chapitre clé

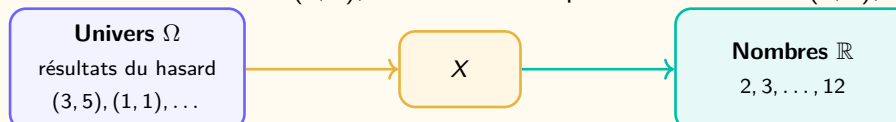
Les variables aléatoires sont le **langage** de toute la probabilité moderne et de la statistique. C'est ce chapitre qui prépare la **loi binomiale** et les grands théorèmes de Terminale (loi des grands nombres, intervalles de confiance). Et l'**espérance** est l'outil de décision n°1 dès qu'il y a de l'incertitude : assurances, finance, intelligence artificielle, jeux. Bien comprendre $\mathbb{E}$ et σ aujourd'hui, c'est se simplifier énormément la Terminale.

2 L'idée avant la formule

2.1 Une variable aléatoire, c'est une « machine à transformer le hasard en nombre »

Intuition | De l'univers vers les nombres →

Imagine une expérience aléatoire : ses résultats possibles forment l'**univers** Ω . Une variable aléatoire X est une **règle** qui à **chaque** résultat associe **un nombre**. Exemple : on lance deux dés, $X =$ « la somme des deux dés ». Au résultat $(3, 5)$, la machine X répond 8. Au résultat $(1, 1)$, elle répond 2.



Bref : **une variable aléatoire est une fonction** qui part de l'univers et arrive dans les nombres réels. C'est tout. Le mot « variable » dit qu'elle prend plusieurs valeurs ; le mot « aléatoire » dit que c'est le hasard qui décide laquelle.

2.2 La loi : la « carte d'identité » de la variable

Intuition | Lister les valeurs et leurs chances

Connaître une variable aléatoire, ce n'est pas connaître sa valeur (le hasard ne l'a pas encore décidée!). C'est connaître la **liste de ses valeurs possibles**, et pour **chacune**, sa **probabilité**. Cette liste s'appelle la **loi de probabilité**. On la range presque toujours dans un **tableau** :

valeur x_i	x_1	x_2	...
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...

Une seule règle d'or : la somme de toutes les probabilités vaut **exactement 1** (l'un des résultats **va** forcément arriver).

2.3 L'espérance : la moyenne « sur le très long terme »

Intuition | Si tu rejouais 1000 fois, combien gagnerais-tu en moyenne ? ∞

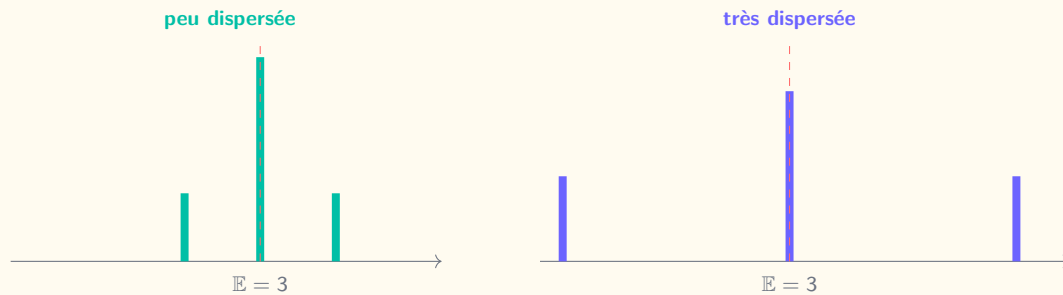
L'espérance n'est rien d'autre qu'une **moyenne**, mais une moyenne où chaque valeur est **pondérée** par sa probabilité (les valeurs fréquentes comptent plus). Concrètement : si tu répétais l'expérience des **milliers de fois** et que tu faisais la moyenne de tous tes résultats, tu tomberais très près de $\mathbb{E}(X)$.

Exemple parlant. Une roue donne 0 € (1 fois sur 2), 10 € (1 fois sur 4) ou 40 € (1 fois sur 4). Sur 4 parties « typiques », tu gagnes environ $0 + 0 + 10 + 40 = 50$ €, soit 12,5 € **par partie**. C'est exactement $0 \times \frac{1}{2} + 10 \times \frac{1}{4} + 40 \times \frac{1}{4} = 12,5$. L'espérance, c'est ce « par partie en moyenne ».

2.4 La variance et l'écart-type : la « largeur » du nuage

Intuition | Groupé ou éparpillé ? ↔

Deux variables peuvent avoir la **même** espérance et pourtant « se comporter » de façon très différente : l'une reste collée à la moyenne, l'autre part dans tous les sens. La **variance** mesure cet éparpillement : c'est la **moyenne des carrés des écarts à l'espérance**. On l'élève au carré pour que les écarts au-dessus et en dessous ne s'annulent pas. L'**écart-type** $\sigma = \sqrt{V}$ ramène cette mesure à la même unité que X (des euros, des points...), donc il est plus « lisible ».



Même centre, « largeur » très différente : la variance distingue ces deux situations que l'espérance, seule, confondrait.

3 Le cours complet

3.1 Variable aléatoire et notations

Définition | Variable aléatoire réelle

On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω (la liste de tous les résultats possibles). Une **variable aléatoire réelle** X est une **fonction** qui, à chaque résultat ω de Ω , associe un nombre réel noté $X(\omega)$.
L'ensemble des valeurs que peut prendre X est noté $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Attention | Le vocabulaire : $\{X = a\}$ est un événement

X est un **nombre** (aléatoire), mais dès qu'on fixe une valeur a , l'écriture $\{X = a\}$ désigne un **événement** : « l'ensemble des résultats pour lesquels X vaut a ». On peut donc lui attribuer une probabilité, notée $P(X = a)$. De même :

- $\{X \leq a\}$: l'événement « X prend une valeur inférieure ou égale à a », de probabilité $P(X \leq a)$;
- $\{X < a\}$, $\{X \geq a\}$, $\{a \leq X \leq b\}$: même principe.

Passer du français aux symboles (et inversement) est une capacité attendue au bac : « au moins 2 » s'écrit $\{X \geq 2\}$, « strictement plus de 3 » s'écrit $\{X > 3\}$, etc.

Exemple | La somme de deux dés

On lance deux dés équilibrés et X est la **somme** des deux faces. Alors $X(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$. Par exemple l'événement $\{X = 4\}$ regroupe les résultats $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$, donc

$$P(X = 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

L'événement $\{X \leq 3\}$ regroupe $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, donc $P(X \leq 3) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

3.2 Loi de probabilité

Définition | Loi de probabilité d'une variable aléatoire

La **loi de probabilité** de X est la donnée de toutes les valeurs x_i de $X(\Omega)$ et, pour chacune, de la probabilité $p_i = P(X = x_i)$. On la présente dans un tableau :

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

✓ Propriété | La somme des probabilités vaut 1

Pour toute variable aléatoire,

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1.$$

Démonstration | Pourquoi la somme fait 1

Les événements $\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \dots, \{X = x_n\}$ sont **deux à deux incompatibles** (un même résultat ne peut pas donner deux valeurs différentes de X) et leur réunion est **l'univers tout entier** (le hasard donne **toujours** une valeur à X). Ils forment donc une **partition** de Ω . Or la somme des probabilités d'une partition vaut $P(\Omega) = 1$. D'où le résultat. Cette égalité est aussi un **outil de vérification** précieux : si tes probabilités ne totalisent pas 1, il y a une erreur quelque part.

Méthode | Déterminer la loi d'une variable aléatoire

1. **Identifier les valeurs** possibles : lister $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
2. **Calculer chaque probabilité** $P(X = x_i)$: par dénombrement, par un arbre, ou avec un tableau croisé (fiche 9).
3. **Dresser le tableau** de la loi.
4. **Vérifier** que la somme des probabilités vaut bien 1.

Exemple | Loi complète de la somme de deux dés

En dénombrant les 36 résultats équiprobables, on obtient :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Vérification : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$ donc la somme des probabilités vaut $\frac{36}{36} = 1$. La valeur la plus probable est 7 : c'est logique, c'est celle qui se réalise du plus grand nombre de façons.

3.3 Espérance

Définition | Espérance d'une variable aléatoire

L'**espérance** de X , notée $\mathbb{E}(X)$ (parfois μ), est la **moyenne des valeurs pondérée par les probabilités** :

$$\mathbb{E}(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

Intuition | Lire la formule comme une moyenne de classe

C'est exactement le calcul d'une **moyenne pondérée**. Si dans une classe 10% ont 8, 60% ont 12 et 30% ont 16, la moyenne est $8 \times 0,10 + 12 \times 0,60 + 16 \times 0,30 = 12,8$. Pour une variable aléatoire, on remplace juste les « pourcentages d'élèves » par des « probabilités » : la formule est la même.

Attention | L'espérance n'est pas toujours une valeur atteinte

L'espérance de la somme de deux dés vaut 7 (heureusement, 7 est possible). Mais l'espérance d'un dé à six faces vaut $\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5 \dots$ et on n'obtient **jamais** 3,5 ! L'espérance est une **moyenne théorique**, pas une prédiction du prochain résultat. Elle dit ce qui se passe « en moyenne sur un grand nombre de répétitions ».

Définition | Jeu équitable

Dans un jeu où X désigne le **gain algébrique** du joueur (gains comptés positivement, pertes négativement, **mise comprise**), le jeu est dit :

- **équitable** si $\mathbb{E}(X) = 0$ (ni avantage, ni désavantage sur le long terme) ;
- **favorable** au joueur si $\mathbb{E}(X) > 0$, **défavorable** si $\mathbb{E}(X) < 0$.

Exemple | Un jeu de fête foraine

On paie 3 € pour lancer un dé. On reçoit le nombre d'euros indiqué par la face (donc de 1 à 6 €). Soit X le **gain algébrique** (ce qu'on reçoit moins la mise).

gain x_i	-2	-1	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

(Si la face est 1, on reçoit 1 € pour 3 € payés, gain -2, etc.) Alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}(-2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3) = \frac{3}{6} = 0,5.$$

$\mathbb{E}(X) = 0,5 > 0$: le jeu est **favorable au joueur** (en moyenne il gagne 0,50 € par partie). L'organisateur a donc intérêt à augmenter la mise : avec une mise de 3,50 €, on aurait $\mathbb{E}(X) = 0$, le jeu serait **équitable**.

3.4 Variance et écart-type

Définition | Variance et écart-type

Soit $\mu = \mathbb{E}(X)$. La **variance** de X est la moyenne des carrés des écarts à l'espérance :

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \mu)^2 = (x_1 - \mu)^2 p_1 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n.$$

L'**écart-type** de X est la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

La variance est **toujours positive** (somme de carrés multipliés par des probabilités positives).

Intuition | Pourquoi des carrés ? Pourquoi une racine ? ?

Pourquoi élever au carré ? Si on faisait la moyenne des écarts simples $(x_i - \mu)$, les écarts positifs et négatifs s'annuleraient **exactement** (la moyenne des écarts à la moyenne est nulle, toujours!).

En élevant au carré, tous les écarts deviennent positifs : ils s'ajoutent au lieu de se compenser.

Pourquoi reprendre la racine ? Le carré a changé l'unité (des euros², ça ne veut rien dire).

L'écart-type $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}}$ revient à l'unité de départ : il se lit comme une « distance typique à la moyenne ».

★ Théorème | Formule de Kœnig-Huygens

Pour toute variable aléatoire X d'espérance $\mu = \mathbb{E}(X)$:

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2} \quad \text{où} \quad \mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i.$$

Intuition | La formule qui fait gagner un temps fou ⚡

La définition demande de calculer d'abord μ , puis **tous** les écarts $(x_i - \mu)^2$: long et source d'erreurs (surtout si μ n'est pas un entier). La formule de Kœnig-Huygens dit : calcule plutôt $\mathbb{E}(X^2)$ (moyenne des **carrés des valeurs**), puis retranche μ^2 . **Beaucoup** plus rapide. Retiens-la comme « moyenne des carrés moins carré de la moyenne ».

Démonstration | Démonstration de la formule de Kœnig-Huygens

On part de la définition et on **développe le carré** $(x_i - \mu)^2 = x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2$:

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n p_i (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2).$$

On **sépare la somme** en trois morceaux :

$$\mathbb{V}(X) = \underbrace{\sum_i p_i x_i^2}_{=\mathbb{E}(X^2)} - 2\mu \underbrace{\sum_i p_i x_i}_{=\mathbb{E}(X)=\mu} + \mu^2 \underbrace{\sum_i p_i}_{=1}.$$

On a sorti 2μ et μ^2 des sommes car ce sont des **constantes**. En remplaçant chaque morceau par sa

valeur :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 \cdot 1 = \mathbb{E}(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2.$$

On reconnaît $\mu^2 = (\mathbb{E}(X))^2$, ce qui est exactement la formule annoncée. ■

✂ Méthode | Calculer $\mathbb{E}$, $\mathbb{V}$ et σ à partir d'une loi

1. Calculer $\mathbb{E}(X) = \sum x_i p_i$.
2. Calculer $\mathbb{E}(X^2) = \sum x_i^2 p_i$ (mêmes probabilités, mais on met les valeurs **au carré**).
3. En déduire $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ (Kœnig-Huygens).
4. Calculer $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Astuce pratique : pose un tableau à lignes x_i , p_i , $x_i p_i$, $x_i^2 p_i$ et somme les deux dernières lignes.

💡 Exemple | Calcul complet sur un dé équilibré

Soit X le résultat d'un dé à six faces. On organise les calculs :

x_i	1	2	3	4	5	6	somme
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1
$x_i p_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{21}{6}$
$x_i^2 p_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{16}{6}$	$\frac{25}{6}$	$\frac{36}{6}$	$\frac{91}{6}$

On lit directement : $\mathbb{E}(X) = \frac{21}{6} = 3,5$ et $\mathbb{E}(X^2) = \frac{91}{6} \approx 15,17$. D'où

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{441}{36} = \frac{546 - 441}{36} = \frac{105}{36} = \frac{35}{12} \approx 2,92.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1,71.$$

Lecture : les résultats d'un dé s'écartent « en moyenne » d'environ 1,7 de la valeur centrale 3,5.

3.5 Transformations affines : $\mathbb{E}(aX + b)$ et $\mathbb{V}(aX + b)$

💡 Intuition | Changer d'échelle ou d'origine

Très souvent, on transforme une variable de façon **affine** : $Y = aX + b$. Exemples : convertir une température, ajouter une prime fixe à un gain (+b), doubler tous les gains ($\times a$). On voudrait $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$ **sans** refaire toute la loi. Bonne nouvelle : il existe des formules directes, et elles sont très intuitives.

✓ Propriété | Espérance et variance d'une transformation affine

Pour tous réels a et b , si $Y = aX + b$ alors :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$$

$$\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X).$$

💡 Intuition | Pourquoi le $+b$ disparaît dans la variance 💡

Pour l'espérance, tout se comporte comme une moyenne : si on double tout puis qu'on ajoute b à chacun, la moyenne double puis augmente de b . Normal. **Pour la variance**, le $+b$ translate tout le nuage de points sans changer sa « largeur » : la dispersion ne bouge pas, donc b disparaît. Le facteur a , lui, **étire** le nuage : les écarts sont multipliés par a , donc leurs **carrés** par a^2 . D'où a^2 dans la variance, et $|a|$ (valeur absolue, car un écart-type est positif) dans l'écart-type.

✎ Démonstration | Démonstration de $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$

Posons $Y = aX + b$. Quand X prend la valeur x_i (avec la probabilité p_i), Y prend la valeur $ax_i + b$ avec la **même** probabilité p_i . Donc

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_i (ax_i + b) p_i = \sum_i (ax_i p_i + b p_i) = a \sum_i x_i p_i + b \sum_i p_i.$$

Or $\sum_i x_i p_i = \mathbb{E}(X)$ et $\sum_i p_i = 1$. D'où $\mathbb{E}(Y) = a\mathbb{E}(X) + b$. ■

✎ Démonstration | Démonstration de $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$

On utilise la définition avec $\mathbb{E}(Y) = a\mu + b$ (où $\mu = \mathbb{E}(X)$) :

$$\mathbb{V}(Y) = \sum_i p_i \left(\underbrace{(ax_i + b)}_{y_i} - \underbrace{(a\mu + b)}_{\mathbb{E}(Y)} \right)^2 = \sum_i p_i (ax_i - a\mu)^2 = \sum_i p_i a^2 (x_i - \mu)^2.$$

Le $+b$ s'est **simplifié** ($b - b = 0$). On sort la constante a^2 :

$$\mathbb{V}(Y) = a^2 \sum_i p_i (x_i - \mu)^2 = a^2 \mathbb{V}(X).$$

En prenant la racine carrée : $\sigma(Y) = \sqrt{a^2 \mathbb{V}(X)} = |a| \sqrt{\mathbb{V}(X)} = |a| \sigma(X)$. ■

💡 Exemple | Une prime et un bonus

Un jeu donne un gain X avec $\mathbb{E}(X) = 4$ et $\sigma(X) = 2$ (donc $\mathbb{V}(X) = 4$). Le casino propose une nouvelle règle : il **double** le gain et **ajoute** 5 €. Le nouveau gain est $Y = 2X + 5$. Alors

$$\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{E}(X) + 5 = 2 \times 4 + 5 = 13, \quad \mathbb{V}(Y) = 2^2 \mathbb{V}(X) = 4 \times 4 = 16, \quad \sigma(Y) = |2| \times 2 = 4.$$

La moyenne passe de 4 à 13 ; la dispersion (écart-type) double de 2 à 4 à cause du facteur 2, mais

le +5 n'y change rien.

3.6 Pour aller plus loin : la meilleure « prévision » (approfondissement)

Intuition | L'espérance minimise l'erreur quadratique ☺

Si tu devais résumer X par **un seul nombre** x et qu'on mesurait ton erreur par la **moyenne des carrés** $f(x) = \mathbb{E}((X - x)^2)$, quel x choisir ? Réponse : $x = \mathbb{E}(X)$. Autrement dit, l'espérance est la valeur qui « colle le mieux » à X au sens des moindres carrés. C'est pour ça qu'elle est partout en statistique (et en intelligence artificielle).

 *Démonstration* / $x \mapsto \mathbb{E}((X - x)^2)$ est minimale en $x = \mathbb{E}(X)$

Développons en utilisant la linéarité de l'espérance (avec $\mu = \mathbb{E}(X)$) :

$$f(x) = \mathbb{E}((X - x)^2) = \mathbb{E}(X^2 - 2xX + x^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2x \mathbb{E}(X) + x^2 = \mathbb{E}(X^2) - 2\mu x + x^2.$$

C'est un **polynôme du second degré** en x , de la forme $x^2 - 2\mu x + \mathbb{E}(X^2)$, avec un coefficient de x^2 égal à $+1 > 0$: la parabole est tournée **vers le haut**, donc elle admet un **minimum**. Ce minimum est atteint en

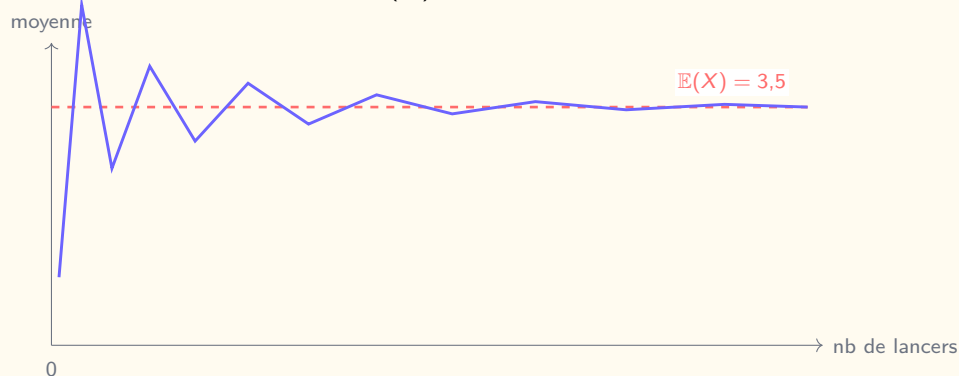
$$x = -\frac{-2\mu}{2 \times 1} = \mu = \mathbb{E}(X).$$

Et la valeur minimale vaut $f(\mu) = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2 = \mathbb{V}(X)$: on retrouve la variance ! La « plus petite erreur quadratique possible » est exactement la variance de X . ■

3.7 Échantillon et simulation : l'espérance se « voit » en répétant

Intuition | Plus on répète, plus la moyenne observée s'approche de $\mathbb{E}(X)$ ↻

On a répété qu'en jouant « un grand nombre de fois », la moyenne des résultats s'approche de l'espérance. On peut le **voir** en simulant : on tire un grand échantillon de valeurs de X et on calcule leur moyenne. Voici l'allure typique de la moyenne d'un dé en fonction du nombre de lancers : elle **oscille** au début, puis se **stabilise** vers $\mathbb{E}(X) = 3,5$.



Ce phénomène (la moyenne d'un grand échantillon se rapproche de l'espérance) sera énoncé pré-

cisément en Terminale sous le nom de **loi des grands nombres**. En Première, on s'en sert pour **estimer** une espérance par simulation quand le calcul exact est compliqué.

3.8 Expérimentation officielle : plusieurs échantillons

Définition | Les trois tailles à ne pas confondre

On simule une variable aléatoire X d'espérance μ et d'écart-type σ .

- Un **échantillon** contient n valeurs de X ; sa moyenne est notée m .
- On répète cette fabrication N fois : on obtient N moyennes différentes.
- On calcule la **proportion** des moyennes qui vérifient

$$|m - \mu| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Le nombre n mesure la taille de chaque échantillon ; le nombre N mesure le nombre de répétitions de l'expérience.

Méthode | Programme complet pour un dé équilibré

Pour un dé, $\mu = 3,5$ et $\sigma = \sqrt{35/12}$.

```

1 from random import randint
2 from math import sqrt
3
4 def moyenne_de(n):
5     total = 0
6     for k in range(n):
7         total = total + randint(1, 6)
8     return total / n
9
10 def proportion_proche(N, n):
11     mu = 3.5
12     sigma = sqrt(35/12)
13     seuil = 2*sigma/sqrt(n)
14     proches = 0
15     for repetition in range(N):
16         m = moyenne_de(n)
17         if abs(m - mu) <= seuil:
18             proches = proches + 1
19     return proches / N

```

 Intuition | Pourquoi la bande se resserre

Le rayon $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ diminue lorsque n augmente : une moyenne calculée sur beaucoup de valeurs fluctue moins qu'une moyenne calculée sur quelques valeurs. En relançant le programme, la proportion change un peu, car elle est elle-même issue d'une simulation.

 Attention | Ce que la simulation prouve, et ce qu'elle ne prouve pas

Une simulation permet d'observer, de conjecturer et de contrôler un calcul. Elle ne transforme pas une observation numérique en théorème. Il faut toujours indiquer les valeurs de N et de n et accepter une petite variation d'une exécution à l'autre.

4 Boîte à outils : réflexes pour le bac

Méthode | Les réflexes essentiels

1. **Loi** : lister les valeurs, calculer chaque $P(X = x_i)$, ranger en tableau, vérifier $\sum p_i = 1$.
2. **Espérance** : $\mathbb{E}(X) = \sum x_i p_i$ (moyenne pondérée).
3. **Variance (rapide)** : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ avec $\mathbb{E}(X^2) = \sum x_i^2 p_i$.
4. **Écart-type** : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$ (même unité que X).
5. **Affine** : $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$; $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$; $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.
6. **Jeu équitable** : $\mathbb{E}(\text{gain}) = 0$ (> 0 favorable, < 0 défavorable).
7. **Du français aux symboles** : « au moins k » = $\{X \geq k\}$, « au plus k » = $\{X \leq k\}$.

Attention | Top des erreurs à éviter

- **Oublier les probabilités dans l'espérance** : $\mathbb{E}(X)$ n'est PAS la moyenne des valeurs $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ (sauf si équiprobables). On pondère **toujours** par les p_i .
- **Confondre $\mathbb{E}(X^2)$ et $(\mathbb{E}(X))^2$** : ce sont presque toujours des nombres différents ! $\mathbb{E}(X^2) = \sum x_i^2 p_i$ (on carre les valeurs), $(\mathbb{E}(X))^2$ (on carre la moyenne). Leur différence **est** la variance.
- **Mettre a au lieu de a^2 dans la variance**, ou garder le $+b$: $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$, sans b .
- **Variance négative** : impossible. Si tu trouves $\mathbb{V}(X) < 0$, tu as une erreur (souvent $\mathbb{E}(X^2)$ et $(\mathbb{E}(X))^2$ échangés).
- **Oublier la mise** dans un gain algébrique : le gain, c'est « ce qu'on reçoit moins ce qu'on a payé ».
- **Somme des probabilités $\neq 1$** : relire la loi, il manque une valeur ou une proba est fausse.

Propriété | Récapitulatif des formules

Objet	Formule
Somme des probabilités	$\sum_i p_i = 1$
Espérance	$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_i$
Moment d'ordre 2	$\mathbb{E}(X^2) = \sum_i x_i^2 p_i$
Variance (définition)	$\mathbb{V}(X) = \sum_i p_i (x_i - \mu)^2$
Variance (Kœnig-Huygens)	$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$
Écart-type	$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$
Transformation affine	$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b, \quad \mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$

✂ Méthode | Algorithme Python : espérance, variance, écart-type

```

1 from math import sqrt
2
3 def esperance(valeurs, probas):
4     return sum(x * p for x, p in zip(valeurs, probas))
5
6 def variance(valeurs, probas):
7     E = esperance(valeurs, probas)
8     E2 = sum(x**2 * p for x, p in zip(valeurs, probas)) #  $E(X^2)$ 
9     return E2 - E**2 # Koenig-Huygens
10
11 def ecart_type(valeurs, probas):
12     return sqrt(variance(valeurs, probas))
13
14 # Exemple : un dé à six faces
15 val = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
16 pro = [1/6] * 6
17 print(esperance(val, pro)) # 3.5
18 print(variance(val, pro)) # 2.9166...
19 print(ecart_type(val, pro)) # 1.7078...

```

✂ Méthode | Algorithme Python : estimer $\mathbb{E}(X)$ par simulation

```

1 from random import randint
2
3 def moyenne_des_lancers(n):
4     total = 0
5     for _ in range(n):
6         total += randint(1, 6) # un lancer de dé
7     return total / n
8
9 print(moyenne_des_lancers(100)) # proche de 3.5
10 print(moyenne_des_lancers(1000000)) # très proche de 3.5
11 # Plus n est grand, plus la moyenne s'approche de  $E(X) = 3.5$ 

```

✂ Méthode | Algorithme Python : fréquence des lettres d'un texte

```

1 def frequences(texte):
2     texte = texte.lower()
3     lettres = [c for c in texte if c.isalpha()]
4     n = len(lettres)
5     freq = {}
6     for c in lettres:
7         freq[c] = freq.get(c, 0) + 1
8     for c in freq:

```



```
9         freq[c] = freq[c] / n    # frequency = effectif / total
10     return freq
11
12 # En français, le 'e' ressort tres frequent (~15 a 18 %).
13 # C'est la loi de la variable "lettre tiree au hasard dans le texte".
```

5 Exercices

Exercice 1 : Lire une loi

Soit X une variable aléatoire de loi :

x_i	-1	0	2	5
$P(X = x_i)$	0,3	0,1	0,4	a

1. Déterminer a . 2. Calculer $P(X \geq 2)$. 3. Calculer $P(X \leq 0)$.

Exercice 2 : Une espérance simple

Une variable X prend les valeurs 10, 20, 30 avec les probabilités respectives 0,5 ; 0,3 ; 0,2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 3 : Vérifier puis espérer

Y prend les valeurs 0, 1, 2, 3 avec $P(Y = 0) = 0,4$, $P(Y = 1) = 0,3$, $P(Y = 2) = 0,2$, $P(Y = 3) = 0,1$.

1. Vérifier que c'est bien une loi. 2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 4 : Variance et écart-type

Reprendre la variable Y de l'exercice 3. Calculer $\mathbb{E}(Y^2)$, puis $\mathbb{V}(Y)$ par Kœnig-Huygens, puis $\sigma(Y)$ (arrondi au centième).

Exercice 5 : Du français aux symboles

Soit X le nombre de bonnes réponses à un QCM de 4 questions. Traduire en événements puis en probabilités les phrases : **(a)** « avoir au moins 3 bonnes réponses » ; **(b)** « avoir strictement moins de 2 bonnes réponses » ; **(c)** « avoir entre 1 et 3 bonnes réponses incluses ».

Exercice 6 : Un dé truqué

Un dé est truqué : la probabilité d'obtenir chaque face est proportionnelle à sa valeur (la face k a une probabilité λk). 1. Déterminer λ . 2. Dresser la loi de X (la face obtenue). 3. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 7 : Jeu de la roue

Une roue équilibrée comporte 8 secteurs identiques : trois « 0 € », trois « 5 € », un « 20 € » et un « 50 € ». On paie 10 € pour jouer. Soit X le gain algébrique. 1. Donner la loi de X . 2. Calculer $\mathbb{E}(X)$. Le jeu est-il favorable au joueur ? 3. Quel prix rendrait le jeu équitable ?

Exercice 8 : Deux dés, le maximum

On lance deux dés équilibrés et M est le **plus grand** des deux résultats (le maximum). 1. Déterminer $M(\Omega)$.

2. Montrer que $P(M = k) = \frac{2k-1}{36}$ pour k de 1 à 6. 3. Calculer $\mathbb{E}(M)$.

Exercice 9 : Transformation affine

X vérifie $\mathbb{E}(X) = 6$ et $\mathbb{V}(X) = 9$. On pose $Z = -2X + 5$. Calculer $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{V}(Z)$ et $\sigma(Z)$.

Exercice 10 ★★☆☆ : Tirage sans remise

Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules vertes. On tire **simultanément** 2 boules. Soit X le nombre de boules rouges tirées. **1.** Déterminer la loi de X . **2.** Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 11 ★★☆☆ : Assurance

Une compagnie assure un objet de valeur 2000 €. La probabilité d'un sinistre total (remboursement de 2000 €) dans l'année est 0,03. La compagnie veut que son **bénéfice espéré** soit de 25 € par contrat. Quel montant de prime annuelle doit-elle demander ? (On note p la prime ; le bénéfice de la compagnie est p s'il n'y a pas de sinistre, $p - 2000$ sinon.)

Exercice 12 ★★☆☆ : Loi à paramètre

Soit X de loi $P(X = k) = \frac{k}{10}$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. **1.** Vérifier que c'est une loi. **2.** Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 13 ★★★☆☆ : Jeu de dés à deux étages

On lance un dé. Si on obtient 6, on gagne 12 €. Sinon, on relance le dé : on gagne alors le double de la nouvelle face en euros. Soit G le gain. **1.** Déterminer les valeurs possibles de G et leur probabilité. **2.** Calculer $\mathbb{E}(G)$.

Exercice 14 ★★★☆☆ : Comparer deux stratégies

Deux placements d'un an pour 1000 €. **Placement A** : gain certain de 30 €. **Placement B** : gain de 130 € avec probabilité 0,5, perte de 60 € avec probabilité 0,5. **1.** Calculer $\mathbb{E}$ et σ du gain pour chaque placement. **2.** Lequel choisir ? Discuter selon le profil (prudent / joueur).

Exercice 15 ★★★☆☆ : Espérance et second degré

Soit X de loi : $P(X = 0) = 0,2$, $P(X = 2) = 0,5$, $P(X = 5) = 0,3$. On considère la fonction $f(x) = \mathbb{E}((X - x)^2)$. **1.** Exprimer $f(x)$ en fonction de x (forme développée). **2.** Pour quelle valeur de x est-elle minimale ? Que vaut ce minimum ? Relier aux notions du cours.

Exercice 16 ★★★☆☆ : Python, simulation et échantillons

1. On donne la fonction `esperance(valeurs, probas)` du cours.

Écrire une fonction Python `est_equitable` qui renvoie `True` si le jeu est équitable (espérance nulle, à 10^{-9} près), et `False` sinon.

2. Écrire une fonction `moyenne_de(n)` qui simule n lancers d'un dé équilibré et renvoie leur moyenne.

3. Écrire une fonction `proportion_proche(N,n)` qui simule N échantillons de taille n et renvoie la proportion des moyennes m telles que

$$|m - 3,5| \leq \frac{2\sqrt{35/12}}{\sqrt{n}}.$$

Expliquer pourquoi deux appels successifs peuvent renvoyer des valeurs légèrement différentes.

6 Problème type prépa

Problème style prépa : le jeu de la différence

Ce problème mobilise **toutes** les notions de la fiche : loi, espérance, variance, transformation affine, jeu équitable, et un soupçon d'algorithmique. Prends ton temps, chaque question prépare la suivante.

Partie A : un jeu de dés classique

Un joueur lance **deux dés équilibrés** et s'intéresse à la variable $D = |D_1 - D_2|$, la **valeur absolue de la différence** des deux faces.

1. Déterminer $D(\Omega)$ et la loi de D (on pourra s'aider d'un tableau à double entrée des 36 résultats).
2. Calculer $\mathbb{E}(D)$ et $\mathbb{V}(D)$ (utiliser Kœnig-Huygens).

Partie B : on en fait un jeu d'argent

On propose la règle suivante : le joueur mise m euros ; il reçoit D^2 euros (le carré de la différence). Soit $G = D^2 - m$ le gain algébrique.

3. Exprimer $\mathbb{E}(G)$ en fonction de m . *Indication : $\mathbb{E}(D^2)$ a déjà été calculé en partie A.*
4. Déterminer la mise m qui rend le jeu **équitable**.
5. Avec cette mise, le jeu est équitable « en moyenne ». Pourtant un joueur prudent hésite. Calculer $\sigma(G)$ et expliquer en une phrase pourquoi l'écart-type éclaire ce choix.

Partie C : simulation

6. Écrire une fonction Python `simule_gain(n, m)` qui simule n parties du jeu de la partie B (mise m) et renvoie le gain moyen observé. Vers quelle valeur ce gain moyen doit-il tendre quand n devient grand, si m est la mise équitable ?

7 Corrigés détaillés

Corrigé 1

Démonstration

1. La somme des probabilités vaut 1 :

$$0,3 + 0,1 + 0,4 + a = 1 \implies 0,8 + a = 1 \implies a = 0,2.$$

2. $\{X \geq 2\}$ regroupe les valeurs 2 et 5 :

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 5) = 0,4 + 0,2 = 0,6.$$

3. $\{X \leq 0\}$ regroupe les valeurs -1 et 0 :

$$P(X \leq 0) = P(X = -1) + P(X = 0) = 0,3 + 0,1 = 0,4.$$

Corrigé 2

Démonstration

On applique la définition $\mathbb{E}(X) = \sum x_i p_i$:

$$\mathbb{E}(X) = 10 \times 0,5 + 20 \times 0,3 + 30 \times 0,2 = 5 + 6 + 6 = 17.$$

En moyenne, sur un grand nombre de répétitions, X vaut 17.

Corrigé 3

Démonstration

1. Somme : $0,4 + 0,3 + 0,2 + 0,1 = 1$. Toutes les probabilités sont positives : c'est bien une loi de probabilité.

2. Espérance :

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \times 0,4 + 1 \times 0,3 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,1 = 0 + 0,3 + 0,4 + 0,3 = 1.$$

Corrigé 4

Démonstration

On reprend $\mathbb{E}(Y) = 1$. Calculons $\mathbb{E}(Y^2)$: on garde les mêmes probabilités mais on **carre** les valeurs :

$$\mathbb{E}(Y^2) = 0^2 \times 0,4 + 1^2 \times 0,3 + 2^2 \times 0,2 + 3^2 \times 0,1 = 0 + 0,3 + 0,8 + 0,9 = 2.$$

Par Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = 2 - 1^2 = 1.$$

Écart-type :

$$\sigma(Y) = \sqrt{\mathbb{V}(Y)} = \sqrt{1} = 1,00.$$

Corrigé 5 *Démonstration*

(a) « au moins 3 » signifie 3 ou plus : événement $\{X \geq 3\}$, probabilité $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4)$.

(b) « strictement moins de 2 » signifie 0 ou 1 : événement $\{X < 2\} = \{X \leq 1\}$, probabilité $P(X = 0) + P(X = 1)$.

(c) « entre 1 et 3 inclus » : événement $\{1 \leq X \leq 3\}$, probabilité $P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$.

Corrigé 6 *Démonstration*

1. La face k a une probabilité λk . La somme doit valoir 1 :

$$\sum_{k=1}^6 \lambda k = \lambda(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21\lambda = 1 \implies \lambda = \frac{1}{21}.$$

2. Loi de X :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

3. Espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^6 k \cdot \frac{k}{21} = \frac{1}{21} \sum_{k=1}^6 k^2 = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{21} = \frac{91}{21} = \frac{13}{3} \approx 4,33.$$

Le dé étant truqué en faveur des grandes faces, son espérance ($\approx 4,33$) est supérieure à celle d'un dé équilibré (3,5) : cohérent.

Corrigé 7 *Démonstration*

1. Sur 8 secteurs : trois donnent 0 €, trois donnent 5 €, un donne 20 €, un donne 50 €. Le gain algébrique retrace la mise de 10 € :

gain x_i	-10	-5	10	40
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

(Recevoir 0 donne un gain -10 ; recevoir 5 donne -5 ; recevoir 20 donne 10 ; recevoir 50 donne 40.)

2. Espérance :

$$\mathbb{E}(X) = -10 \times \frac{3}{8} - 5 \times \frac{3}{8} + 10 \times \frac{1}{8} + 40 \times \frac{1}{8} = \frac{-30 - 15 + 10 + 40}{8} = \frac{5}{8} = 0,625.$$

$\mathbb{E}(X) = 0,625 > 0$: le jeu est **favorable au joueur** (gain moyen de 0,625 € par partie). L'organisateur perd de l'argent sur le long terme.

3. Notons p le prix. Le gain devient $x'_i = (\text{reçu}) - p$, et

$$\mathbb{E}(\text{gain}) = \left(0 \times \frac{3}{8} + 5 \times \frac{3}{8} + 20 \times \frac{1}{8} + 50 \times \frac{1}{8}\right) - p = \frac{15 + 20 + 50}{8} - p = \frac{85}{8} - p.$$

Le jeu est équitable quand cette espérance est nulle : $p = \frac{85}{8} = 10,625$ €. Il faudrait donc faire payer 10,625 €.

Corrigé 8

 Démonstration

1. Le maximum de deux faces va de 1 à 6 : $M(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2. $\{M = k\}$ signifie : les deux dés sont $\leq k$, mais pas tous les deux $\leq k - 1$. Le nombre de couples avec les deux faces $\leq k$ est k^2 ; avec les deux $\leq k - 1$, c'est $(k - 1)^2$. Donc le nombre de couples où le maximum vaut exactement k est

$$k^2 - (k - 1)^2 = k^2 - (k^2 - 2k + 1) = 2k - 1.$$

Comme les 36 couples sont équiprobables, $P(M = k) = \frac{2k - 1}{36}$.

Vérification : $\sum_{k=1}^6 (2k - 1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$, donc la somme des probabilités vaut 1.
✓

3. Espérance :

$$\mathbb{E}(M) = \sum_{k=1}^6 k \cdot \frac{2k - 1}{36} = \frac{1}{36} \sum_{k=1}^6 (2k^2 - k) = \frac{1}{36} (2 \times 91 - 21) = \frac{182 - 21}{36} = \frac{161}{36} \approx 4,47.$$

(On a utilisé $\sum k^2 = 91$ et $\sum k = 21$ pour k de 1 à 6.)

Corrigé 9

 Démonstration

On applique les formules affines avec $a = -2$ et $b = 5$:

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(-2X + 5) = -2\mathbb{E}(X) + 5 = -2 \times 6 + 5 = -7.$$

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{V}(-2X + 5) = (-2)^2 \mathbb{V}(X) = 4 \times 9 = 36.$$

$$\sigma(Z) = |-2| \sigma(X) = 2\sqrt{9} = 2 \times 3 = 6.$$

Remarque : le signe de a change l'espérance mais **pas** la variance (le carré efface le signe), et le $+5$

ne change que l'espérance.

Corrigé 10

Démonstration

1. On tire 2 boules parmi 5 : il y a $\binom{5}{2} = 10$ tirages équiprobables. X (nombre de rouges) peut valoir 0, 1 ou 2.

— $X = 0$: les 2 boules sont vertes, $\binom{2}{2} = 1$ façon. $P(X = 0) = \frac{1}{10}$.

— $X = 1$: une rouge ($\binom{3}{1} = 3$) et une verte ($\binom{2}{1} = 2$), soit $3 \times 2 = 6$. $P(X = 1) = \frac{6}{10}$.

— $X = 2$: les 2 rouges, $\binom{3}{2} = 3$ façons. $P(X = 2) = \frac{3}{10}$.

Vérification : $\frac{1+6+3}{10} = 1$. ✓

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

2. Espérance :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{0 + 6 + 6}{10} = \frac{12}{10} = 1,2.$$

Pour la variance, $\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{10} + 1^2 \times \frac{6}{10} + 2^2 \times \frac{3}{10} = \frac{6+12}{10} = \frac{18}{10} = 1,8$. Donc

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 1,8 - 1,2^2 = 1,8 - 1,44 = 0,36.$$

Corrigé 11

Démonstration

Soit B le bénéfice de la compagnie. Avec probabilité 0,97 (pas de sinistre) il vaut p ; avec probabilité 0,03 (sinistre) il vaut $p - 2000$:

$$\mathbb{E}(B) = p \times 0,97 + (p - 2000) \times 0,03 = p(0,97 + 0,03) - 2000 \times 0,03 = p - 60.$$

On veut $\mathbb{E}(B) = 25$:

$$p - 60 = 25 \implies p = 85.$$

La compagnie doit demander une prime de 85 €. (Interprétation : 60 € couvrent le coût moyen des sinistres, 25 € sont le bénéfice visé.)

Corrigé 12

Démonstration

1. Somme : $\sum_{k=1}^4 \frac{k}{10} = \frac{1+2+3+4}{10} = \frac{10}{10} = 1$. C'est bien une loi.

2. Espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^4 k \cdot \frac{k}{10} = \frac{1+4+9+16}{10} = \frac{30}{10} = 3.$$

Moment d'ordre 2 :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^4 k^2 \cdot \frac{k}{10} = \frac{1^3+2^3+3^3+4^3}{10} = \frac{1+8+27+64}{10} = \frac{100}{10} = 10.$$

Variance et écart-type :

$$\mathbb{V}(X) = 10 - 3^2 = 10 - 9 = 1, \quad \sigma(X) = \sqrt{1} = 1.$$

Corrigé 13

 *Démonstration*

1. Premier lancer : avec probabilité $\frac{1}{6}$ on obtient 6 et le gain est 12 €. Avec probabilité $\frac{5}{6}$ on relance, et on gagne le double de la nouvelle face, soit 2, 4, 6, 8, 10 ou 12 € selon la face 1, 2, 3, 4, 5, 6.

La valeur $G = 12$ peut venir **de deux façons** : soit un 6 au premier lancer ($P = \frac{1}{6}$), soit un relancer suivi d'un 6 ($P = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$). Les autres valeurs 2, 4, 6, 8, 10 viennent uniquement du second lancer, chacune avec probabilité $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.

G	2	4	6	8	10	12
P	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$

Vérification : $5 \times 5 + 11 = 36$, somme des probabilités $= \frac{36}{36} = 1$. ✓ (Pour $G = 12$: on a regroupé $\frac{1}{6} = \frac{6}{36}$ du « 6 direct » et $\frac{5}{36}$ du « relancer puis 6 ».)

2. Espérance :

$$\mathbb{E}(G) = \frac{5}{36}(2+4+6+8+10) + 12 \times \frac{11}{36} = \frac{5 \times 30}{36} + \frac{132}{36} = \frac{150+132}{36} = \frac{282}{36} = \frac{47}{6} \approx 7,83.$$

Corrigé 14

 *Démonstration*

Placement A. Le gain est **certain** : $G_A = 30$ avec probabilité 1. Donc

$$\mathbb{E}(G_A) = 30, \quad \mathbb{V}(G_A) = 0, \quad \sigma(G_A) = 0.$$

Aucune incertitude.

Placement B. Loi : +130 avec 0,5 et -60 avec 0,5.

$$\mathbb{E}(G_B) = 130 \times 0,5 + (-60) \times 0,5 = 65 - 30 = 35.$$

$$\mathbb{E}(G_B^2) = 130^2 \times 0,5 + (-60)^2 \times 0,5 = \frac{16900 + 3600}{2} = \frac{20500}{2} = 10250.$$

$$\mathbb{V}(G_B) = 10250 - 35^2 = 10250 - 1225 = 9025, \quad \sigma(G_B) = \sqrt{9025} = 95.$$

2. Discussion. En **moyenne**, B rapporte plus ($35 > 30$). Mais B a un écart-type énorme (95 €) contre 0 pour A : il comporte un vrai risque de perte (-60 € une fois sur deux). Un profil **prudent** préférera A (gain sûr), un profil **joueur** préférera B (espérance plus élevée, en acceptant le risque). C'est exactement le rôle de l'écart-type : il chiffre le risque que l'espérance, seule, masque.

Corrigé 15

Démonstration

1. On développe en utilisant la linéarité :

$$f(x) = \mathbb{E}((X - x)^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2x\mathbb{E}(X) + x^2.$$

Calculons les ingrédients :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times 0,2 + 2 \times 0,5 + 5 \times 0,3 = 0 + 1 + 1,5 = 2,5,$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times 0,2 + 2^2 \times 0,5 + 5^2 \times 0,3 = 0 + 2 + 7,5 = 9,5.$$

Donc

$$f(x) = x^2 - 2 \times 2,5x + 9,5 = x^2 - 5x + 9,5.$$

2. C'est un trinôme du second degré de coefficient dominant $+1 > 0$: minimum atteint en

$$x = -\frac{-5}{2 \times 1} = \frac{5}{2} = 2,5 = \mathbb{E}(X).$$

Le minimum vaut $f(2,5) = 2,5^2 - 5 \times 2,5 + 9,5 = 6,25 - 12,5 + 9,5 = 3,25$. Or

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 9,5 - 2,5^2 = 9,5 - 6,25 = 3,25.$$

On retrouve bien : le minimum de f est atteint en $x = \mathbb{E}(X)$ et vaut $\mathbb{V}(X)$. C'est l'illustration du résultat du cours (l'espérance est la meilleure « résumé » au sens des moindres carrés).

Corrigé 16

Démonstration

```
1 def esperance(valeurs, probas):
2     return sum(x * p for x, p in zip(valeurs, probas))
3
4 def est_equitable(valeurs, probas):
5     return abs(esperance(valeurs, probas)) < 1e-9
6
7 # Jeu de l'exemple du cours : gains -2, -1, 0, 1, 2, 3 chacun avec proba
   1/6
8 val = [-2, -1, 0, 1, 2, 3]
9 pro = [1/6] * 6
```

```
10 print(esperance(val, pro))    # 0.5 -> donc PAS equitable
11 print(est_equitable(val, pro)) # False
```

1. L'espérance vaut $0,5 \neq 0$, donc `est_equitable` renvoie `False` : ce jeu est favorable au joueur, pas équitable. Il deviendrait équitable en augmentant la mise de 0,5 €.

2 et 3.

```
1 from random import randint
2 from math import sqrt
3
4 def moyenne_de(n):
5     total = 0
6     for k in range(n):
7         total = total + randint(1, 6)
8     return total / n
9
10 def proportion_proche(N, n):
11     mu = 3.5
12     sigma = sqrt(35/12)
13     proches = 0
14     for repetition in range(N):
15         m = moyenne_de(n)
16         if abs(m - mu) <= 2*sigma/sqrt(n):
17             proches = proches + 1
18     return proches / N
```

Chaque appel effectue de nouveaux lancers pseudo-aléatoires. Les N échantillons ne sont donc pas exactement les mêmes, et la proportion observée fluctue. Lorsque N est grand, ces fluctuations sont en général plus petites.

Corrigé du problème type prépa

 *Démonstration / Partie A : loi, espérance et variance de $D = |D_1 - D_2|$*

1. La différence en valeur absolue de deux faces va de 0 (faces égales) à 5 (par exemple 6 et 1) : $D(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. On compte, parmi les 36 couples (D_1, D_2) équiprobables, ceux donnant chaque écart :

- $D = 0$: $(1, 1), \dots, (6, 6)$, soit 6 couples.
- $D = 1$: $(1, 2), (2, 1), \dots$: il y a 5 paires de faces consécutives, chacune dans 2 ordres, soit $2 \times 5 = 10$.
- $D = 2$: 4 paires possibles $\times 2$ ordres = 8.
- $D = 3$: $3 \times 2 = 6$. $D = 4$: $2 \times 2 = 4$. $D = 5$: $1 \times 2 = 2$.

k	0	1	2	3	4	5
$P(D = k)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

Vérification : $6 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 36$. ✓

2. Espérance :

$$\mathbb{E}(D) = \frac{1}{36}(0 \cdot 6 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2) = \frac{0 + 10 + 16 + 18 + 16 + 10}{36} = \frac{70}{36} = \frac{35}{18} \approx 1,94.$$

Moment d'ordre 2 :

$$\mathbb{E}(D^2) = \frac{1}{36}(0 \cdot 6 + 1 \cdot 10 + 4 \cdot 8 + 9 \cdot 6 + 16 \cdot 4 + 25 \cdot 2) = \frac{0 + 10 + 32 + 54 + 64 + 50}{36} = \frac{210}{36} = \frac{35}{6} \approx 5,83.$$

Variance (Kœnig-Huygens) :

$$\mathbb{V}(D) = \mathbb{E}(D^2) - (\mathbb{E}(D))^2 = \frac{35}{6} - \left(\frac{35}{18}\right)^2 = \frac{35}{6} - \frac{1225}{324}.$$

On réduit au même dénominateur 324 : $\frac{35}{6} = \frac{1890}{324}$, donc

$$\mathbb{V}(D) = \frac{1890 - 1225}{324} = \frac{665}{324} \approx 2,05.$$

 *Démonstration / Partie B : le jeu d'argent $G = D^2 - m$*

3. On utilise la transformation affine $G = D^2 - m$ (ici la « variable » est D^2 , et on lui retranche la constante m) :

$$\mathbb{E}(G) = \mathbb{E}(D^2) - m = \frac{35}{6} - m.$$

4. Jeu équitable : $\mathbb{E}(G) = 0$, donc

$$m = \mathbb{E}(D^2) = \frac{35}{6} \approx 5,83 \text{ €}.$$

Il faut miser environ 5,83 € pour que le jeu soit équitable.

5. Comme $G = D^2 - m$ avec m constante, $\mathbb{V}(G) = \mathbb{V}(D^2)$: retrancher une constante ne change pas la dispersion. Il faut donc la variance de la variable D^2 . Posons $W = D^2$, de valeurs 0, 1, 4, 9, 16, 25

avec les mêmes probabilités que D . On a déjà $\mathbb{E}(W) = \mathbb{E}(D^2) = \frac{35}{6}$. Calculons $\mathbb{E}(W^2) = \mathbb{E}(D^4)$:

$$\mathbb{E}(D^4) = \frac{1}{36}(0 \cdot 6 + 1 \cdot 10 + 16 \cdot 8 + 81 \cdot 6 + 256 \cdot 4 + 625 \cdot 2) = \frac{2898}{36} = \frac{161}{2} = 80,5.$$

Donc

$$\mathbb{V}(G) = \mathbb{V}(W) = \mathbb{E}(D^4) - (\mathbb{E}(D^2))^2 = 80,5 - \left(\frac{35}{6}\right)^2 = 80,5 - \frac{1225}{36} \approx 80,5 - 34,03 = 46,47.$$

$$\sigma(G) = \sqrt{46,47} \approx 6,82 \text{ €}.$$

Interprétation (une phrase). Même « équitable » ($\mathbb{E}(G) = 0$), le jeu a un écart-type élevé ($\approx 6,82$ €, supérieur à la mise) : les résultats sont très dispersés, un joueur prudent sait donc qu'il peut perdre gros sur quelques parties, ce que l'espérance nulle ne dit pas.



Démonstration / Partie C : simulation

6. On simule deux dés, on calcule l'écart au carré, on retranche la mise, et on moyenne :

```
1 from random import randint
2
3 def simule_gain(n, m):
4     total = 0
5     for _ in range(n):
6         d1 = randint(1, 6)
7         d2 = randint(1, 6)
8         gain = (abs(d1 - d2))**2 - m    # G = D^2 - m
9         total += gain
10    return total / n
11
12 # Avec la mise équitable m = 35/6 :
13 print(simule_gain(1000000, 35/6))    # proche de 0
```

Si $m = \frac{35}{6}$ est la mise équitable, alors $\mathbb{E}(G) = 0$: d'après le principe de la loi des grands nombres, le gain moyen observé sur n parties se rapproche de 0 quand n devient grand. La simulation **confirme** numériquement le calcul théorique.

Bravo ! Tu maîtrises maintenant les variables aléatoires : **loi**, **espérance** (la moyenne sur le long terme), **variance** et **écart-type** (la dispersion), et les formules **affines**. C'est le socle direct de la **loi binomiale** et des grands théorèmes de Terminale. Prochaine étape : la fiche 11, **algorithmique et programmation en Python**.

8 Fiche-mémoire

Résumer le hasard par une loi

 Définition | Loi

Une variable aléatoire associe un nombre à chaque issue. Sa loi donne les valeurs x_i et leurs probabilités p_i , avec $p_i \geq 0$ et $\sum p_i = 1$.

 Méthode | Espérance

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_i.$$

C'est le gain moyen à long terme, pas le résultat garanti d'une partie.

 Méthode | Transformation affine

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

 Méthode | Variance et écart-type

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2, \quad \sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X), \quad \sigma(aX + b) = |a| \sigma(X).$$

 Méthode | Échantillons

Un échantillon contient n valeurs ; on répète l'expérience N fois. Calculer la proportion des moyennes telles que

$$|m - \mu| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}.$$

 Méthode | Décider

Comparer les espérances pour le niveau moyen et les écarts-types pour le risque ou la dispersion.

 Attention | Les contrôles indispensables

La somme des probabilités vaut 1 ; une variance n'est jamais négative ; l'écart-type a la même unité que X ; une simulation fluctue et ne remplace pas un calcul exact.