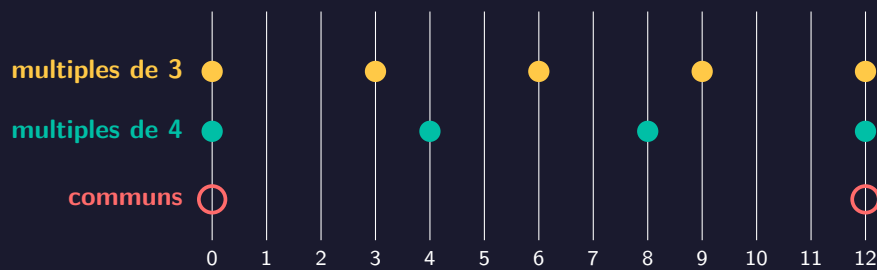


FICHE 01

Arithmétique

Multiples & diviseurs ▪ Parité ▪ Fractions irréductibles



Seconde générale ▪ Mathématiques ▪ Programme officiel

 Cours complet

 15 exercices

 Problème défi

 Corrigés

Table des matières

1	 Pourquoi étudier l'arithmétique ?	3
1.1	Le problème fondamental	3
1.2	Calculer n'est pas encore démontrer	3
2	 L'idée avant la formule	3
2.1	Les multiples : avancer par bonds réguliers	3
2.2	Les diviseurs : partager sans reste	3
2.3	Pair et impair : deux formes, pas deux listes	4
3	 Le cours complet	4
3.1	Entiers naturels et entiers relatifs	4
3.2	Multiples et diviseurs	4
3.3	Trouver les diviseurs positifs d'un entier	5
3.4	Propriétés des multiples	6
3.5	Nombres pairs et nombres impairs	7
3.6	Nombres premiers et fractions irréductibles	8
3.7	Raisonner avec implication, réciproque et contre-exemple	9
3.8	Deux algorithmes du programme	10
4	 Boîte à outils : les réflexes	10
5	 Exercices	12
6	 Problème : Les entiers cachés entre deux carrés ★★ ★	15
7	 Corrigés détaillés	16

1 ? Pourquoi étudier l'arithmétique ?

1.1 Le problème fondamental

Dans la vie courante, on doit souvent savoir si une quantité peut être partagée *exactement* :

- peut-on ranger 84 objets dans des boîtes de 6 sans reste ?
- deux bus partent toutes les 12 et 18 minutes : quand repartiront-ils ensemble ?
- une fraction comme $\frac{84}{126}$ est-elle déjà simplifiée ?
- comment prouver qu'une affirmation sur *tous* les nombres pairs est vraie ?

Ces questions ont un point commun : elles ne demandent pas seulement de calculer. Elles demandent de comprendre la **structure des entiers**.

Intuition | L'idée essentielle

Un entier n'est pas seulement une position sur une calculatrice. Il peut se décomposer en produits, appartenir à plusieurs familles de multiples, être pair ou impair. L'arithmétique apprend à reconnaître ces structures puis à les utiliser pour raisonner.

1.2 Calculer n'est pas encore démontrer

Tester $8 + 12 = 20$, $16 + 28 = 44$ et $100 + 26 = 126$ suggère que la somme de deux nombres pairs est paire. Mais trois exemples, même corrects, ne prouvent pas une affirmation concernant une infinité de nombres.

Pour démontrer, on remplace les exemples par la forme générale d'un nombre pair : $2k$. Cette simple lettre k permet de représenter tous les cas en une seule fois.

Attention | Exemple ou preuve ?

Un exemple peut confirmer une conjecture, jamais la démontrer dans tous les cas. En revanche, **un seul contre-exemple** suffit pour prouver qu'une affirmation générale est fausse.

2 L'idée avant la formule

2.1 Les multiples : avancer par bonds réguliers

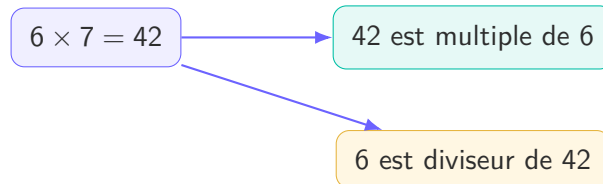
Les multiples de 5 sont obtenus en avançant de 5 en 5 :

$$\dots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, \dots$$

Dire que 35 est un multiple de 5, c'est dire qu'il existe un entier, ici 7, tel que $35 = 5 \times 7$. Le mot important est « existe » : il faut pouvoir exhiber le facteur entier.

2.2 Les diviseurs : partager sans reste

Le nombre 6 divise 42 car $42 = 6 \times 7$. Si on distribue 42 objets par groupes de 6, on forme exactement 7 groupes. En revanche, 8 ne divise pas 42 : $42/8$ n'est pas un entier.



2.3 Pair et impair : deux formes, pas deux listes

On pourrait apprendre la liste 0, 2, 4, 6, ..., mais une preuve a besoin d'une *forme* :

$$\boxed{\text{pair} = 2k} \quad \boxed{\text{impair} = 2k + 1}, \quad k \text{ entier.}$$

Le nombre -14 est pair car $-14 = 2 \times (-7)$. Le nombre -9 est impair car $-9 = 2 \times (-5) + 1$.

Intuition | Pourquoi $2k + 1$?

Tout entier est soit exactement un multiple de 2, soit placé une unité après un multiple de 2. Il ne peut pas exister de troisième possibilité.

3 Le cours complet

3.1 Entiers naturels et entiers relatifs

Définition | Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

L'ensemble des **entiers naturels** est

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}.$$

L'ensemble des **entiers relatifs** est

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}.$$

Tous les entiers naturels sont des entiers relatifs : on dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$.

Exemple

$17 \in \mathbb{N}$ et $17 \in \mathbb{Z}$. En revanche, $-4 \notin \mathbb{N}$ mais $-4 \in \mathbb{Z}$. Le nombre 2,5 n'appartient ni à $\mathbb{N}$ ni à $\mathbb{Z}$.

3.2 Multiples et diviseurs

Définition | Définition fondamentale

Soient a et b deux entiers. On dit que a est un **multiple** de b s'il existe un entier k tel que

$$a = k b.$$

On dit alors aussi que b est un **diviseur** de a , ou que b **divise** a . On peut noter $b \mid a$.

💡 Exemple | Lire la définition dans les deux sens

Comme $72 = 8 \times 9$:

- 72 est un multiple de 8 et de 9 ;
- 8 et 9 sont des diviseurs de 72 ;
- on peut écrire $8 \mid 72$ et $9 \mid 72$.

En revanche, 5 ne divise pas 72, car il n'existe aucun entier k tel que $72 = 5k$.

✅ Propriété | Cas particuliers utiles

- 0 est un multiple de tout entier b , puisque $0 = 0 \times b$.
- 1 et -1 divisent tous les entiers.
- Tout entier non nul se divise lui-même.
- On ne forme jamais un quotient dont le dénominateur est 0.

⚠ Attention | Ne pas inverser les mots

24 est un **multiple** de 6, tandis que 6 est un **diviseur** de 24. Pour retrouver le bon sens, réécris toujours $24 = 6 \times 4$.

3.3 Trouver les diviseurs positifs d'un entier

🔧 Méthode | Recherche par paires

Pour trouver tous les diviseurs positifs d'un entier positif n :

1. cherche les produits d'entiers positifs qui donnent n ;
2. range les facteurs par paires ;
3. arrête lorsque les deux facteurs se croisent ;
4. vérifie que tu n'as oublié aucune paire.

💡 Exemple | Diviseurs de 36

$$36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6.$$

Les diviseurs positifs de 36 sont donc

$$1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36.$$

On s'arrête à 6×6 : ensuite, on retrouverait les mêmes paires dans l'autre ordre.

3.4 Propriétés des multiples

★ Théorème | Somme de deux multiples – démonstration exigible

Pour un entier a fixé, la somme de deux multiples de a est encore un multiple de a .

 Démonstration | Preuve complète

Soient x et y deux multiples de a .

Par définition d'un multiple, il existe des entiers k et ℓ tels que

$$x = ka \quad \text{et} \quad y = \ell a.$$

Alors

$$x + y = ka + \ell a = (k + \ell)a.$$

Or $k + \ell$ est un entier. Ainsi, $x + y$ est de la forme « un entier multiplié par a » : c'est donc un multiple de a . □

✓ Propriété | Une famille de règles

Si x et y sont des multiples de a , alors :

- $x + y$ est un multiple de a ;
- $x - y$ est un multiple de a ;
- pour tout entier m , mx est un multiple de a .

Plus généralement, toute expression de la forme $mx + ny$, avec m et n entiers, est un multiple de a .

 Démonstration | Pourquoi la différence fonctionne aussi

Avec $x = ka$ et $y = \ell a$, on obtient

$$x - y = ka - \ell a = (k - \ell)a.$$

Comme $k - \ell$ est entier, $x - y$ est un multiple de a . Le raisonnement est exactement le même que pour la somme.

💡 Exemple

126 et 84 sont des multiples de 7. Sans effectuer de division, on sait que

$$126 - 84 = 42$$

est encore un multiple de 7.

3.5 Nombres pairs et nombres impairs

Définition | Parité

Un entier est **pair** s'il peut s'écrire $2k$ avec k entier.

Un entier est **impair** s'il peut s'écrire $2k + 1$ avec k entier.

Propriété | Règles de parité

Opération	Parités	Résultat
Somme	pair + pair	pair
Somme	impair + impair	pair
Somme	pair + impair	impair
Produit	au moins un facteur pair	pair
Produit	impair $\times$ impair	impair

Démonstration | Somme de deux nombres impairs

Soient $u = 2k + 1$ et $v = 2\ell + 1$ deux entiers impairs. Alors

$$u + v = (2k + 1) + (2\ell + 1) = 2k + 2\ell + 2 = 2(k + \ell + 1).$$

Puisque $k + \ell + 1$ est entier, $u + v$ est pair.

Démonstration | Produit de deux nombres impairs

Avec $u = 2k + 1$ et $v = 2\ell + 1$,

$$\begin{aligned} uv &= (2k + 1)(2\ell + 1) \\ &= 4k\ell + 2k + 2\ell + 1 \\ &= 2(2k\ell + k + \ell) + 1. \end{aligned}$$

Le nombre $2k\ell + k + \ell$ est entier, donc uv est impair.

★ Théorème | Le carré d'un nombre impair – démonstration exigible

Le carré de tout nombre impair est impair.

 Démonstration | Preuve complète

Soit n un entier impair. Il existe donc un entier k tel que $n = 2k + 1$. Alors

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k + 1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1. \end{aligned}$$

Le nombre $2k^2 + 2k$ est entier. Ainsi n^2 est de la forme $2q + 1$ avec q entier : n^2 est impair. $\square$

 Propriété | Deux entiers consécutifs

Parmi deux entiers consécutifs, l'un est pair et l'autre est impair. Leur produit est donc toujours pair.

 Démonstration

Deux entiers consécutifs s'écrivent n et $n + 1$.

Si n est pair, le produit $n(n + 1)$ possède le facteur pair n .

Si n est impair, alors $n + 1$ est pair et le produit possède le facteur pair $n + 1$.

Dans les deux cas, $n(n + 1)$ est pair.

3.6 Nombres premiers et fractions irréductibles

 Définition | Nombre premier

Un entier naturel supérieur ou égal à 2 est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Les premiers nombres premiers sont

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...

 Attention

1 n'est pas premier : il n'a qu'un seul diviseur positif. Le nombre 2 est le seul nombre premier pair.

 Définition | Fraction irréductible

Une fraction $\frac{a}{b}$, avec a et b entiers et $b \neq 0$, est **irréductible** lorsque a et b n'ont aucun diviseur positif commun autre que 1.

 Méthode | Rendre une fraction irréductible

1. cherche un diviseur commun au numérateur et au dénominateur ;
2. divise les deux par ce même nombre ;
3. recommence jusqu'à ce qu'il n'existe plus de diviseur commun autre que 1.

Tu peux aussi décomposer le numérateur et le dénominateur en facteurs premiers et simplifier tous les facteurs communs.

 Exemple

$$\frac{84}{126} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 3 \times 7} = \frac{\cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{7}}{\cancel{2} \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{7}} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

La fraction $\frac{2}{3}$ est irréductible.

3.7 Raisonner avec implication, réciproque et contre-exemple **Définition | Implication**

Une implication est une phrase de la forme : « Si P est vraie, alors Q est vraie. »

Sa **réciproque** est : « Si Q est vraie, alors P est vraie. »

Une implication et sa réciproque sont deux affirmations différentes : l'une peut être vraie et l'autre fausse.

 Exemple

Implication vraie : si un entier est multiple de 6, alors il est pair. En effet, $n = 6k = 2(3k)$.

Réciproque fausse : si un entier est pair, alors il est multiple de 6. Le nombre 8 est un contre-exemple : il est pair mais n'est pas multiple de 6.

 Méthode | Démontrer ou réfuter

- Pour montrer qu'une affirmation générale est **vraie**, utilise les définitions et un raisonnement valable dans tous les cas.
- Pour montrer qu'elle est **fausse**, donne un contre-exemple précis et vérifie qu'il contredit bien l'affirmation.

3.8 Deux algorithmes du programme

✂ Méthode | Tester si a est un multiple de b

En Python, le reste de la division entière de a par b s'obtient avec $a \% b$.

```
1 def est_multiple(a, b):
2     return a % b == 0
```

La fonction renvoie True lorsque le reste est nul, et False sinon. On suppose ici $b \neq 0$.

✂ Méthode | Plus grand multiple de a inférieur ou égal à b

Voici une version par retraits successifs, volontairement simple :

```
1 def plus_grand_multiple(a, b):
2     n = b
3     while n % a != 0:
4         n = n - 1
5     return n
```

La boucle s'arrête au premier entier rencontré qui est multiple de a .

4 Boîte à outils : les réflexes

✂ Méthode | Reconnaître le bon point de départ

Dans l'énoncé, tu lis...	Premier réflexe
« montrer que A est multiple de m »	Transformer A pour faire apparaître $m \times$ (entier).
« montrer qu'un nombre est pair »	Chercher une écriture $2k$.
« montrer qu'un nombre est impair »	Chercher une écriture $2k + 1$.
« pour tout entier n »	Garder n sous forme littérale : des exemples ne suffisent pas.
« l'affirmation est-elle vraie ? »	Essayer de démontrer ; si cela bloque, chercher un contre-exemple simple.
« rendre une fraction irréductible »	Chercher les facteurs communs au numérateur et au dénominateur.

 Attention | Les cinq erreurs classiques

1. Confondre « a divise b » et « a est divisible par b ».
2. Croire que quelques exemples constituent une démonstration.
3. Utiliser $2k + 1$ sans préciser que k est entier.
4. Diviser seulement le numérateur ou seulement le dénominateur d'une fraction.
5. Penser que la réciproque d'une affirmation vraie est automatiquement vraie.

 Exemple | Un modèle de rédaction

Question : montrer que la somme de trois entiers impairs est impaire.

Rédaction : soient $a = 2k + 1$, $b = 2\ell + 1$ et $c = 2m + 1$, où k , ℓ et m sont des entiers. Alors

$$a + b + c = 2k + 2\ell + 2m + 3 = 2(k + \ell + m + 1) + 1.$$

Comme $k + \ell + m + 1$ est entier, la somme $a + b + c$ est impaire.

5 Exercices

Exercice 1 : Le vocabulaire sans piège

Pour chaque affirmation, indique si elle est vraie ou fausse et justifie par une égalité ou un calcul.

- a) 56 est un multiple de 7.
- b) 9 divise 63.
- c) 6 est un multiple de 42.
- d) 15 divise 100.
- e) 0 est un multiple de 13.
- f) 1 divise 2026.

Exercice 2 : Lister sans oublier

- a) Donne tous les diviseurs positifs de 24.
- b) Donne tous les diviseurs positifs de 45.
- c) Donne les cinq premiers multiples positifs communs à 4 et 6.
- d) Quel est le plus petit multiple strictement positif commun à 8 et 12 ?

Exercice 3 : Pair ou impair ?

Dans chaque cas, n est un entier. Détermine la parité de l'expression et justifie.

- a) $2n + 6$ b) $4n + 1$ c) $n(n + 1)$ d) $(2n + 1)^2 + 1$.

Exercice 4 : Fractions irréductibles

Rends chaque fraction irréductible en détaillant les simplifications :

- a) $\frac{42}{56}$ b) $\frac{150}{210}$ c) $\frac{252}{198}$ d) $\frac{-132}{180}$.

Exercice 5 : Des paquets de jus

Une association dispose de 168 jus d'orange et de 126 jus de pomme. Elle veut fabriquer des lots **tous identiques**, sans boisson restante.

- a) Peut-elle fabriquer 6 lots ? 9 lots ? 14 lots ?
- b) Parmi ces trois choix, donne le contenu d'un lot chaque fois que c'est possible.
- c) Explique pourquoi tout nombre de lots possible doit diviser à la fois 168 et 126.

Exercice 6 : Démonstrations guidées

Soit a un entier fixé.

- a) Soient $x = ak$ et $y = a\ell$, avec k et ℓ entiers. Montre que $3x - 2y$ est un multiple de a .
- b) Montre que la différence de deux multiples de a est un multiple de a .
- c) Explique pourquoi la somme d'un multiple de a et d'un nombre qui n'est pas multiple de a ne peut pas être un multiple de a .

Exercice 7 ★★☆☆ : Lire un programme Python

On considère la fonction suivante.

```
1 def mystere(a, b):  
2     n = b  
3     while n % a != 0:  
4         n = n - 1  
5     return n
```

- a) Fais fonctionner le programme à la main avec $a = 7$ et $b = 25$.
- b) Quelle valeur est renvoyée par `mystere(6, 50)` ?
- c) Décris en une phrase ce que calcule cette fonction.
- d) Pourquoi suppose-t-on que a est strictement positif ?

Exercice 8 ★★☆☆ : Trois feux qui clignotent

Trois feux s'allument à 12 h exactement. Le premier s'allume ensuite toutes les 6 secondes, le deuxième toutes les 8 secondes et le troisième toutes les 12 secondes.

- a) Liste les instants d'allumage de chaque feu pendant les 30 premières secondes.
- b) Au bout de combien de secondes les trois feux s'allument-ils de nouveau ensemble pour la première fois ?
- c) Combien de fois, en comptant l'instant initial, s'allument-ils ensemble pendant les deux premières minutes ?

Exercice 9 ★★☆☆ : Implication et réciproque

Pour chaque phrase : formule sa réciproque, puis indique si la phrase initiale et sa réciproque sont vraies. Justifie ou donne un contre-exemple.

- a) Si un entier est multiple de 10, alors il est multiple de 5.
- b) Si un entier est divisible par 4, alors il est pair.
- c) Si le carré d'un entier est impair, alors cet entier est impair.

Exercice 10 ★★☆☆ : Le critère de divisibilité par 3

Un nombre à trois chiffres s'écrit $N = 100a + 10b + c$, où a , b et c sont ses chiffres.

- a) Montre que $N - (a + b + c) = 99a + 9b$.
- b) Pourquoi $N - (a + b + c)$ est-il un multiple de 3 ?
- c) Dédus que N est multiple de 3 exactement lorsque la somme $a + b + c$ l'est.
- d) Utilise ce résultat pour tester 741, 1 256 et 98 763.

Exercice 11 ★★☆☆ : Des rectangles entiers

On veut construire un rectangle d'aire 72 cm^2 dont les longueurs des côtés sont des nombres entiers de centimètres.

- a) Donne toutes les paires de dimensions possibles, sans compter deux fois un rectangle tourné.
- b) Quel rectangle a le plus petit périmètre ?
- c) Explique le lien entre cette question et les diviseurs de 72.

Exercice 12 ★★☆☆ : Une fraction toujours irréductible

Soit n un entier naturel non nul.

- a) Suppose qu'un entier positif d divise à la fois n et $n + 1$. Montre que d divise leur différence.
- b) Calcule $(n + 1) - n$.
- c) Dédus que la fraction $\frac{n}{n + 1}$ est toujours irréductible.

Exercice 13 ★★☆☆ : Trois entiers consécutifs

Soit n un entier.

- a) Explique pourquoi l'un des trois entiers n , $n + 1$, $n + 2$ est multiple de 3.
- b) Explique pourquoi au moins l'un d'eux est pair.
- c) Dédus que $n(n + 1)(n + 2)$ est toujours un multiple de 6.
- d) Vérifie le résultat pour $n = 7$, puis explique pourquoi cette vérification ne remplace pas la preuve.

Exercice 14 ★★☆☆ : Divisibilité cachée

Soit n un entier.

- a) Développe $(n + 1)^2 - (n - 1)^2$.
- b) Dédus que la différence est toujours multiple de 4.
- c) Montre que $n^2 + n$ est toujours pair.
- d) Montre alors que $n^2 + n + 2$ est toujours pair, mais pas toujours multiple de 4.

Exercice 15 ★★☆☆ : Une affirmation trompeuse

On affirme : « si un entier n^2 est multiple de 4, alors n est multiple de 4. »

- a) Cherche plusieurs exemples et décide si cette affirmation semble vraie.
- b) Donne un contre-exemple qui tranche la question.
- c) Remplace la conclusion par une conclusion correcte, puis démontre-la en raisonnant sur la parité de n .

6 🐼 Problème : Les entiers cachés entre deux carrés ★★ ★

On cherche à savoir quels entiers naturels peuvent s'écrire comme la différence de deux carrés d'entiers naturels :

$$N = a^2 - b^2 \quad \text{avec } a > b.$$

Ce problème est difficile. Avance question par question : chaque résultat prépare le suivant.

Partie A – Observer et construire

1. Calcule $2^2 - 1^2$, $3^2 - 2^2$, $4^2 - 3^2$ et $5^2 - 4^2$. Que remarques-tu ?
2. Développe $(k + 1)^2 - k^2$.
3. Dédus que tout entier naturel impair peut s'écrire comme différence de deux carrés consécutifs.
4. Calcule $(k + 1)^2 - (k - 1)^2$ pour $k \geq 1$. Quelle famille d'entiers obtiens-tu ?

Partie B – Comprendre l'obstacle

5. Factorise $a^2 - b^2$.
6. Montre que $a - b$ et $a + b$ ont toujours la même parité.
7. Si $a - b$ et $a + b$ sont impairs, quelle est la parité de leur produit ?
8. S'ils sont pairs, montre que leur produit est multiple de 4.
9. Dédus qu'une différence de deux carrés ne peut jamais être un nombre pair qui n'est pas multiple de 4.

Partie C – La caractérisation complète

10. Recopie et complète : « Un entier naturel strictement positif est une différence de deux carrés si et seulement s'il est ...ou ... »
11. Justifie les deux sens de cette affirmation en citant les résultats précédents.
12. Parmi 2025, 2026 et 2028, lesquels peuvent s'écrire comme différence de deux carrés ? Donne une écriture pour chacun de ceux qui conviennent.
13. Trouve deux écritures différentes de 45 comme différence de deux carrés.

7 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Le vocabulaire sans piège*

- a) **Vrai.** On peut écrire $56 = 7 \times 8$. Le second facteur est entier, donc 56 est un multiple de 7.
- b) **Vrai.** L'égalité $63 = 9 \times 7$ montre que 9 est un diviseur de 63.
- c) **Faux.** Dire que 6 est un multiple de 42 signifierait qu'il existe un entier k tel que $6 = 42k$. C'est impossible. C'est au contraire 42 qui est un multiple de 6, car $42 = 6 \times 7$.
- d) **Faux.** Le quotient $100/15 = 20/3$ n'est pas entier. Il n'existe donc pas d'entier k tel que $100 = 15k$.
- e) **Vrai.** On a $0 = 13 \times 0$. Ainsi, 0 est bien un multiple de 13.
- f) **Vrai.** On a $2026 = 1 \times 2026$. Le nombre 1 divise tous les entiers.

Corrigé 2

 *Démonstration / Lister sans oublier*

- a) On cherche les paires de facteurs de 24 :

$$24 = 1 \times 24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6.$$

Les diviseurs positifs de 24 sont donc

1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24.

- b) Pour 45 :

$$45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9.$$

Les diviseurs positifs de 45 sont

1; 3; 5; 9; 15; 45.

- c) Les multiples positifs de 4 sont 4, 8, 12, 16, 20, 24, ... et ceux de 6 sont 6, 12, 18, 24, 30, 36, ...
Les cinq premiers multiples positifs communs sont

12; 24; 36; 48; 60.

- d) Les multiples de 8 sont 8, 16, 24, 32, ... Ceux de 12 sont 12, 24, 36, ... Le premier multiple strictement positif commun est donc 24.

Corrigé 3

 *Démonstration / Pair ou impair ?*

Dans chaque justification, n est entier.

a) $2n + 6 = 2n + 2 \times 3 = 2(n + 3)$. Comme $n + 3$ est entier, $2n + 6$ est pair.

b) $4n + 1 = 2(2n) + 1$. Comme $2n$ est entier, $4n + 1$ est impair.

c) Les entiers n et $n + 1$ sont consécutifs. L'un des deux est pair ; leur produit possède donc un facteur pair. Ainsi, $n(n + 1)$ est pair.

d) $2n + 1$ est impair. Son carré est donc impair, et le nombre suivant est pair. On peut aussi calculer :

$$(2n + 1)^2 + 1 = 4n^2 + 4n + 2 = 2(2n^2 + 2n + 1).$$

Donc $(2n + 1)^2 + 1$ est pair.

Corrigé 4

 *Démonstration / Fractions irréductibles*

On divise toujours le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul.

a) Le plus grand facteur commun visible est 14 :

$$\frac{42}{56} = \frac{42 \div 14}{56 \div 14} = \frac{3}{4}.$$

b) On peut d'abord simplifier par 10, puis par 3 :

$$\frac{150}{210} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}.$$

c) Les deux nombres sont divisibles par 18 :

$$\frac{252}{198} = \frac{252 \div 18}{198 \div 18} = \frac{14}{11}.$$

Les nombres 14 et 11 n'ont aucun diviseur positif commun autre que 1.

d) Les deux nombres sont divisibles par 12 :

$$\frac{-132}{180} = \frac{-11}{15} = -\frac{11}{15}.$$

Corrigé 5

 Démonstration / Des paquets de jus

Pour fabriquer p lots identiques sans reste, p doit diviser les deux quantités.

a) Pour 6 lots :

$$168 = 6 \times 28 \quad \text{et} \quad 126 = 6 \times 21.$$

C'est donc possible.

Pour 9 lots, $126 = 9 \times 14$, mais 168 n'est pas un multiple de 9 : $168 = 9 \times 18 + 6$. Ce n'est pas possible.

Pour 14 lots :

$$168 = 14 \times 12 \quad \text{et} \quad 126 = 14 \times 9.$$

C'est possible.

b) Avec 6 lots, chaque lot contient 28 jus d'orange et 21 jus de pomme.

Avec 14 lots, chaque lot contient 12 jus d'orange et 9 jus de pomme.

c) Si p lots identiques utilisent tous les jus, le nombre de jus d'orange par lot et le nombre de jus de pomme par lot sont des entiers. Il existe donc des entiers u et v tels que $168 = pu$ et $126 = pv$. Par définition, p divise les deux quantités.

Corrigé 6

 Démonstration / Démonstrations guidées

a) Avec $x = ak$ et $y = a\ell$:

$$3x - 2y = 3ak - 2a\ell = a(3k - 2\ell).$$

Or $3k - 2\ell$ est entier. Donc $3x - 2y$ est un multiple de a .

b) Soient $x = ak$ et $y = a\ell$ deux multiples de a . Alors

$$x - y = ak - a\ell = a(k - \ell).$$

Comme $k - \ell$ est entier, $x - y$ est un multiple de a .

c) Notons x un multiple de a et z un entier qui n'est pas multiple de a . Supposons, pour obtenir une contradiction, que $x + z$ soit un multiple de a . La différence de deux multiples de a serait un multiple de a , donc

$$(x + z) - x = z$$

serait un multiple de a . Cela contredit l'information de départ. Ainsi, $x + z$ ne peut pas être un multiple de a .

Corrigé 7

 Démonstration / Lire un programme Python

a) Pour `mystere(7, 25)`, la variable `n` prend successivement les valeurs

25, 24, 23, 22, 21.

Pour 25, 24, 23 et 22, le reste de la division par 7 n'est pas nul. Pour 21, il est nul. Le programme renvoie `21`.

b) En partant de 50, on descend : 50, 49, puis 48. Comme $48 = 6 \times 8$, la fonction renvoie `48`.

c) Cette fonction calcule le **plus grand multiple de a inférieur ou égal à b** .

d) Il faut au minimum exclure $a = 0$, car le calcul du reste par 0 n'est pas défini. Supposer $a > 0$ correspond aussi au contexte usuel où l'on cherche les multiples positifs d'un entier positif. Techniquement, la condition essentielle pour l'opérateur `%` est $a \neq 0$.

Corrigé 8

 Démonstration / Trois feux qui clignotent

On compte les secondes à partir de 12 h.

a) Les instants sont :

— feu 1 : 0, 6, 12, 18, 24, 30 ;

— feu 2 : 0, 8, 16, 24 ;

— feu 3 : 0, 12, 24.

b) Le premier instant strictement positif commun aux trois listes est 24. Les trois feux se rallument ensemble après `24 secondes`.

c) Ils s'allument ensemble toutes les 24 secondes. Entre 0 et 120 secondes inclus, les instants communs sont

0, 24, 48, 72, 96, 120.

Il y a donc `6` allumages communs en comptant l'instant initial.

Corrigé 9

 Démonstration / Implication et réciproque

a) L'affirmation initiale est vraie. Si $n = 10k$, alors $n = 5(2k)$; donc n est multiple de 5.

Sa réciproque est : « si un entier est multiple de 5, alors il est multiple de 10. » Elle est fausse : 15 est multiple de 5, mais pas de 10.

b) L'affirmation initiale est vraie. Si $n = 4k$, alors $n = 2(2k)$, donc n est pair.

Sa réciproque est : « si un entier est pair, alors il est divisible par 4. » Elle est fausse : 6 est pair mais n'est pas divisible par 4.

c) L'affirmation initiale est vraie. En effet, si n était pair, on aurait $n = 2k$ et $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, donc n^2 serait pair. Puisque n^2 est impair, n ne peut pas être pair : il est impair.

Sa réciproque est : « si un entier est impair, alors son carré est impair. » Elle est vraie : c'est la démonstration du cours.

Corrigé 10

 *Démonstration / Critère de divisibilité par 3*

a) On soustrait la somme des chiffres :

$$\begin{aligned} N - (a + b + c) &= (100a + 10b + c) - (a + b + c) \\ &= 99a + 9b. \end{aligned}$$

b) On factorise par 3 :

$$99a + 9b = 3(33a + 3b).$$

Comme $33a + 3b$ est entier, cette différence est un multiple de 3.

c) On sait que $N - (a + b + c)$ est un multiple de 3.

Si $a + b + c$ est multiple de 3, alors la somme

$$N = [N - (a + b + c)] + (a + b + c)$$

est une somme de deux multiples de 3 : N est multiple de 3.

Réciproquement, si N est multiple de 3, alors

$$a + b + c = N - [N - (a + b + c)]$$

est une différence de deux multiples de 3 : $a + b + c$ est multiple de 3.

d) $741 : 7 + 4 + 1 = 12$, donc 741 est multiple de 3.

$1\ 256 : 1 + 2 + 5 + 6 = 14$, donc 1 256 n'est pas multiple de 3.

$98\ 763 : 9 + 8 + 7 + 6 + 3 = 33$, donc 98 763 est multiple de 3.

Le raisonnement précédent a été écrit pour trois chiffres, mais la même idée s'étend à un nombre ayant davantage de chiffres.

Corrigé 11

 *Démonstration / Des rectangles entiers*

a) Les dimensions entières correspondent aux paires de facteurs de 72 :

$$72 = 1 \times 72 = 2 \times 36 = 3 \times 24 = 4 \times 18 = 6 \times 12 = 8 \times 9.$$

Les dimensions possibles sont donc

$$\boxed{1 \times 72, 2 \times 36, 3 \times 24, 4 \times 18, 6 \times 12, 8 \times 9}.$$

- b) Le périmètre d'un rectangle de côtés L et ℓ est $2(L + \ell)$. On obtient successivement

146, 76, 54, 44, 36, 34 cm.

Le plus petit périmètre est 34 cm, pour le rectangle $8 \text{ cm} \times 9 \text{ cm}$.

- c) Si l'un des côtés vaut d , l'autre doit valoir $72/d$. Pour que ce second côté soit entier, d doit diviser 72. Chaque paire de diviseurs associés fournit donc un rectangle.

Corrigé 12

 *Démonstration / Une fraction toujours irréductible*

- a) Supposons que d divise n et $n + 1$. Il existe des entiers k et ℓ tels que

$$n = dk \quad \text{et} \quad n + 1 = d\ell.$$

Alors

$$(n + 1) - n = d\ell - dk = d(\ell - k).$$

Donc d divise la différence $(n + 1) - n$.

- b) Cette différence vaut simplement

$$(n + 1) - n = 1.$$

- c) Ainsi, tout diviseur positif commun à n et $n + 1$ doit diviser 1. Le seul diviseur positif de 1 est 1. Les entiers n et $n + 1$ n'ont donc aucun facteur commun autre que 1, et

$\frac{n}{n + 1}$ est irréductible.

Corrigé 13

 *Démonstration / Trois entiers consécutifs*

- a) Quand on range les entiers par groupes de trois, un entier est soit un multiple de 3, soit une unité après un multiple de 3, soit deux unités après. Dans les trois cas, parmi $n, n + 1, n + 2$, l'un est multiple de 3.

On peut l'écrire plus précisément :

- si $n = 3q$, alors n est multiple de 3 ;
- si $n = 3q + 1$, alors $n + 2 = 3(q + 1)$;
- si $n = 3q + 2$, alors $n + 1 = 3(q + 1)$.

- b) Parmi deux entiers consécutifs, l'un est pair. En particulier, parmi trois entiers consécutifs, il y en a au moins un pair.

- c) Le produit $n(n + 1)(n + 2)$ contient donc un facteur multiple de 3 et un facteur multiple de 2. Il contient ainsi les facteurs 2 et 3, donc le facteur $6 = 2 \times 3$. Par conséquent,

$n(n + 1)(n + 2)$ est toujours multiple de 6.

d) Pour $n = 7$:

$$7 \times 8 \times 9 = 504 = 6 \times 84.$$

Cela confirme le résultat pour un cas, mais ne dit rien à lui seul sur les autres valeurs possibles de n . La preuve des questions précédentes couvre tous les entiers.

Corrigé 14

 *Démonstration / Divisibilité cachée*

a) On développe :

$$\begin{aligned}(n+1)^2 - (n-1)^2 &= (n^2 + 2n + 1) - (n^2 - 2n + 1) \\ &= 4n.\end{aligned}$$

b) Comme n est entier, $4n$ est un multiple de 4. Donc la différence proposée est toujours multiple de 4.

c) On factorise :

$$n^2 + n = n(n+1).$$

Les deux facteurs sont consécutifs ; l'un est pair. Leur produit est donc pair.

d) Puisque $n^2 + n$ est pair et 2 est pair, leur somme $n^2 + n + 2$ est paire.

Elle n'est cependant pas toujours multiple de 4. Pour $n = 3$,

$$n^2 + n + 2 = 9 + 3 + 2 = 14,$$

qui n'est pas multiple de 4. Un seul contre-exemple suffit à réfuter l'affirmation « toujours multiple de 4 ».

Corrigé 15

 *Démonstration / Une affirmation trompeuse*

a) Pour $n = 4$, $n^2 = 16$ est multiple de 4 et n aussi. Pour $n = 8$, on a encore deux multiples de 4. Ces exemples peuvent donner l'impression que l'affirmation est vraie, mais ils ne constituent pas une preuve.

b) Prenons $n = 2$. Alors $n^2 = 4$ est multiple de 4, mais 2 n'est pas multiple de 4. L'affirmation est donc fausse.

c) La conclusion correcte est :

si n^2 est multiple de 4, alors n est pair.

Démontrons-la. Supposons, au contraire, que n soit impair. Le carré d'un entier impair est impair d'après le cours. Ainsi n^2 serait impair, donc ne pourrait pas être multiple de 4. Cette contradiction montre que n est pair.

Corrigé du problème : Les entiers cachés entre deux carrés

 *Démonstration / Partie A – Observer et construire*

1.

$$2^2 - 1^2 = 3, \quad 3^2 - 2^2 = 5, \quad 4^2 - 3^2 = 7, \quad 5^2 - 4^2 = 9.$$

On obtient les nombres impairs successifs 3, 5, 7, 9.

2.

$$(k+1)^2 - k^2 = (k^2 + 2k + 1) - k^2 = \boxed{2k+1}.$$

3. Tout entier naturel impair N peut s'écrire $N = 2k + 1$ pour un entier naturel k . D'après la question précédente,

$$N = 2k + 1 = (k+1)^2 - k^2.$$

C'est bien la différence des carrés de deux entiers consécutifs. Par exemple, $15 = 8^2 - 7^2$.

4. Pour $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} (k+1)^2 - (k-1)^2 &= (k^2 + 2k + 1) - (k^2 - 2k + 1) \\ &= \boxed{4k}. \end{aligned}$$

On obtient donc tous les multiples strictement positifs de 4. Par exemple, avec $k = 5$: $20 = 6^2 - 4^2$.

 *Démonstration / Partie B – Comprendre l'obstacle*

5. On reconnaît l'identité remarquable :

$$a^2 - b^2 = \boxed{(a-b)(a+b)}.$$

6. Les nombres $a - b$ et $a + b$ diffèrent de $2b$:

$$(a+b) - (a-b) = 2b,$$

qui est pair. Deux entiers dont la différence est paire ont la même parité. Ainsi, $a - b$ et $a + b$ sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs.

On peut aussi raisonner sur a et b : s'ils ont la même parité, somme et différence sont paires ; s'ils ont des parités différentes, somme et différence sont impaires.

7. Si $a - b$ et $a + b$ sont impairs, leur produit $(a-b)(a+b)$ est impair. Donc $a^2 - b^2$ est impair.

8. S'ils sont pairs, il existe des entiers u et v tels que

$$a - b = 2u \quad \text{et} \quad a + b = 2v.$$

Alors

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = (2u)(2v) = 4uv.$$

La différence des carrés est donc multiple de 4.

9. Les deux seuls cas possibles sont donc :

- la différence est impaire ;
- la différence est multiple de 4.

Un entier pair qui n'est pas multiple de 4 n'appartient à aucune de ces deux familles. Il ne peut donc pas être une différence de deux carrés.

 Démonstration / Partie C – La caractérisation complète

10. On a obtenu la caractérisation suivante :

Un entier naturel strictement positif est une différence de deux carrés

si et seulement s'il est impair ou multiple de 4.

11. Il faut bien justifier les deux sens.

Premier sens. Si un entier est une différence de deux carrés, la partie B montre qu'il est soit impair, soit multiple de 4.

Sens réciproque. S'il est impair, la partie A donne la construction

$$2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2.$$

S'il est multiple de 4, la partie A donne la construction

$$4k = (k + 1)^2 - (k - 1)^2.$$

Les deux sens sont donc prouvés.

12. 2025 est impair. Avec $2025 = 2 \times 1012 + 1$,

$$2025 = 1013^2 - 1012^2.$$

2026 est pair mais n'est pas multiple de 4 : $2026 = 4 \times 506 + 2$. Il est donc **impossible** de l'écrire comme différence de deux carrés d'entiers.

2028 est multiple de 4 : $2028 = 4 \times 507$. On utilise la seconde construction :

$$2028 = 508^2 - 506^2.$$

13. La construction avec deux carrés consécutifs donne

$$45 = 23^2 - 22^2.$$

Pour en trouver une autre, on utilise $45 = 5 \times 9$ et on cherche $a - b = 5$, $a + b = 9$. En additionnant, $2a = 14$, donc $a = 7$, puis $b = 2$. Ainsi

$$45 = 23^2 - 22^2 = 7^2 - 2^2.$$

Fin de la Fiche 1 – Arithmétique

Tu sais maintenant utiliser multiples, diviseurs et parité pour calculer, mais surtout pour démontrer.

Relis les preuves en cachant les lignes : essaie de retrouver toi-même la prochaine étape.

→ Prochaine fiche : Nombres réels, intervalles et valeur absolue.