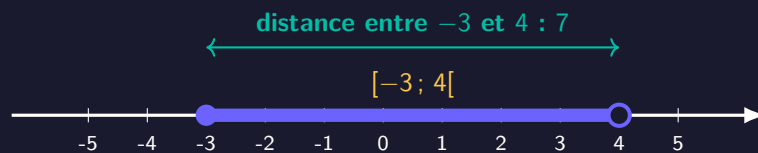


Nombres réels

Intervalles & valeur absolue

Ensembles de nombres ▪ Droite réelle ▪ Distances



Seconde générale ▪ Mathématiques ▪ Programme officiel

 Cours complet

 15 exercices

 Problème défi

 Corrigés

Table des matières

1	🔍 Pourquoi étudier les nombres réels ?	3
1.1	Le problème fondamental	3
1.2	Exact ou approché ?	3
2	🧠 L'idée avant la formule	3
2.1	Des boîtes de nombres emboîtées	3
2.2	Un intervalle est un morceau de droite	4
2.3	La valeur absolue mesure une distance	4
3	📖 Le cours complet	4
3.1	La droite réelle	4
3.2	Les cinq ensembles de nombres	5
3.3	Intervalles bornés	6
3.4	Intervalles non bornés	7
3.5	Représenter un intervalle	7
3.6	Intersection, réunion et complémentaire	7
3.7	Valeur absolue et distance	8
3.8	Intervalle de centre donné	9
3.9	Encadrement décimal et amplitude	10
3.10	Troncature, arrondi et chiffres significatifs	10
3.11	Pourquoi $\frac{1}{3}$ n'est-il pas décimal ?	11
3.12	Pourquoi $\sqrt{2}$ est-il irrationnel ?	11
3.13	Encadrer $\sqrt{2}$ par balayage	12
3.14	Développements décimaux illimités	12
4	🧰 Boîte à outils : les réflexes	13
5	🎯 Pour aller plus loin	14
5.1	Reconnaître une fraction décimale sans la calculatrice	14
5.2	Fabriquer de nouveaux irrationnels	15
6	✎ Exercices	16
7	🔑 Problème : <i>Un irrationnel dans chaque intervalle</i> ★★ ★	19
8	✔ Corrigés détaillés	20

1 ? Pourquoi étudier les nombres réels ?

1.1 Le problème fondamental

Les entiers ne suffisent pas pour mesurer le monde. La diagonale d'un carré de côté 1 mesure $\sqrt{2}$, un disque fait intervenir π , et une température peut valoir $-3,7^{\circ}\text{C}$.

Nous avons donc besoin d'un ensemble de nombres assez vaste pour :

- repérer chaque point d'une droite graduée ;
- exprimer une mesure exacte ou approchée ;
- décrire tout un groupe de valeurs avec un intervalle ;
- traduire une contrainte de distance par une inégalité.

Intuition | Une droite sans trou

Les nombres réels remplissent la droite graduée : à chaque nombre réel correspond un point, et à chaque point correspond un nombre réel. Certains nombres ont une écriture simple, d'autres ne peuvent être connus que par des approximations de plus en plus précises.

1.2 Exact ou approché ?

La calculatrice affiche souvent 1,414213562 pour $\sqrt{2}$. Pourtant,

$$\sqrt{2} \neq 1,414213562.$$

Le nombre de droite est exact ; celui de gauche est seulement une valeur approchée. Cette distinction est essentielle : arrondir trop tôt peut fausser un calcul, tandis qu'une valeur exacte conserve toute l'information.

Attention

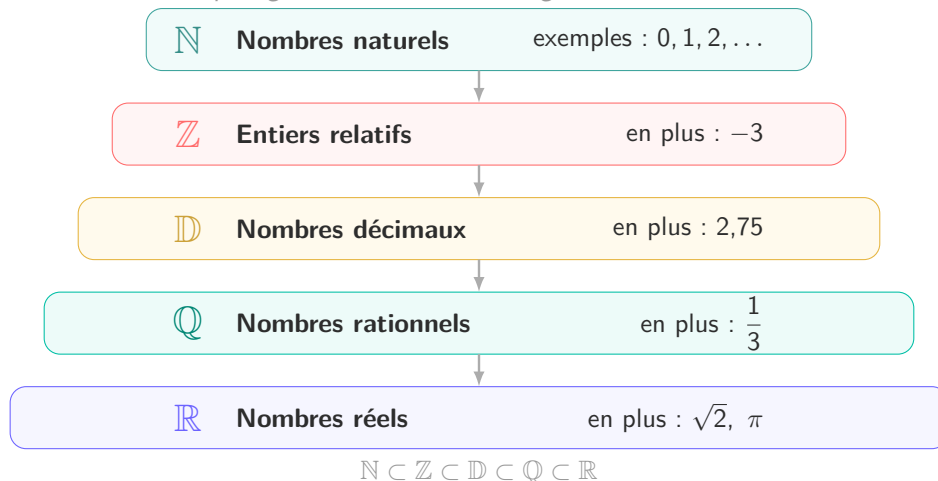
Le signe $=$ signifie « exactement égal ». Pour une approximation, utilise $\approx$, un encadrement, ou précise clairement « arrondi à ... ».

2 L'idée avant la formule

2.1 Des boîtes de nombres emboîtées

Tous les nombres n'ont pas la même nature. Le nombre 5 est entier naturel, donc aussi entier relatif, décimal, rationnel et réel. En revanche, $\sqrt{2}$ est réel mais n'est rationnel.

Chaque ligne contient toutes les lignes situées au-dessus.



2.2 Un intervalle est un morceau de droite

L'intervalle $[-2; 3]$ contient tous les réels compris entre -2 et 3 , extrémités incluses. Il ne s'agit pas seulement des entiers $-2, -1, 0, 1, 2, 3$: il contient aussi $-1,8$, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$, et une infinité d'autres nombres.



2.3 La valeur absolue mesure une distance

$|x|$ ne doit pas être appris comme une mystérie de signes. C'est la distance entre le point d'abscisse x et l'origine. Ainsi $|-4| = 4$ et $|4| = 4$: les points -4 et 4 sont tous les deux à quatre unités de 0.

Plus généralement, $|x - a|$ est la distance entre x et a . La condition $|x - a| \leq r$ signifie donc que x reste à une distance au plus r du centre a .

3 Le cours complet

3.1 La droite réelle

Définition | Ensemble des nombres réels

L'ensemble $\mathbb{R}$ des **nombres réels** est l'ensemble de tous les nombres qui peuvent être placés sur une droite graduée. Chaque point de la droite possède une unique abscisse réelle.

Sur une droite graduée orientée vers la droite :

- si le point d'abscisse a est à gauche du point d'abscisse b , alors $a < b$;
- si les deux points sont confondus, alors $a = b$;
- plus un nombre est à droite, plus il est grand.

💡 Exemple

Sur la droite réelle,

$$-3 < -\sqrt{2} < 0 < \frac{1}{2} < 1,4 < \sqrt{2} < 2.$$

En effet, $1,4^2 = 1,96 < 2$ et $2^2 = 4 > 2$, donc $1,4 < \sqrt{2} < 2$.

3.2 Les cinq ensembles de nombres

📖 Définition | Entiers naturels et relatifs

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}, \quad \mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}.$$

$\mathbb{N}$ contient les entiers naturels et $\mathbb{Z}$ tous les entiers relatifs.

📖 Définition | Nombres décimaux

Un nombre est **décimal** s'il peut s'écrire sous la forme

$$\frac{a}{10^n},$$

où a est un entier relatif et n un entier naturel. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Un nombre décimal possède une écriture décimale finie. Par exemple,

$$-3,125 = \frac{-3125}{1000} = \frac{-3125}{10^3}.$$

Un entier est aussi décimal : $7 = \frac{7}{10^0}$.

📖 Définition | Nombres rationnels

Un nombre est **rationnel** s'il peut s'écrire sous la forme

$$\frac{p}{q},$$

où p et q sont des entiers et $q \neq 0$. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

💡 Exemple

$\frac{1}{3}$, $-\frac{17}{8}$ et 5 sont rationnels. En effet, $5 = \frac{5}{1}$.

Le nombre $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ est rationnel, mais son écriture décimale ne s'arrête jamais : il n'est pas décimal.

Définition | Nombres irrationnels

Un nombre réel qui n'est pas rationnel est appelé **irrationnel**. Il ne peut pas s'écrire comme quotient de deux entiers. Les nombres $\sqrt{2}$ et π sont irrationnels.

Propriété | La chaîne des inclusions

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Chaque inclusion signifie que tout nombre du premier ensemble appartient aussi au suivant.

Attention | Appartenance ou inclusion ?

Le symbole $\in$ relie un **nombre** à un ensemble : $3 \in \mathbb{N}$.

Le symbole $\subset$ relie deux **ensembles** : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

On n'écrit ni $3 \subset \mathbb{N}$, ni $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$.

Méthode | Trouver le plus petit ensemble

Pour classer un nombre, cherche l'ensemble le plus petit auquel il appartient.

- -4 est d'abord un entier relatif : $-4 \in \mathbb{Z}$.
- $2,75$ est décimal mais pas entier : $2,75 \in \mathbb{D}$.
- $\frac{2}{7}$ est rationnel mais pas décimal : $\frac{2}{7} \in \mathbb{Q}$.
- $\sqrt{3}$ est irrationnel : $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

3.3 Intervalles bornés

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Intervalle	Inégalités vérifiées par x	Extrémités
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	a et b incluses
$]a; b[$	$a < x < b$	a et b exclues
$[a; b[$	$a \leq x < b$	a incluse, b exclue
$]a; b]$	$a < x \leq b$	a exclue, b incluse

Définition | Ouvert ou fermé

Un crochet tourné **vers l'intérieur** signifie que l'extrémité appartient à l'intervalle.

Un crochet tourné **vers l'extérieur** signifie que l'extrémité n'appartient pas à l'intervalle.

Exemple

Pour $I = [-2; 5[$:

$$-2 \in I, \quad 0 \in I, \quad 4,999 \in I, \quad 5 \notin I.$$

La traduction en inégalités est $-2 \leq x < 5$.

3.4 Intervalles non bornés

Intervalle	Condition sur x
$[a; +\infty[$	$x \geq a$
$]a; +\infty[$	$x > a$
$] - \infty; a]$	$x \leq a$
$] - \infty; a[$	$x < a$
$] - \infty; +\infty[= \mathbb{R}$	aucune restriction

⚠ Attention | L'infini n'est pas un nombre

$+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres réels. On ne peut donc jamais les inclure dans un intervalle : le crochet est toujours ouvert du côté de l'infini.

3.5 Représenter un intervalle

🔧 Méthode | Sur une droite graduée

- repère les extrémités ;
- utilise un point plein pour une extrémité incluse ;
- utilise un point vide pour une extrémité exclue ;
- colorie tous les points de l'intervalle ;
- ajoute une flèche si l'intervalle se prolonge vers l'infini.



3.6 Intersection, réunion et complémentaire

📖 Définition | Intersection et réunion

L'**intersection** $A \cap B$ contient les nombres qui appartiennent à A **et** à B .

La **réunion** $A \cup B$ contient les nombres qui appartiennent à A **ou** à B , éventuellement aux deux.

💡 Exemple

Soient $A = [-3; 2]$ et $B = [0; 5[$.

$$A \cap B = [0; 2], \quad A \cup B = [-3; 5[.$$

L'intersection est la zone commune ; la réunion rassemble les deux zones.

📖 Définition | Ensemble vide et complémentaire

L'ensemble qui ne contient aucun élément est noté $\emptyset$.

Le complémentaire de A dans un ensemble de référence E contient les éléments de E qui n'appartiennent pas à A . Il se note $E \setminus A$.

💡 Exemple

Dans $E = \mathbb{R}$, si $A = [-1; 3]$, alors

$$\mathbb{R} \setminus A =]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[.$$

Les bornes -1 et 3 sont exclues du complémentaire parce qu'elles appartiennent à A .

3.7 Valeur absolue et distance

📖 Définition | Valeur absolue

La valeur absolue $|x|$ d'un réel x est la distance entre le point d'abscisse x et l'origine 0 . Ainsi,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

💡 Exemple

$$|7| = 7, \quad |-7| = 7, \quad |0| = 0, \quad |3 - 8| = |-5| = 5.$$

Dans le cas $x = -7$, on a bien $|x| = -x = -(-7) = 7$.

⚠️ Attention

Une distance est toujours positive ou nulle. La valeur absolue n'est donc jamais négative : $|x| \geq 0$.

Définition | Distance entre deux réels

La distance entre deux réels a et b est

$$d(a, b) = |a - b| = |b - a|.$$

Exemple

La distance entre -3 et 5 vaut

$$|-3 - 5| = |-8| = 8.$$

On retrouve les huit unités parcourues sur la droite entre -3 et 5 .

3.8 Intervalle de centre donné

★ Théorème | Traduction distance – intervalle

Pour $r \geq 0$,

$$|x - a| \leq r \quad \text{si et seulement si} \quad x \in [a - r; a + r].$$

L'intervalle a pour centre a et pour rayon r .

Démonstration | Comprendre la formule

$|x - a|$ est la distance entre x et a . Demander que cette distance soit au plus r signifie que x peut se déplacer de r unités au maximum vers la gauche ou vers la droite à partir de a .

La borne de gauche est donc $a - r$, et celle de droite $a + r$. Les bornes sont incluses car la distance peut être exactement égale à r .

Exemple

$$|x - 4| \leq 3 \quad \text{si et seulement si} \quad x \in [4 - 3; 4 + 3] = [1; 7].$$

De même,

$$|x + 2| \leq 5 \quad \text{si et seulement si} \quad |x - (-2)| \leq 5 \quad \text{si et seulement si} \quad x \in [-7; 3].$$

Méthode | Retrouver centre et rayon

Pour un intervalle $[u; v]$:

$$\text{centre } a = \frac{u + v}{2}, \quad \text{rayon } r = \frac{v - u}{2}.$$

Ainsi $[u; v] = [a - r; a + r]$ et il peut s'écrire $|x - a| \leq r$.

3.9 Encadrement décimal et amplitude

Définition | Encadrement et amplitude

Encadrer un réel x , c'est trouver deux nombres a et b tels que

$$a \leq x \leq b.$$

L'**amplitude** de l'encadrement est $b - a$.

Exemple

Comme $1,41^2 = 1,9881 < 2$ et $1,42^2 = 2,0164 > 2$,

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42.$$

Cet encadrement a pour amplitude $1,42 - 1,41 = 0,01 = 10^{-2}$.

Méthode | Encadrement à 10^{-n} près

Pour encadrer un réel à 10^{-n} près, on cherche deux nombres décimaux consécutifs ayant n chiffres après la virgule et entre lesquels se trouve le nombre.

Par exemple, un encadrement de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près est

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415.$$

3.10 Troncature, arrondi et chiffres significatifs

Définition | Troncature et arrondi

La **troncature** coupe l'écriture décimale après un rang donné.

L'**arrondi** choisit le nombre décimal le plus proche au rang demandé. On regarde le premier chiffre supprimé :

- s'il est inférieur à 5, on garde le dernier chiffre conservé ;
- s'il est supérieur ou égal à 5, on augmente ce chiffre d'une unité.

Pour $\pi \approx 3,14159265$:

troncature au millième : 3,141, *quad*arrondi au millième : 3,142.

Définition | Chiffres significatifs

Les chiffres significatifs commencent au premier chiffre non nul. Ils indiquent la précision pertinente d'une mesure.

 Exemple

0,004 57 possède trois chiffres significatifs : 4, 5 et 7.

La distance 12 748 m arrondie à trois chiffres significatifs vaut 12 700 m, soit 12,7 km.

 Attention | La précision doit avoir du sens

Une mesure au centimètre près ne doit pas être annoncée avec dix décimales. Les chiffres significatifs doivent refléter la précision des données et le contexte.

3.11 Pourquoi $\frac{1}{3}$ n'est-il pas décimal ? **Théorème | Démonstration exigible**

Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

 Démonstration | Preuve par l'absurde

Supposons que $\frac{1}{3}$ soit décimal. Par définition, il existerait un entier a et un entier naturel n tels que

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}.$$

En multipliant les deux membres par 3×10^n , on obtiendrait

$$10^n = 3a.$$

Ainsi, 10^n serait un multiple de 3.

Or $10^n = 2^n \times 5^n$: sa décomposition ne contient aucun facteur 3. Le nombre 10^n n'est donc pas divisible par 3. Nous obtenons une contradiction.

L'hypothèse de départ est fausse : $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$. Pourtant $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, car c'est bien un quotient d'entiers. $\square$

3.12 Pourquoi $\sqrt{2}$ est-il irrationnel ? **Théorème | Démonstration exigible**

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

 Démonstration | Preuve par l'absurde

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. On pourrait alors l'écrire sous la forme d'une fraction irréductible

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

où p et q sont des entiers, $q \neq 0$, et p et q n'ont aucun diviseur commun autre que 1.

En élevant au carré :

$$2 = \frac{p^2}{q^2}, \quad \text{donc} \quad p^2 = 2q^2.$$

Ainsi p^2 est pair. Si p était impair, son carré serait impair d'après la fiche 01. Donc p est pair : il existe un entier k tel que $p = 2k$.

En remplaçant p :

$$(2k)^2 = 2q^2, \quad \text{soit} \quad 4k^2 = 2q^2, \quad \text{soit} \quad 2k^2 = q^2.$$

Ainsi q^2 est pair, donc q est pair.

Les nombres p et q sont donc tous les deux pairs : ils ont 2 comme diviseur commun. Cela contredit le fait que la fraction $\frac{p}{q}$ était irréductible.

L'hypothèse est fautive : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Comme $\sqrt{2}$ est réel, il est irrationnel. $\square$

3.13 Encadrer $\sqrt{2}$ par balayage

Méthode | Algorithme du programme

Le programme suivant cherche deux décimaux consécutifs à 10^{-n} près dont les carrés encadrent 2.

```
1 def encadrement_racine_2(n):
2     puissance = 10**n
3     k = 0
4     while (k + 1)**2 <= 2 * puissance**2:
5         k = k + 1
6     return k / puissance, (k + 1) / puissance
```

Pour $n = 3$, la fonction renvoie (1,414; 1,415).

Intuition | Pourquoi l'algorithme fonctionne

Les nombres testés sont 0, 0,001, 0,002, etc. L'algorithme avance tant que le carré du nombre suivant ne dépasse pas 2. Lorsqu'il s'arrête, $k/10^n$ est juste en dessous de $\sqrt{2}$ et $(k + 1)/10^n$ juste au-dessus.

La comparaison est effectuée avec des entiers, ce qui évite une partie des erreurs liées aux nombres flottants.

3.14 Développements décimaux illimités

Un nombre rationnel a une écriture décimale qui est soit finie, soit illimitée et périodique à partir d'un certain rang :

$$\frac{1}{3} = 0,\overline{3}, \quad \frac{2}{7} = 0,\overline{285714}, \quad \frac{1}{6} = 0,1\overline{6}.$$

Les nombres irrationnels ont une écriture décimale illimitée non périodique. Aucune suite finie de chiffres ne permet de les écrire exactement.

⚠ Attention

Cette observation aide à comprendre les ensembles, mais il ne suffit pas d'observer quelques chiffres sur une calculatrice pour prouver qu'un nombre est irrationnel. Une preuve porte sur l'écriture complète, pas sur les chiffres affichés.

4 Boîte à outils : les réflexes

Méthode | Choisir la bonne traduction

Information	Traduction utile
x est compris entre a et b , bornes incluses	$x \in [a; b]$ ou $a \leq x \leq b$
x est strictement supérieur à a	$x \in]a; +\infty[$
x appartient à A et à B	$x \in A \cap B$
x appartient à A ou à B	$x \in A \cup B$
x est à moins de r unités de a	$ x - a \leq r$ et $x \in [a - r; a + r]$
Encadrement à 10^{-n} près	amplitude inférieure ou égale à 10^{-n}

⚠ Attention | Les six erreurs classiques

1. Confondre $\in$ et $\subset$.
2. Fermer un crochet du côté de $+\infty$ ou $-\infty$.
3. Oublier qu'un intervalle contient tous les réels, pas seulement les entiers.
4. Croire que $|x|$ est toujours égal à x ; si $x < 0$, alors $|x| = -x$.
5. Confondre troncature et arrondi.
6. Remplacer une valeur exacte par une valeur approchée sans utiliser le symbole $\approx$.

Exemple | Une rédaction complète

Question : traduire $|x - 3| \leq 4$ par un intervalle.

Rédaction : $|x - 3|$ est la distance entre x et 3. Elle doit être inférieure ou égale à 4. Le centre est donc 3 et le rayon 4 :

$$x \in [3 - 4; 3 + 4] = [-1; 7].$$

5 Pour aller plus loin

Cette partie dépasse les attendus obligatoires du programme. Elle ne suppose pourtant aucun don particulier : chaque idée est construite à partir de ce que tu viens d'apprendre. L'objectif est de te donner accès à des raisonnements souvent réservés aux classes les plus avancées.

5.1 Reconnaître une fraction décimale sans la calculatrice

★ Théorème | Caractérisation des rationnels décimaux

Soit $\frac{p}{q}$ une fraction irréductible avec $q > 0$. Cette fraction représente un nombre décimal si et seulement si la décomposition en facteurs premiers de q ne contient que des facteurs 2 et 5.

Autrement dit, il existe des entiers naturels α et β tels que

$$q = 2^\alpha 5^\beta.$$

Démonstration | Sens direct

Supposons que $\frac{p}{q}$ soit décimal. Il peut alors s'écrire avec un dénominateur 10^n :

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{10^n}.$$

Or $10^n = 2^n 5^n$. Quand on simplifie la fraction $\frac{a}{10^n}$ pour obtenir la fraction irréductible $\frac{p}{q}$, les facteurs du nouveau dénominateur proviennent nécessairement de ceux de 10^n . Il ne peut donc rester que des facteurs 2 et 5 dans q .

Démonstration | Sens réciproque

Supposons $q = 2^\alpha 5^\beta$. Posons n égal au plus grand des deux entiers α et β . En multipliant q par

$$2^{n-\alpha} 5^{n-\beta},$$

on obtient

$$q \times 2^{n-\alpha} 5^{n-\beta} = 2^n 5^n = 10^n.$$

On peut donc transformer $\frac{p}{q}$ en une fraction de dénominateur 10^n : c'est un nombre décimal.

Exemple

— $\frac{7}{40}$ est décimal car $40 = 2^3 \times 5$. En effet,

$$\frac{7}{40} = \frac{7 \times 25}{40 \times 25} = \frac{175}{1000} = 0,175.$$

— $\frac{5}{12}$ n'est pas décimal car la fraction est irréductible et $12 = 2^2 \times 3$ contient le facteur premier 3.

5.2 Fabriquer de nouveaux irrationnels

✓ Propriété

Si x est irrationnel et r rationnel, alors $x + r$ est irrationnel.

Si x est irrationnel et r est un rationnel non nul, alors rx est irrationnel.

Démonstration / Preuves par contradiction

Supposons que $x + r$ soit rationnel. Comme la différence de deux rationnels est rationnelle,

$$x = (x + r) - r$$

serait rationnel, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $x + r$ est irrationnel.

Supposons maintenant que rx soit rationnel, avec $r \neq 0$. Puisque $1/r$ est rationnel,

$$x = \frac{1}{r} (rx)$$

serait rationnel. C'est encore une contradiction. Donc rx est irrationnel.

Intuition | Ce que prépare le problème

Ces deux règles permettent de déplacer et de réduire un irrationnel connu. On peut ainsi glisser un nombre irrationnel dans un intervalle aussi petit que l'on veut. Les nombres irrationnels ne sont pas des exceptions isolées : ils sont partout sur la droite réelle.

6 Exercices

Exercice 1 : Le plus petit ensemble

Pour chaque nombre, indique le plus petit ensemble parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ auquel il appartient.

a) 0 b) -7 c) 3,25 d) $\frac{7}{4}$ e) $\frac{1}{3}$

f) $\sqrt{49}$ g) $\sqrt{5}$ h) π i) $-\sqrt{9}$ j) $\frac{10}{5}$.

Exercice 2 : Appartenance ou inclusion ?

Complète avec $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$.

a) $-3 \dots \mathbb{Z}$ b) $\mathbb{N} \dots \mathbb{Q}$ c) $\frac{2}{7} \dots \mathbb{D}$

d) $\mathbb{D} \dots \mathbb{R}$ e) $\pi \dots \mathbb{Q}$ f) $\mathbb{Z} \dots \mathbb{N}$.

Exercice 3 : Des inégalités aux intervalles

Traduis chaque condition par un intervalle.

a) $-2 \leq x \leq 5$ b) $3 < x < 9$ c) $x \geq -4$

d) $x < 7$ e) $-1 < x \leq 6$ f) $x \leq 0$.

Exercice 4 : Appartenir à un intervalle

On pose $I = [-3; 2[$ et $J =]-1; 4]$. Indique si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

a) $-3 \in I$ b) $2 \in I$ c) $-1 \in J$ d) $4 \in J$

e) $0 \in I \cap J$ f) $3 \in I \cup J$.

Exercice 5 : Représenter sur une droite

Représente sur trois droites graduées différentes les intervalles

$$A = [-4; 1], \quad B =]2; 6[, \quad C =]-\infty; 3].$$

Précise pour chaque borne si elle est incluse ou exclue.

Exercice 6 : Intersection et réunion

Pour chaque paire d'intervalles, détermine $A \cap B$ et $A \cup B$.

a) $A = [-2; 5]$ et $B = [1; 8[$.

b) $A =]-\infty; 3]$ et $B =]0; +\infty[$.

c) $A = [-5; -1]$ et $B = [2; 6]$.

d) $A =]-3; 4[$ et $B = [-3; 4]$.

Exercice 7 ★★☆☆ : Complémentaires

Dans l'ensemble de référence $\mathbb{R}$, détermine le complémentaire de chacun des ensembles suivants.

- a) $[-2; 5]$ b) $]1; +\infty[$ c) $] - \infty; 4[$ d) $\mathbb{R}$.

Exercice 8 ★★☆☆ : Valeurs absolues et distances

- a) Calcule $|-8|$, $|5|$, $|3 - 11|$ et $|-4 - 7|$.
b) Calcule la distance entre -6 et 2 , puis entre $-3,5$ et $1,2$.
c) Trouve les deux nombres situés à une distance 5 de 2.
d) Trouve le nombre situé à égale distance de -4 et 10 .

Exercice 9 ★★☆☆ : Distance et intervalle

Traduis chaque inéquation par un intervalle.

- a) $|x - 3| \leq 2$ b) $|x + 4| \leq 1$ c) $|x| \leq 7$.

Puis traduis chaque intervalle par une inéquation avec une valeur absolue.

- d) $[-2; 6]$ e) $[-5; 1]$ f) $[0; 10]$.

Exercice 10 ★★☆☆ : Centre, rayon et modélisation

Une pièce fabriquée est acceptée si sa longueur L , en millimètres, diffère de 25 de moins de 0,3 mm, valeur limite acceptée.

- a) Traduis la condition par $|L - a| \leq r$.
b) Donne l'intervalle des longueurs acceptées.
c) Les pièces de longueurs 24,69, 24,70, 25,18 et 25,31 sont-elles acceptées ?

Exercice 11 ★★☆☆ : Encadrer une racine carrée

Sans utiliser la touche décimale de la calculatrice :

- a) calcule $2,2^2$ et $2,3^2$, puis encadre $\sqrt{5}$ à 10^{-1} près ;
b) calcule $2,23^2$ et $2,24^2$, puis encadre $\sqrt{5}$ à 10^{-2} près ;
c) donne l'amplitude de chaque encadrement.

Exercice 12 ★★☆☆ : Arrondis raisonnables

- a) Donne la troncature et l'arrondi de 12,9876 au centième.
b) Arrondis 0,004 786 à trois chiffres significatifs.
c) Une distance est mesurée au mètre près : 12 347 m. Donne une écriture en kilomètres avec un nombre de chiffres significatifs cohérent.
d) Explique pourquoi annoncer 12,347000000 km serait trompeur.

Exercice 13 ★★☆☆ : Comprendre le balayage

On reprend la fonction `encadrement_racine_2` du cours.

- a) Pour $n = 1$, quelle est la valeur de puissance ?
- b) Justifie que la boucle s'arrête avec $k = 14$.
- c) Quel encadrement est renvoyé ? Quelle est son amplitude ?
- d) Sans exécuter le programme, prévois le résultat pour $n = 2$.

Exercice 14 ★★☆☆ : Le test des facteurs 2 et 5

Pour chaque fraction, commence par la rendre irréductible, puis détermine si elle représente un nombre décimal. Justifie sans effectuer la division.

a) $\frac{13}{125}$ b) $\frac{7}{30}$ c) $\frac{21}{84}$ d) $\frac{18}{45}$ e) $\frac{11}{48}$.

Exercice 15 ★★☆☆ : Prouver que $\sqrt{3}$ est irrationnel

- a) Montre que le carré d'un entier de la forme $3k + 1$ ou $3k + 2$ n'est pas multiple de 3.
- b) Dédus que si n^2 est multiple de 3, alors n est multiple de 3.
- c) Suppose que $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ avec $\frac{p}{q}$ irréductible. En t'inspirant de la preuve pour $\sqrt{2}$, montre que p et q seraient tous les deux multiples de 3.
- d) Conclus.

7 🐼 Problème : *Un irrationnel dans chaque intervalle* ★★ ★

Le but est de démontrer que tout intervalle ouvert dont les bornes sont rationnelles contient à la fois des nombres rationnels et des nombres irrationnels. Autrement dit, même avec une loupe infiniment puissante, les deux familles restent entremêlées.

Partie A – Les rationnels sont stables par calcul

1. Soient $r = \frac{a}{b}$ et $s = \frac{c}{d}$ deux rationnels, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$. Montre que $r + s$ est rationnel.
2. Montre de même que rs est rationnel.
3. Si $r \neq 0$, montre que $\frac{1}{r}$ est rationnel.

Partie B – Déplacer et réduire un irrationnel

4. Soient x irrationnel et r rationnel. En supposant $x + r$ rationnel, obtiens une contradiction. Conclus.
5. Soient x irrationnel et r rationnel non nul. En supposant rx rationnel, obtiens une contradiction. Conclus.
6. On pose $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Montre que u est irrationnel puis que $0 < u < 1$.

Partie C – Remplir un intervalle

7. Soient a et b deux rationnels tels que $a < b$. On pose

$$x = a + (b - a)u.$$

Montre que $a < x < b$.

8. Montre que x est irrationnel.
9. Construis ainsi un nombre irrationnel strictement compris entre 1,414 et 1,415.
10. Montre que le milieu $m = \frac{a+b}{2}$ est rationnel et vérifie $a < m < b$.
11. Explique pourquoi les questions précédentes prouvent que tout intervalle ouvert à bornes rationnelles contient au moins un rationnel et au moins un irrationnel.
12. Trouve une deuxième construction donnant un irrationnel différent de x dans $]a; b[$.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Le plus petit ensemble*

On simplifie le nombre avant de le classer.

- a) 0 est un entier naturel : $0 \in \mathbb{N}$.
- b) -7 est entier mais n'est pas naturel : $-7 \in \mathbb{Z}$.
- c) $3,25 = \frac{325}{100}$ possède une écriture décimale finie : $3,25 \in \mathbb{D}$.
- d) $\frac{7}{4} = 1,75$ est décimal mais pas entier : $\frac{7}{4} \in \mathbb{D}$.
- e) $\frac{1}{3}$ est rationnel mais n'est pas décimal, d'après la preuve du cours : $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$.
- f) $\sqrt{49} = 7$: le plus petit ensemble est $\mathbb{N}$.
- g) $\sqrt{5}$ est irrationnel. La preuve est semblable à celle de $\sqrt{2}$: une fraction irréductible supposée égale à $\sqrt{5}$ conduirait à un numérateur et un dénominateur tous deux divisibles par 5. Ainsi $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$, mais $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.
- h) π est irrationnel : le plus petit ensemble proposé est $\mathbb{R}$.
- i) $-\sqrt{9} = -3$: le plus petit ensemble est $\mathbb{Z}$.
- j) $\frac{10}{5} = 2$: après simplification, le plus petit ensemble est $\mathbb{N}$.

Corrigé 2

 *Démonstration / Appartenance ou inclusion ?*

- a) $-3 \in \mathbb{Z}$: on relie un nombre à un ensemble.
- b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$: tout entier naturel est rationnel, car $n = \frac{n}{1}$.
- c) $\frac{2}{7} \notin \mathbb{D}$: la fraction est irréductible et son dénominateur contient le facteur premier 7.
- d) $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$: tout nombre décimal est réel.
- e) $\pi \notin \mathbb{Q}$: π est irrationnel.
- f) $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$: par exemple, $-1 \in \mathbb{Z}$ mais $-1 \notin \mathbb{N}$.

Corrigé 3

 Démonstration / Des inégalités aux intervalles

a) $-2 \leq x \leq 5$ devient $x \in [-2; 5]$.

b) $3 < x < 9$ devient $x \in]3; 9[$.

c) $x \geq -4$ devient $x \in [-4; +\infty[$.

d) $x < 7$ devient $x \in]-\infty; 7[$.

e) $-1 < x \leq 6$ devient $x \in]-1; 6]$.

f) $x \leq 0$ devient $x \in]-\infty; 0]$.

Les crochets sont toujours ouverts du côté de l'infini.

Corrigé 4

 Démonstration / Appartenir à un intervalle

On a $I = [-3; 2[$ et $J =]-1; 4]$.

a) **Vrai** : -3 est la borne incluse de I .

b) **Faux** : 2 est la borne exclue de I .

c) **Faux** : -1 est la borne exclue de J .

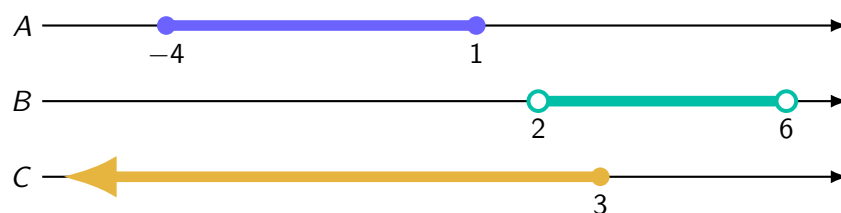
d) **Vrai** : 4 est la borne incluse de J .

e) **Vrai** : 0 appartient à I et à J , donc $0 \in I \cap J$.

f) **Vrai** : $3 \notin I$, mais $3 \in J$. Il suffit d'appartenir à l'un des deux ensembles pour appartenir à $I \cup J$.

Corrigé 5

 Démonstration / Représenter sur une droite



Pour A, les deux bornes sont incluses. Pour B, elles sont toutes deux exclues. Pour C, la borne 3 est incluse et $-\infty$ n'est jamais inclus.

Corrigé 6

 Démonstration / Intersection et réunion

- a) La zone commune de $[-2; 5]$ et $[1; 8[$ va de 1 à 5, bornes incluses :

$$A \cap B = [1; 5], \quad A \cup B = [-2; 8[.$$

- b) Les nombres à la fois inférieurs ou égaux à 3 et strictement positifs forment $]0; 3]$. Les deux intervalles couvrent ensemble toute la droite :

$$A \cap B =]0; 3], \quad A \cup B = \mathbb{R}.$$

- c) Les intervalles sont disjoints :

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cup B = [-5; -1] \cup [2; 6].$$

La réunion ne peut pas être réduite à un seul intervalle, car il reste un trou entre -1 et 2 .

- d) L'intervalle ouvert est contenu dans l'intervalle fermé :

$$A \cap B =]-3; 4[, \quad A \cup B = [-3; 4].$$

Corrigé 7

 Démonstration / Complémentaires dans $\mathbb{R}$

- a) Les bornes -2 et 5 appartiennent à l'ensemble initial, donc elles sont exclues du complémentaire :

$$\mathbb{R} \setminus [-2; 5] =]-\infty; -2[\cup]5; +\infty[.$$

- b) 1 n'appartient pas à $]1; +\infty[$; il appartient donc au complémentaire :

$$\mathbb{R} \setminus]1; +\infty[=]-\infty; 1].$$

- c) 4 est exclu de $] -\infty; 4[$, donc il est inclus dans le complémentaire :

$$\mathbb{R} \setminus]-\infty; 4[= [4; +\infty[.$$

- d) Aucun réel ne se trouve en dehors de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset.$$

Corrigé 8

 Démonstration / Valeurs absolues et distances

a)

$$|-8| = 8, \quad |5| = 5, \quad |3 - 11| = |-8| = 8, \quad |-4 - 7| = |-11| = 11.$$

b)

$$d(-6, 2) = |-6 - 2| = 8,$$

$$d(-3,5; 1,2) = |-3,5 - 1,2| = |-4,7| = 4,7.$$

c) On part de 2 et on se déplace de 5 unités dans chaque sens :

$$2 - 5 = -3 \quad \text{et} \quad 2 + 5 = 7.$$

Les deux nombres cherchés sont $\boxed{-3 \text{ et } 7}$.

d) Le point à égale distance des extrémités est leur milieu :

$$\frac{-4 + 10}{2} = 3.$$

Le nombre cherché est $\boxed{3}$; il est à sept unités de -4 et de 10 .

Corrigé 9

 Démonstration / Distance et intervalle

a) Centre 3, rayon 2 :

$$|x - 3| \leq 2 \quad \text{si et seulement si} \quad \boxed{x \in [1; 5]}.$$

b) $|x + 4| = |x - (-4)|$. Centre -4 , rayon 1 :

$$\boxed{x \in [-5; -3]}.$$

c) Centre 0, rayon 7 : $\boxed{x \in [-7; 7]}.$ d) Pour $[-2; 6]$, le centre et le rayon valent

$$a = \frac{-2 + 6}{2} = 2, \quad r = \frac{6 - (-2)}{2} = 4.$$

Donc $\boxed{|x - 2| \leq 4}.$

e) Pour $[-5; 1]$, $a = -2$ et $r = 3$. Donc $\boxed{|x + 2| \leq 3}.$ f) Pour $[0; 10]$, $a = 5$ et $r = 5$. Donc $\boxed{|x - 5| \leq 5}.$

Corrigé 10

 *Démonstration / Centre, rayon et modélisation*

- a) La valeur visée est 25 mm et la tolérance est 0,3 mm :

$$|L - 25| \leq 0,3.$$

- b)

$$L \in [25 - 0,3; 25 + 0,3] = [24,7; 25,3].$$

- c) $24,69 < 24,7$: la pièce est refusée.
 $24,70 = 24,7$: la valeur limite est acceptée.
 $25,18 \in [24,7; 25,3]$: la pièce est acceptée.
 $25,31 > 25,3$: la pièce est refusée.

Corrigé 11

 *Démonstration / Encadrer une racine carrée*

La fonction carré est croissante pour les nombres positifs.

- a)

$$2,2^2 = 4,84 < 5 \quad \text{et} \quad 2,3^2 = 5,29 > 5.$$

Donc $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$.

- b)

$$2,23^2 = 4,9729 < 5 \quad \text{et} \quad 2,24^2 = 5,0176 > 5.$$

Donc $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$.

- c) La première amplitude vaut $2,3 - 2,2 = 0,1 = 10^{-1}$.
La seconde vaut $2,24 - 2,23 = 0,01 = 10^{-2}$: elle est dix fois plus précise.

Corrigé 12

 *Démonstration / Arrondis raisonnables*

- a) Au centième, on garde deux chiffres après la virgule. La troncature est $12,98$. Le chiffre suivant est 7, donc on augmente le centième : l'arrondi est $12,99$.

- b) Les trois premiers chiffres significatifs sont 4, 7 et 8. Le chiffre suivant est 6, donc on arrondit le 8 vers le haut :

$$0,004\,79.$$

- c) 12 347 m correspondent à $12,347$ km. Le dernier chiffre indique ici les millièmes de kilomètre, c'est-à-dire les mètres, ce qui correspond à la précision de la mesure.

- d) L'écriture 12,347000000 km laisserait croire que la mesure est connue jusqu'au millionième de mètre environ, alors qu'elle n'est connue qu'au mètre près. Les zéros ajoutés inventeraient une précision que l'on ne possède pas.

Corrigé 13

 *Démonstration / Comprendre le balayage*

a) Pour $n = 1$, on a puissance $= 10^1 = \boxed{10}$.

b) La boucle compare $(k + 1)^2$ à

$$2 \times 10^2 = 200.$$

Or $14^2 = 196 \leq 200$, tandis que $15^2 = 225 > 200$. La dernière valeur admise est donc $k = 14$.

c) Le programme renvoie

$$\left(\frac{14}{10}; \frac{15}{10}\right) = \boxed{(1,4; 1,5)}.$$

L'amplitude vaut $1,5 - 1,4 = \boxed{0,1}$.

d) Pour $n = 2$, on cherche deux centièmes consécutifs. Comme

$$1,41^2 = 1,9881 < 2 < 2,0164 = 1,42^2,$$

le programme renverra $\boxed{(1,41; 1,42)}$.

Corrigé 14

 *Démonstration / Le test des facteurs 2 et 5*

a) $\frac{13}{125}$ est irréductible et $125 = 5^3$. Il est donc décimal :

$$\frac{13}{125} = \frac{104}{1000} = \boxed{0,104}.$$

b) $\frac{7}{30}$ est irréductible et $30 = 2 \times 3 \times 5$ contient le facteur 3. Ce nombre n'est pas décimal.

c)

$$\frac{21}{84} = \frac{1}{4}.$$

Le dénominateur réduit est $4 = 2^2$: le nombre est décimal et vaut 0,25.

d)

$$\frac{18}{45} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Le dénominateur réduit est 5 : le nombre est décimal.

e) $\frac{11}{48}$ est irréductible et $48 = 2^4 \times 3$ contient un facteur 3. Ce nombre n'est pas décimal.

Corrigé 15

 *Démonstration / Prouver que $\sqrt{3}$ est irrationnel*

a) Pour un entier k :

$$(3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1,$$

$$(3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1.$$

Dans les deux cas, le carré est une unité après un multiple de 3 : il n'est pas multiple de 3.

b) Tout entier qui n'est pas multiple de 3 est de la forme $3k + 1$ ou $3k + 2$. La question précédente montre que son carré n'est alors pas multiple de 3. Par contraposée :

si n^2 est multiple de 3, alors n est multiple de 3.
--

c) Supposons $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, avec $\frac{p}{q}$ irréductible et $q \neq 0$. En élevant au carré :

$$p^2 = 3q^2.$$

Donc p^2 est multiple de 3, puis p est multiple de 3. Il existe un entier k tel que $p = 3k$. En remplaçant :

$$9k^2 = 3q^2, \quad q^2 = 3k^2.$$

Donc q^2 , puis q , sont multiples de 3.

d) p et q auraient 3 comme diviseur commun, contrairement à l'irréductibilité de la fraction. L'hypothèse est impossible. Ainsi,

$\sqrt{3}$ est irrationnel.

Corrigé du problème : Un irrationnel dans chaque intervalle

 *Démonstration / Partie A – Les rationnels sont stables par calcul*

1. Avec $r = \frac{a}{b}$ et $s = \frac{c}{d}$:

$$r + s = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

$ad + bc$ et bd sont entiers, et $bd \neq 0$. Donc $r + s$ est rationnel.

2.

$$rs = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

C'est encore un quotient de deux entiers avec un dénominateur non nul : rs est rationnel.

3. Si $r \neq 0$, alors $a \neq 0$ et

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a/b} = \frac{b}{a}.$$

C'est un quotient d'entiers de dénominateur non nul : $1/r$ est rationnel.

 Démonstration / Partie B – Déplacer et réduire un irrationnel

4. Supposons que $x+r$ soit rationnel. Comme r est rationnel et que la différence de deux rationnels est rationnelle,

$$x = (x + r) - r$$

serait rationnel. Cela contredit l'hypothèse. Donc $x + r$ est irrationnel.

5. Supposons que rx soit rationnel. Comme $r \neq 0$, $1/r$ est rationnel d'après la partie A. Le produit

$$x = \frac{1}{r}(rx)$$

serait alors rationnel. Contradiction. Donc rx est irrationnel.

6. Si $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$ était rationnel, son produit par le rationnel non nul 2 serait rationnel. Or

$$2u = \sqrt{2}$$

est irrationnel. Donc u est irrationnel.

De plus, $0 < \sqrt{2} < 2$: $\sqrt{2}$ est positif et $\sqrt{2} < 2$ car $2 < 4 = 2^2$. En divisant par $2 > 0$:

$$0 < u < 1.$$

 Démonstration / Partie C – Remplir un intervalle

7. Comme $a < b$, on a $b - a > 0$. En multipliant $0 < u < 1$ par le nombre positif $b - a$:

$$0 < (b - a)u < b - a.$$

En ajoutant a aux trois membres :

$$a < a + (b - a)u < b.$$

Ainsi $a < x < b$.

8. $b - a$ est un rationnel non nul. Comme u est irrationnel, $(b - a)u$ est irrationnel. En lui ajoutant le rationnel a , on obtient encore un irrationnel. Donc x est irrationnel.

9. Prenons $a = 1,414$ et $b = 1,415$. Alors $b - a = 0,001$ et la construction donne

$$x = 1,414 + 0,001 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,414 + \frac{\sqrt{2}}{2000}.$$

Ce nombre est irrationnel et strictement compris entre 1,414 et 1,415.

10. Comme a et b sont rationnels, leur somme puis son quotient par 2 sont rationnels : m est rationnel. Puisque $a < b$:

$$2a < a + b < 2b.$$

En divisant par $2 > 0$:

$$a < \frac{a + b}{2} < b.$$

- 11.** Pour n'importe quels rationnels $a < b$, la question 7 construit un irrationnel x dans $]a; b[$, et la question 10 construit un rationnel m dans ce même intervalle. Aucun intervalle ouvert à bornes rationnelles, aussi petit soit-il, ne peut donc contenir une seule de ces deux familles.
- 12.** Posons $v = u/2$. Comme $1/2$ est rationnel non nul et u irrationnel, v est irrationnel. De plus,

$$0 < v < u < 1.$$

On peut donc poser

$$y = a + (b - a)v.$$

Le même raisonnement montre que $a < y < b$ et que y est irrationnel. Enfin $v \neq u$, donc $y \neq x$. Nous avons construit deux irrationnels distincts dans $]a; b[$.

Fin de la Fiche 2 – Nombres réels et intervalles

Tu sais maintenant classer les nombres, lire les intervalles et transformer une distance en inégalité.

Tu as aussi prouvé que les irrationnels ne sont pas rares : ils se cachent dans chaque intervalle.

→ Prochaine fiche : Puissances, racines carrées et calcul littéral.