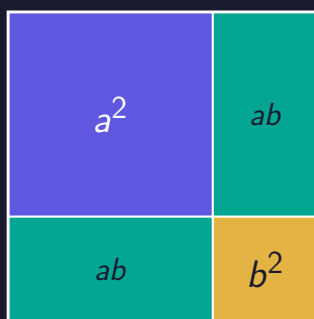


Puissances & racines

Calcul numérique et littéral

Exposants ■ Racines carrées ■ Expressions algébriques



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Seconde générale ■ Mathématiques ■ Programme officiel

 Cours complet

 15 exercices

 Problème défi

 Corrigés

Table des matières

1	?	Pourquoi étudier le calcul littéral ?	3
1.1		Le problème fondamental	3
1.2		Trois questions à se poser avant de calculer	3
2	🧠	L'idée avant la formule	3
2.1		Une puissance est une multiplication comprimée	3
2.2		Une racine carrée remonte d'un carré à son côté	4
2.3		Transformer sans changer	4
3	📖	Le cours complet	4
3.1		Puissances d'exposant entier	4
3.2		Règles de calcul sur les puissances	5
3.3		Puissances de 10, notation scientifique et ordre de grandeur	7
3.4		La racine carrée	7
3.5		Pourquoi $\sqrt{a^2} = a $?	8
3.6		Produit et quotient de racines carrées	8
3.7		Fractions et expressions fractionnaires	9
3.8		Expressions algébriques : vocabulaire et substitution	10
3.9		Distributivité, développement et factorisation	11
3.10		Les trois identités remarquables	11
3.11		Choisir la forme adaptée	12
3.12		Isoler une variable dans une formule	13
3.13		Algorithme : dépasser un seuil par des puissances	13
4	🧰	Boîte à outils : les réflexes	14
5	🔍	Pour aller plus loin	15
5.1		Développer $(a + b + c)^2$	15
5.2		Développer $(a + b)^3$	15
5.3		Le conjugué pour transformer une racine	15
5.4		Une identité inattendue : Sophie Germain	16
5.5		Mesurer l'écart entre deux racines	16
6	✎	Exercices	17
7	🔑	Problème : Approcher $\sqrt{2}$ sans calculatrice ★★ ★	20
8	✓	Corrigés détaillés	22

1 ? Pourquoi étudier le calcul littéral ?

1.1 Le problème fondamental

Calculer avec des nombres permet de répondre à une question particulière. Calculer avec des lettres permet de résoudre toute une famille de questions en une seule fois. Par exemple, le périmètre d'un carré de côté 7 vaut 4×7 , mais la formule

$$P = 4c$$

est valable pour *tous* les carrés.

Les puissances condensent des multiplications répétées, les racines carrées permettent de remonter d'une aire à une longueur, et les transformations algébriques rendent visibles des informations différentes dans une même expression.

Intuition | Une langue pour décrire des structures

Une lettre n'est pas un nombre flou. Elle désigne un nombre dont la valeur peut varier ou n'est pas encore connue. Une formule est une phrase précise : chaque symbole y a un sens, et chaque transformation doit conserver la même valeur.

1.2 Trois questions à se poser avant de calculer

Devant une expression, prends l'habitude de demander :

1. **Est-elle définie ?** Aucun dénominateur ne doit être nul ; sous une racine carrée réelle, le nombre doit être positif ou nul.
2. **Quelle forme est utile ?** La forme développée aide à comparer des coefficients ; la forme factorisée aide à repérer un produit ou une annulation.
3. **Le résultat est-il vraisemblable ?** Un ordre de grandeur et un signe permettent souvent de détecter une erreur immédiatement.

Attention | La calculatrice ne remplace pas le raisonnement

Une calculatrice donne souvent une valeur approchée. Elle ne prouve ni une identité valable pour tout x , ni l'égalité de deux expressions. Pour cela, il faut transformer exactement les expressions.

2 L'idée avant la formule

2.1 Une puissance est une multiplication comprimée

L'écriture a^5 signifie que le facteur a apparaît cinq fois :

$$a^5 = a \times a \times a \times a \times a.$$

Lorsque l'on multiplie a^3 par a^4 , on rassemble trois facteurs a puis quatre autres : il y en a donc sept. La règle $a^3 a^4 = a^7$ n'est pas une formule magique ; c'est un comptage de facteurs.

$$\boxed{a^3 = a \times a \times a} \times \boxed{a^4 = a \times a \times a \times a} = \boxed{a^7}$$

« Changer d'écriture, c'est souvent révéler la solution. »

2.2 Une racine carrée remonte d'un carré à son côté

Si un carré a une aire 49, son côté positif mesure 7, car $7^2 = 49$. On écrit $\sqrt{49} = 7$.

Le symbole $\sqrt{\quad}$ désigne toujours la racine **positive ou nulle**. Ainsi $\sqrt{49} = 7$, jamais -7 . En revanche, l'équation $x^2 = 49$ possède deux solutions : $x = 7$ et $x = -7$.

Intuition | Pourquoi $\sqrt{x^2}$ n'est-il pas toujours x ?

Si $x = -5$, alors $x^2 = 25$, puis $\sqrt{x^2} = \sqrt{25} = 5$. La racine carrée ne peut pas rendre le nombre négatif -5 . Elle rend sa distance à 0 :

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

2.3 Transformer sans changer

Les expressions

$$(x + 3)^2, \quad x^2 + 6x + 9$$

ont la même valeur pour tout réel x . Elles ne montrent pourtant pas la même chose : la première est manifestement un carré, la seconde affiche les coefficients.

Exemple | Une forme, une information

Pour $A(x) = (x - 4)^2 - 9$:

- la forme $(x - 4)^2 - 9$ facilite un calcul autour de $x = 4$;
- la forme développée $x^2 - 8x + 7$ montre les trois termes ;
- la forme factorisée $(x - 7)(x - 1)$ montre que $A(7) = A(1) = 0$.

Changer de forme ne change pas l'expression ; cela change ce que l'on voit.

3 Le cours complet

3.1 Puissances d'exposant entier

Définition | Exposant positif, nul ou négatif

Soit a un réel et n un entier naturel non nul.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}.$$

Si $a \neq 0$, on définit aussi

$$a^0 = 1 \quad \text{et} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Dans a^n , a est la **base** et n est l'**exposant**.

💡 Exemple

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81, \quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}, \quad 10^{-4} = 0,0001.$$

⚠ Attention | Parenthèses et signe

$$(-3)^2 = 9 \quad \text{mais} \quad -3^2 = -(3^2) = -9.$$

La puissance est calculée avant le signe $-$ placé devant. De plus, 0^0 n'est pas défini dans ce cours et 0^{-n} n'a aucun sens, car il conduirait à diviser par 0.

✅ Propriété | Signe d'une puissance

Pour $n \in \mathbb{N}$ non nul :

- si $a > 0$, alors $a^n > 0$;
- si $a < 0$ et n est pair, alors $a^n > 0$;
- si $a < 0$ et n est impair, alors $a^n < 0$.

🖋 Démonstration | Comprendre la parité de l'exposant

Les facteurs négatifs se regroupent par paires. Chaque paire produit un nombre positif. Avec un nombre pair de facteurs, il ne reste aucun signe $-$; avec un nombre impair, il en reste exactement un.

3.2 Règles de calcul sur les puissances

★ Théorème | Même base

Pour tous entiers m et n , lorsque les expressions sont définies :

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}, \quad \boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)}, \quad \boxed{(a^m)^n = a^{mn}}.$$

🖋 Démonstration | Produit et quotient, d'abord avec des exposants positifs

Pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, le produit $a^m a^n$ contient $m + n$ facteurs a , donc vaut a^{m+n} .

Si $m \geq n$ et $a \neq 0$, on simplifie n facteurs au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m-n} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n} = a^{m-n}.$$

Lorsque $m < n$, il reste $n - m$ facteurs au dénominateur :

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}.$$

C'est précisément pour conserver cette règle que l'on a défini les exposants négatifs.

 Démonstration | Puissance d'une puissance

Dans $(a^m)^n$, le bloc a^m est répété n fois. Chaque bloc contient m facteurs a ; il y a donc mn facteurs :

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

La même identité reste vraie pour les exposants entiers relatifs dès que $a \neq 0$.

★ **Théorème | Même exposant**

Pour tout entier n , lorsque les expressions sont définies :

$$a^n b^n = (ab)^n, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (b \neq 0).$$

 Démonstration

Pour $n > 0$,

$$a^n b^n = (a \cdots a)(b \cdots b) = (ab) \cdots (ab) = (ab)^n.$$

Le raisonnement est identique pour un quotient. Les cas $n = 0$ et $n < 0$ suivent des définitions de a^0 et a^{-n} .

⚠ **Attention | On ne distribue pas une puissance sur une somme**

En général,

$$(a + b)^n \neq a^n + b^n.$$

Par exemple, $(2 + 3)^2 = 25$ tandis que $2^2 + 3^2 = 13$.

✂ **Méthode | Simplifier un produit de puissances**

1. Regroupe les puissances de même base.
2. Additionne les exposants dans un produit, soustrais-les dans un quotient.
3. Transforme une puissance de puissance en multipliant les exposants.
4. Termine avec des exposants positifs si l'énoncé le demande.

Par exemple,

$$\frac{(x^3)^2 x^{-1}}{x^4} = x^{6-1-4} = x \quad (x \neq 0).$$

3.3 Puissances de 10, notation scientifique et ordre de grandeur

Définition | Notation scientifique

Tout nombre décimal non nul peut s'écrire sous la forme

$$a \times 10^n,$$

où $n \in \mathbb{Z}$ et $1 \leq |a| < 10$. Cette écriture est la **notation scientifique** du nombre.

Exemple

$$73\,500 = 7,35 \times 10^4, \quad 0,000,082 = 8,2 \times 10^{-5}, \quad -910 = -9,1 \times 10^2.$$

Méthode | Multiplier en notation scientifique

On regroupe les coefficients puis les puissances de 10 :

$$(3 \times 10^5)(4 \times 10^{-2}) = 12 \times 10^3 = 1,2 \times 10^4.$$

La dernière égalité remet le coefficient entre 1 et 10.

Définition | Ordre de grandeur

Un ordre de grandeur est une puissance de 10 proche du nombre. Il permet d'estimer rapidement un résultat et d'en tester la cohérence.

Exemple | Contrôle de vraisemblance

$19,8 \times 0,51$ est proche de $20 \times 0,5 = 10$. Un affichage de calculatrice égal à 100,98 serait donc manifestement faux.

3.4 La racine carrée

Définition

Pour tout réel $a \geq 0$, la racine carrée de a , notée $\sqrt{a}$, est l'unique nombre réel positif ou nul dont le carré vaut a :

$$\sqrt{a} \geq 0 \quad \text{et} \quad (\sqrt{a})^2 = a.$$

Exemple

$$\sqrt{0} = 0, \quad \sqrt{1} = 1, \quad \sqrt{36} = 6, \quad \sqrt{2,25} = 1,5.$$

Le nombre $\sqrt{7}$ est exact. La calculatrice en donne seulement une approximation : $\sqrt{7} \approx 2,646$.

⚠ Attention | Deux confusions à éviter

Dans l'ensemble des réels, $\sqrt{-4}$ n'est pas défini. De plus,

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

en général : $\sqrt{9+16} = 5$ tandis que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$.

3.5 Pourquoi $\sqrt{a^2} = |a|$?

★ Théorème

Pour tout réel a ,

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Démonstration / Démonstration complète

On distingue deux cas.

- Si $a \geq 0$, alors $|a| = a$. Le nombre a est positif et son carré vaut a^2 , donc $\sqrt{a^2} = a = |a|$.
- Si $a < 0$, alors $|a| = -a > 0$. De plus $(-a)^2 = a^2$, donc le nombre positif dont le carré vaut a^2 est $-a$: $\sqrt{a^2} = -a = |a|$.

Dans les deux cas, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Exemple

$$\sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8, \quad \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|.$$

On ne peut retirer la valeur absolue de $|x-3|$ que si l'on connaît le signe de $x-3$.

3.6 Produit et quotient de racines carrées

★ Théorème | Produit – démonstration exigible

Pour tous réels $a \geq 0$ et $b \geq 0$,

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}.$$

Démonstration / Démonstration

Comme $\sqrt{a} \geq 0$ et $\sqrt{b} \geq 0$, leur produit $\sqrt{a} \sqrt{b}$ est positif ou nul. Calculons son carré :

$$(\sqrt{a} \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 (\sqrt{b})^2 = ab.$$

Le nombre $\sqrt{a} \sqrt{b}$ est donc le nombre positif ou nul dont le carré vaut ab . Par définition de la racine carrée, il est égal à $\sqrt{ab}$.

★ Théorème | Quotient

Pour $a \geq 0$ et $b > 0$,

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Démonstration

Le quotient $\sqrt{a}/\sqrt{b}$ est positif ou nul et

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$

Il est donc la racine carrée de a/b .

✂ Méthode | Simplifier une racine

Cherche le plus grand facteur carré parfait :

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36}\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

De même,

$$\sqrt{300} = 10\sqrt{3}, \quad \sqrt{\frac{49}{20}} = \frac{7}{2\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{10}.$$

La dernière forme s'obtient en multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{5}$.

3.7 Fractions et expressions fractionnaires

Définition | Valeurs interdites

Une expression fractionnaire n'est définie que lorsque son dénominateur est non nul. Par exemple,

$$\frac{2x+1}{x-4}$$

est définie pour tous les réels x sauf $x = 4$.

✓ Propriété | Règles sur les fractions

Pour $b \neq 0$, $d \neq 0$ et, dans le quotient, $c \neq 0$:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

 Démonstration | Pourquoi diviser revient-il à multiplier par l'inverse ?

Le nombre d/c est l'inverse de c/d , car

$$\frac{c}{d} \times \frac{d}{c} = 1.$$

Ainsi, multiplier a/b par d/c produit exactement le nombre qui, multiplié par c/d , redonne a/b . C'est donc le quotient de a/b par c/d .

 Attention | On ne simplifie que des facteurs

$$\frac{3x}{3x+6} \neq \frac{x}{x+6}.$$

Il faut d'abord factoriser le dénominateur :

$$\frac{3x}{3x+6} = \frac{3x}{3(x+2)} = \frac{x}{x+2} \quad (x \neq -2).$$

Le facteur 3 entier est simplifié ; aucun terme d'une somme n'a été supprimé.

3.8 Expressions algébriques : vocabulaire et substitution

 Définition

Une **expression algébrique** est une expression comportant des nombres, des lettres et des opérations.

- Un **terme** est une partie séparée des autres par $+$ ou $-$.
- Un **facteur** est une partie d'un produit.
- **Réduire**, c'est regrouper les termes semblables.
- **Développer**, c'est transformer un produit en somme.
- **Factoriser**, c'est transformer une somme en produit.

 Méthode | Remplacer une lettre par un nombre

Place la valeur entre parenthèses avant de calculer. Pour $A(x) = 2x^2 - 3x + 1$ et $x = -2$:

$$A(-2) = 2 \times (-2)^2 - 3 \times (-2) + 1 = 8 + 6 + 1 = 15.$$

Sans parenthèses, le signe de la puissance est facilement perdu.

 Propriété | Réduire

On peut additionner seulement les termes qui possèdent exactement la même partie littérale :

$$3x^2 - 5x + 7 + 2x^2 + x - 4 = 5x^2 - 4x + 3.$$

On ne peut pas regrouper x^2 et x .

3.9 Distributivité, développement et factorisation

★ Théorème | Distributivité

Pour tous réels a, b, c ,

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{et} \quad a(b - c) = ab - ac.$$

Dans l'autre sens,

$$ab + ac = a(b + c).$$

Démonstration | Interprétation par une aire

Un rectangle de hauteur a et de largeur totale $b + c$ a pour aire $a(b + c)$. En le coupant en deux rectangles de largeurs b et c , la somme des aires vaut $ab + ac$. Les deux calculs mesurent la même aire, donc $a(b + c) = ab + ac$.

Méthode | Développer un produit de deux sommes

Chaque terme de la première parenthèse multiplie chaque terme de la seconde :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Par exemple,

$$(2x - 3)(x + 5) = 2x^2 + 10x - 3x - 15 = 2x^2 + 7x - 15.$$

Méthode | Factoriser par un facteur commun

Repère le facteur présent dans chaque terme et place-le devant une parenthèse :

$$12x^2 - 18x = 6x(2x - 3).$$

Vérifie en redéveloppant mentalement : $6x \times 2x = 12x^2$ et $6x \times (-3) = -18x$.

3.10 Les trois identités remarquables

★ Théorème

Pour tous réels a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Ces égalités fonctionnent dans les deux sens : développement ou factorisation.

 *Démonstration | Démonstration algébrique*

Par double distributivité,

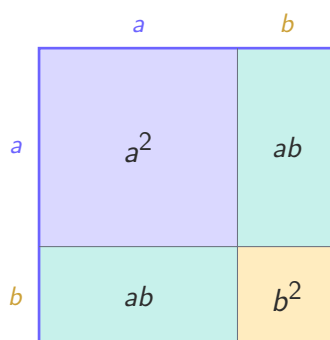
$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

De même,

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

et

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2.$$



 **Attention | Le terme du milieu ne disparaît pas**

$$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2.$$

Le carré contient deux rectangles d'aire ab , d'où le terme $2ab$.

3.11 Choisir la forme adaptée

Forme	Exemple	Ce qu'elle montre rapidement
Développée réduite	$x^2 - 6x + 5$	les coefficients et le calcul terme à terme
Factorisée	$(x - 1)(x - 5)$	les facteurs et les valeurs qui annulent le produit
Carré complété	$(x - 3)^2 - 4$	la comparaison avec un carré et le calcul autour de 3

 **Exemple | Trois formes d'une même expression**

$$(x - 3)^2 - 4 = x^2 - 6x + 9 - 4 = x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5).$$

La forme doit être choisie en fonction de la question, pas par habitude.

3.12 Isoler une variable dans une formule

✂ Méthode | Principe

Pour exprimer une variable, effectue la même opération sur les deux membres et défais les opérations dans l'ordre inverse.

- $U = RI$ donne $I = U/R$ si $R \neq 0$.
- $d = vt$ donne $t = d/v$ si $v \neq 0$.
- $V = \pi r^2 h$ donne $h = V/(\pi r^2)$ si $r \neq 0$.

💡 Exemple | Une relation du premier degré

Dans $3x + 2y = 7$, isolons y :

$$2y = 7 - 3x \quad \text{puis} \quad y = \frac{7 - 3x}{2}.$$

Chaque ligne est obtenue en appliquant la même opération aux deux membres.

✂ Méthode | Application numérique d'une formule

1. Ecris d'abord la formule avec les lettres.
2. Remplace chaque lettre par sa valeur, entre parenthèses si elle est négative.
3. Respecte les priorités de calcul et conserve les unités.
4. Arrondis seulement à la fin et contrôle l'ordre de grandeur.

Pour un cylindre de rayon $r = 3,2$ cm et de hauteur $h = 10$ cm :

$$V = \pi r^2 h = \pi \times 3,2^2 \times 10 = 102,4\pi \text{ cm}^3 \approx 322 \text{ cm}^3.$$

3.13 Algorithme : dépasser un seuil par des puissances

Le programme officiel demande de savoir déterminer la première puissance d'un nombre positif qui dépasse un seuil.

```

1 def premiere_puissance(base, seuil):
2     n = 0
3     puissance = 1
4     while puissance <= seuil:
5         n = n + 1
6         puissance = puissance * base
7     return n, puissance

```

Pour `premiere_puissance(2, 1000)`, le programme renvoie (10, 1024) : 2^{10} est la première puissance

de 2 strictement supérieure à 1000.

 *Démonstration / Pourquoi l'algorithme fonctionne-t-il ?*

Au début de chaque passage dans la boucle, la variable puissance vaut base^n . Chaque passage augmente n de 1 et multiplie la puissance par la base : l'égalité reste vraie. La boucle s'arrête à la première valeur pour laquelle la puissance dépasse le seuil.

4 Boîte à outils : les réflexes

Méthode | Puissances

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \\ (a^m)^n = a^{mn}.$$

Ne jamais additionner les exposants dans une somme.

Méthode | Racines

$$\sqrt{a^2} = |a|, \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Les conditions $a, b \geq 0$ et $b > 0$ comptent.

Méthode | Développer

Distribue chaque facteur, puis réduis :

$$(2x - 1)(x + 4) = 2x^2 + 7x - 4.$$

Méthode | Factoriser

Cherche d'abord un facteur commun, puis une identité remarquable :

$$9x^2 - 25 = (3x - 5)(3x + 5).$$

Attention | Contrôle final en cinq secondes

Vérifie les valeurs interdites, les signes, les parenthèses, l'ordre de grandeur et les unités. Pour une identité, tu peux aussi tester une valeur simple : ce test ne prouve pas l'identité, mais il détecte souvent une erreur.

5 Pour aller plus loin

Intuition | Un approfondissement ouvert à tous

Cette partie dépasse le socle strictement exigible, mais n'utilise aucun prérequis caché. Chaque étape repose seulement sur la distributivité et les identités déjà démontrées.

5.1 Développer $(a + b + c)^2$

On considère $a + b + c$ comme la somme de deux blocs : $(a + b) + c$. Alors

$$(a + b + c)^2 = ((a + b) + c)^2 = (a + b)^2 + 2c(a + b) + c^2.$$

En développant :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Démonstration | Lecture de la formule

Les trois carrés a^2 , b^2 , c^2 apparaissent une fois. Chaque produit de deux lettres distinctes apparaît deux fois : ab et ba , ac et ca , bc et cb .

Exemple

$$(x + 2y - 3)^2 = x^2 + 4y^2 + 9 + 4xy - 6x - 12y.$$

Le signe $-$ de -3 est conservé dans chacun de ses produits.

5.2 Développer $(a + b)^3$

On part de $(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b)$:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) \\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

Exemple | Calcul mental puissant

$$101^3 = (100 + 1)^3 = 1\,000\,000 + 30\,000 + 300 + 1 = 1\,030\,301.$$

5.3 Le conjugué pour transformer une racine

Les expressions $a + b$ et $a - b$ sont dites conjuguées, car leur produit supprime les termes croisés :

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \frac{\sqrt{5}-2}{5-4} = \boxed{\sqrt{5}-2}.$$

Cette technique servira dans le problème final pour mesurer exactement une erreur d'approximation.

5.4 Une identité inattendue : Sophie Germain

L'identité suivante semble difficile à deviner, mais sa preuve n'utilise que la différence de deux carrés :

$$\boxed{a^4 + 4b^4 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2)}.$$



Démonstration / Faire apparaître une différence de carrés

On ajoute et on retranche $4a^2b^2$:

$$\begin{aligned} a^4 + 4b^4 &= a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 \\ &= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 \\ &= (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab). \end{aligned}$$

On retrouve exactement les deux facteurs annoncés.

Exemple. Avec $a = 3$ et $b = 1$:

$$3^4 + 4 = 85 = (9 - 6 + 2)(9 + 6 + 2) = 5 \times 17.$$

L'identité a transformé une somme de puissances en un produit.

5.5 Mesurer l'écart entre deux racines

Pour $a > 0$ et $h > 0$, on multiplie par le conjugué :

$$\begin{aligned} \sqrt{a+h} - \sqrt{a} &= \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \\ &= \boxed{\frac{h}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}}. \end{aligned}$$



Exemple | Encadrer $\sqrt{101}$ sans calculatrice

Comme $10^2 < 101$, on a $\sqrt{101} > 10$. De plus,

$$\sqrt{101} - 10 = \frac{1}{\sqrt{101} + 10} < \frac{1}{20} = 0,05.$$

Donc

$$\boxed{10 < \sqrt{101} < 10,05}.$$

Le conjugué transforme une différence de racines difficile à mesurer en un quotient simple.

6 Exercices

Exercice 1 : Comprendre les exposants

Calcule sans calculatrice et justifie brièvement :

$$A = (-2)^5, \quad B = -2^4, \quad C = 5^0, \quad D = 10^{-3}, \quad E = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}.$$

Parmi 0^5 , 0^0 et 0^{-2} , indique les expressions définies dans ce cours.

Exercice 2 : Les règles de puissances

Simplifie puis calcule lorsque c'est possible :

$$A = \frac{2^7 \times 2^{-3}}{2^2}, \quad B = \frac{(3^{-2})^{-3}}{3^4}, \quad C = \frac{5^3 \times 2^3}{10^2}.$$

Pour $x \neq 0$, simplifie

$$D = \frac{(x^4)^3 x^{-5}}{x^2}$$

sous la forme d'une puissance d'exposant positif.

Exercice 3 : Notation scientifique

1. Donne l'écriture scientifique de 0,000456, 78 900 et $-0,00903$.
2. Calcule et donne le résultat en notation scientifique :

$$\frac{(6 \times 10^{-4})(3 \times 10^7)}{9 \times 10^2}.$$

3. Sans effectuer le calcul exact, donne un ordre de grandeur de $(3,98 \times 10^6)(2,1 \times 10^{-3})$.

Exercice 4 : Premiers calculs avec des racines

1. Calcule $\sqrt{144}$, $\sqrt{0,81}$, $\sqrt{(-7)^2}$ et $(\sqrt{13})^2$.
2. Calcule $\sqrt{x^2}$ pour $x = -4$, puis pour $x = 6$.
3. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifie par un calcul ou un contre-exemple.

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16}, \quad \sqrt{9 \times 16} = \sqrt{9} \times \sqrt{16}.$$

Exercice 5 : Simplifier des racines

Ecris sous la forme $a\sqrt{b}$, avec b le plus petit possible :

$$\sqrt{48}, \quad \sqrt{180}, \quad 3\sqrt{20} - 2\sqrt{45} + \sqrt{5}.$$

Simplifie aussi exactement

$$\sqrt{\frac{75}{12}}.$$

Exercice 6 ★★☆☆ : Fractions sans calculatrice

1. Calcule et donne une fraction irréductible :

$$A = \frac{2}{3} - \frac{5}{8}, \quad B = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{14}{15}}.$$

2. Donne la valeur interdite puis simplifie, pour toutes les valeurs autorisées :

$$C(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

3. Explique pourquoi la formule simplifiée ne permet toujours pas de donner une valeur à $C(3)$.

Exercice 7 ★★☆☆ : Substituer sans perdre les signes

On pose

$$A(x) = 3x^2 - 2x - 5, \quad B(x) = \frac{x+1}{x^2-4}.$$

1. Calcule $A(-2)$ et $A(1/3)$.
2. Détermine les valeurs interdites de B .
3. Calcule $B(3)$ et explique pourquoi $B(-2)$ ne peut pas être calculé.

Exercice 8 ★★☆☆ : Réduire proprement

Réduis les expressions suivantes :

$$E = 5x^2 - 3x + 7 - (2x^2 + 4x - 1),$$

$$F = 2a - 3b + 5 - 4a + b - 7, \quad G = 3x(x - 2) - x(2x + 1).$$

Exercice 9 ★★☆☆ : Développer

Développe et réduis :

$$A = 3(2x - 5) - 4(x + 1),$$

$$B = (2x - 3)(x + 5), \quad C = (3x - 1)^2.$$

Exercice 10 ★★☆☆ : Factoriser

Factorise le plus possible :

$$A = 7x^2 - 21x, \quad B = 4x^2 - 25, \quad C = x^2 + 10x + 25,$$

$$D = 3x(x - 2) + 5(x - 2).$$

Exercice 11 ★★☆☆ : Choisir la bonne forme

On pose

$$P(x) = (x + 2)^2 - (x - 2)^2.$$

1. Développe et réduis $P(x)$.

2. Retrouve le même résultat en utilisant une différence de deux carrés.
3. Calcule mentalement $P(125)$.

On pose aussi $Q(x) = (3x - 1)^2 - 16$. Donne une forme développée et une forme factorisée de $Q(x)$.

Exercice 12 ★★☆☆ : Formules et grandeurs

1. L'aire d'un disque est $S = \pi r^2$. Exprime r en fonction de S , en rappelant que $r \geq 0$.
2. La relation $E = \frac{1}{2}mv^2$ donne une énergie E pour une masse $m > 0$ et une vitesse $v \geq 0$. Exprime v en fonction de E et m .
3. Calcule la vitesse si $E = 900$ J et $m = 2$ kg. Contrôle en remplaçant dans la formule initiale.

Exercice 13 ★★★ : Deux identités utiles

Démontre, pour tous réels x et y :

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2),$$

$$(x - y)^2 + 4xy = (x + y)^2.$$

Utilise ensuite une identité remarquable pour calculer mentalement 999^2 .

Exercice 14 ★★★ : Comprendre un algorithme de puissances

On exécute l'algorithme du cours avec $\text{base} = 1.5$ et $\text{seuil} = 5$.

1. Complète un tableau donnant, après chaque passage, n et puissance.
2. Quelle valeur est renvoyée ? Traduis-la par deux inégalités portant sur des puissances de 1,5.
3. Que se passe-t-il si $0 < \text{base} \leq 1$ et que le seuil est supérieur à 1 ? Explique le danger.

Exercice 15 ★★★ : Reconnaître un carré caché

1. Développe $(\sqrt{5} + 2)^2$, puis simplifie $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$.
2. Développe $(2 - \sqrt{3})^2$. Justifie que $2 - \sqrt{3} > 0$, puis simplifie $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.
3. Sans calculatrice, simplifie

$$\frac{1}{\sqrt{5} - 2}.$$

7 Problème : *Approcher $\sqrt{2}$ sans calculatrice* ★★ ★

Intuition | Le défi

On cherche à construire des fractions très proches de $\sqrt{2}$ en n'utilisant que les quatre opérations. Toutes les questions sont guidées, mais la fin demande de relier puissances, fractions, identités remarquables et comparaison.

Pour tout réel $x > 0$, on définit

$$T(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right).$$

Partie A – La machine à fractions

1. Montre que

$$T(x) = \frac{x^2 + 2}{2x}.$$

2. Calcule $T(2)$, puis $T(3/2)$ et $T(17/12)$. Donne chaque résultat sous forme irréductible.
3. Montre que si x est un rationnel strictement positif, alors $T(x)$ est encore un rationnel strictement positif.

Partie B – Pourquoi la machine se rapproche-t-elle de $\sqrt{2}$?

4. Développe et réduis $T(x)^2 - 2$ pour prouver l'identité

$$T(x)^2 - 2 = \frac{(x^2 - 2)^2}{4x^2}.$$

5. En utilisant $2 = (\sqrt{2})^2$, prouve aussi

$$T(x) - \sqrt{2} = \frac{(x - \sqrt{2})^2}{2x}.$$

6. Dédus-en que $T(x) \geq \sqrt{2}$ pour tout $x > 0$, avec égalité uniquement lorsque $x = \sqrt{2}$.

Partie C – Une précision spectaculaire

On admet les fractions calculées dans la partie A :

$$\frac{3}{2}, \quad \frac{17}{12}, \quad \frac{577}{408}.$$

7. Vérifie les deux égalités

$$17^2 - 2 \times 12^2 = 1, \quad 577^2 - 2 \times 408^2 = 1.$$

8. Dédus de la seconde que

$$\left(\frac{577}{408} \right)^2 - 2 = \frac{1}{166\,464}.$$

9. Pose $r = 577/408$. En factorisant $r^2 - 2$, montre que

$$0 < r - \sqrt{2} < \frac{1}{332\,928}.$$

10. Calcule exactement $T(577/408)$ et montre que

$$T\left(\frac{577}{408}\right) = \frac{665\,857}{470\,832}.$$

Partie D – Le secret algébrique

Soient p et q deux entiers strictement positifs. On pose

$$p' = p^2 + 2q^2, \quad q' = 2pq.$$

11. Montre que $T(p/q) = p'/q'$.
 12. Développe pour prouver l'identité

$$p'^2 - 2q'^2 = (p^2 - 2q^2)^2.$$

13. Explique pourquoi une fraction p/q vérifiant $p^2 - 2q^2 = 1$ en produit une nouvelle qui vérifie encore cette relation.
 14. En posant $R = 665\,857/470\,832$, montre que

$$0 < R - \sqrt{2} < \frac{1}{2 \times 470\,832^2}.$$

Un logiciel affiche $R \approx 1,41421356237469$. Donne alors $\sqrt{2}$ arrondi à dix chiffres après la virgule.

Partie E – Traduire la méthode en Python

15. Complète la fonction suivante pour qu'elle applique n fois la transformation T à une valeur initiale x .

```
1 def heron_racine_deux(x, n):
2     for k in range(n):
3         x = ...
4     return x
```

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Comprendre chaque signe*

$$A = (-2)^5 = -32$$

car l'exposant est impair. En revanche, dans $B = -2^4$, la puissance est prioritaire :

$$B = -(2^4) = -16.$$

Puis

$$C = 5^0 = 1, \quad D = 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001,$$

et

$$E = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{(1/2)^2} = 4.$$

$0^5 = 0$ est défini. Dans ce cours, 0^0 n'est pas défini. Enfin 0^{-2} conduirait à $1/0^2$, donc à une division par zéro : il n'est pas défini.

Corrigé 2

 *Démonstration / Une base à la fois*

$$A = 2^{7-3-2} = 2^2 = \boxed{4},$$

$$B = \frac{3^{(-2)(-3)}}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2 = \boxed{9},$$

$$C = \frac{(5 \times 2)^3}{10^2} = \frac{10^3}{10^2} = 10 = \boxed{10}.$$

Pour $x \neq 0$,

$$D = x^{4 \times 3 - 5 - 2} = x^{12-7} = \boxed{x^5}.$$

Les conditions $x \neq 0$ restent indispensables, car l'expression de départ contient x^{-5} et une division par x^2 .

Corrigé 3

 *Démonstration / Déplacer la virgule, puis contrôler*

$$0,000456 = \boxed{4,56 \times 10^{-4}},$$

$$78\,900 = \boxed{7,89 \times 10^4}, \quad -0,00903 = \boxed{-9,03 \times 10^{-3}}.$$

Pour le quotient,

$$\frac{(6 \times 10^{-4})(3 \times 10^7)}{9 \times 10^2} = \frac{18}{9} \times 10^{-4+7-2} \\ = 2 \times 10^1 = \boxed{2 \times 10^1}.$$

Enfin $3,98 \times 10^6$ est proche de 4×10^6 et $2,1 \times 10^{-3}$ de 2×10^{-3} . Le produit est donc proche de 8×10^3 .

L'ordre de grandeur est quelques milliers.

Corrigé 4

 *Démonstration / La racine est toujours positive ou nulle*

$$\sqrt{144} = 12, \quad \sqrt{0,81} = 0,9, \quad \sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7, \quad (\sqrt{13})^2 = 13.$$

Pour $x = -4$, $\sqrt{x^2} = |x| = 4$. Pour $x = 6$, $\sqrt{x^2} = 6$.

La première affirmation est fausse :

$$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{mais} \quad \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7.$$

La seconde est vraie et illustre la propriété du produit :

$$\sqrt{9 \times 16} = \sqrt{144} = 12 = 3 \times 4 = \sqrt{9} \times \sqrt{16}.$$

Corrigé 5

 *Démonstration / Extraire les carrés parfaits*

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \boxed{4\sqrt{3}},$$

$$\sqrt{180} = \sqrt{36 \times 5} = \boxed{6\sqrt{5}}.$$

Ensuite,

$$3\sqrt{20} - 2\sqrt{45} + \sqrt{5} = 3(2\sqrt{5}) - 2(3\sqrt{5}) + \sqrt{5} = \boxed{\sqrt{5}}.$$

Enfin,

$$\sqrt{\frac{75}{12}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \boxed{\frac{5}{2}}.$$

La fraction sous la racine a d'abord été simplifiée par 3.

Corrigé 6

 Démonstration / Fractions et valeur interdite

Pour la différence, le dénominateur commun est 24 :

$$A = \frac{16}{24} - \frac{15}{24} = \boxed{\frac{1}{24}}.$$

Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse :

$$B = \frac{7}{9} \times \frac{15}{14} = \frac{1 \times 5}{3 \times 2} = \boxed{\frac{5}{6}}.$$

L'expression $C(x)$ n'est pas définie lorsque $x - 3 = 0$, donc $x = 3$ est interdit. Pour $x \neq 3$:

$$C(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \boxed{x+3}.$$

La simplification est une égalité valable seulement sur l'ensemble où l'expression de départ est définie. Elle ne crée pas une valeur en $x = 3$: $C(3)$ reste impossible à calculer.

Corrigé 7

 Démonstration / Les parenthèses protègent les valeurs

$$A(-2) = 3(-2)^2 - 2(-2) - 5 = 12 + 4 - 5 = \boxed{11},$$

$$A\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \times \frac{1}{9} - \frac{2}{3} - 5 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - 5 = \boxed{-\frac{16}{3}}.$$

Pour B , on factorise le dénominateur :

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Les valeurs interdites sont donc $\boxed{-2 \text{ et } 2}$. Puis

$$B(3) = \frac{3+1}{3^2-4} = \frac{4}{5}.$$

$B(-2)$ n'existe pas, car son dénominateur serait nul.

Corrigé 8

 Démonstration / Distribuer le signe –

$$\begin{aligned} E &= 5x^2 - 3x + 7 - 2x^2 - 4x + 1 \\ &= \boxed{3x^2 - 7x + 8}. \end{aligned}$$

De même,

$$F = (2a - 4a) + (-3b + b) + (5 - 7) = \boxed{-2a - 2b - 2}.$$

Enfin on développe avant de réduire :

$$G = 3x^2 - 6x - 2x^2 - x = \boxed{x^2 - 7x}.$$

Corrigé 9

 *Démonstration* / Chaque terme doit être distribué

$$A = 6x - 15 - 4x - 4 = \boxed{2x - 19},$$

$$B = 2x^2 + 10x - 3x - 15 = \boxed{2x^2 + 7x - 15},$$

$$C = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2 = \boxed{9x^2 - 6x + 1}.$$

Dans C , le terme du milieu est $-6x$: il ne faut pas l'oublier.

Corrigé 10

 *Démonstration* / Facteur commun ou identité remarquable

$$A = 7x(x - 3).$$

B est une différence de carrés :

$$B = (2x)^2 - 5^2 = \boxed{(2x - 5)(2x + 5)}.$$

C est le développement de $(x + 5)^2$:

$$C = \boxed{(x + 5)^2}.$$

Enfin le facteur commun de D est $x - 2$:

$$D = (x - 2)(3x + 5).$$

Corrigé 11

 *Démonstration* / Deux chemins, même résultat

Par développement,

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 + 4x + 4) - (x^2 - 4x + 4) \\ &= \boxed{8x}. \end{aligned}$$

Par différence de carrés,

$$P(x) = ((x+2) - (x-2))((x+2) + (x-2)) = 4 \times 2x = 8x.$$

La forme réduite donne immédiatement

$$P(125) = 8 \times 125 = \boxed{1000}.$$

Pour Q :

$$Q(x) = 9x^2 - 6x + 1 - 16 = \boxed{9x^2 - 6x - 15}.$$

Comme $16 = 4^2$,

$$\begin{aligned} Q(x) &= (3x - 1 - 4)(3x - 1 + 4) \\ &= \boxed{(3x - 5)(3x + 3)}. \end{aligned}$$

Corrigé 12

 *Démonstration / Isoler puis choisir la racine positive*

De $S = \pi r^2$, on tire

$$r^2 = \frac{S}{\pi}.$$

Comme un rayon est positif ou nul,

$$\boxed{r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}}.$$

De $E = \frac{1}{2}mv^2$, on obtient

$$2E = mv^2, \quad v^2 = \frac{2E}{m}.$$

La vitesse demandée est positive ou nulle :

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2E}{m}}}.$$

Avec $E = 900$ et $m = 2$:

$$v = \sqrt{\frac{1800}{2}} = \sqrt{900} = \boxed{30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}.$$

Contrôle : $\frac{1}{2} \times 2 \times 30^2 = 900 \text{ J}.$

Corrigé 13

 *Démonstration / Développer les deux membres*

$$\begin{aligned}(x + y)^2 + (x - y)^2 &= (x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 2xy + y^2) \\ &= 2x^2 + 2y^2 = \boxed{2(x^2 + y^2)}.\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}(x - y)^2 + 4xy &= x^2 - 2xy + y^2 + 4xy \\ &= x^2 + 2xy + y^2 = \boxed{(x + y)^2}.\end{aligned}$$

Pour le calcul mental,

$$999^2 = (1000 - 1)^2 = 1\,000\,000 - 2000 + 1 = \boxed{998\,001}.$$

Corrigé 14

 *Démonstration / Suivre les variables*

Au départ, $(n, \text{puissance}) = (0, 1)$. Après chaque passage :

nombre de passages	0	1	2	3	4
n	0	1	2	3	4
puissance	1	1,5	2,25	3,375	5,0625

La boucle s'arrête donc avec

$$\boxed{(n, \text{puissance}) = (4, 5,0625)}.$$

Cela traduit

$$1,5^3 \leq 5 < 1,5^4.$$

Si $0 < \text{base} \leq 1$, les puissances ne deviennent jamais supérieures à un seuil > 1 . La condition de la boucle reste toujours vraie : le programme ne s'arrête pas. Il faut donc imposer $\text{base} > 1$ pour cet objectif.

Corrigé 15

 *Démonstration / Identifier le carré, puis contrôler le signe*

$$(\sqrt{5} + 2)^2 = 5 + 4\sqrt{5} + 4 = 9 + 4\sqrt{5}.$$

Comme $\sqrt{5} + 2 > 0$,

$$\boxed{\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 2}.$$

Ensuite,

$$(2 - \sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}.$$

Comme $3 < 4$, on a $\sqrt{3} < 2$, donc $2 - \sqrt{3} > 0$. Ainsi

$$\boxed{\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}}.$$

Enfin, on multiplie par le conjugué :

$$\frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \frac{\sqrt{5} + 2}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = \frac{\sqrt{5} + 2}{5 - 4} = \boxed{\sqrt{5} + 2}.$$

Corrigé du problème : Approcher $\sqrt{2}$ sans calculatrice

 *Démonstration / Partie A – La machine à fractions*

1. On met les deux termes au même dénominateur :

$$T(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{x} + \frac{2}{x} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{x^2 + 2}{x} = \boxed{\frac{x^2 + 2}{2x}}.$$

2. Les calculs donnent

$$T(2) = \frac{1}{2} (2 + 1) = \boxed{\frac{3}{2}}.$$

Puis

$$\begin{aligned} T\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3/2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{17}{6} = \boxed{\frac{17}{12}}. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} T\left(\frac{17}{12}\right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{289 + 288}{204} = \boxed{\frac{577}{408}}. \end{aligned}$$

3. Si x est rationnel non nul, alors $2/x$, puis $x + 2/x$, puis la moitié de cette somme sont rationnels.
Si $x > 0$, tous les termes sont positifs, donc $T(x) > 0$.

 Démonstration / Partie B – L'erreur devient un carré

4. Avec $T(x) = (x^2 + 2)/(2x)$:

$$\begin{aligned} T(x)^2 - 2 &= \frac{(x^2 + 2)^2}{4x^2} - \frac{8x^2}{4x^2} \\ &= \frac{x^4 + 4x^2 + 4 - 8x^2}{4x^2} \\ &= \frac{x^4 - 4x^2 + 4}{4x^2} \\ &= \boxed{\frac{(x^2 - 2)^2}{4x^2}}. \end{aligned}$$

5. Mettons $T(x) - \sqrt{2}$ au même dénominateur :

$$\begin{aligned} T(x) - \sqrt{2} &= \frac{x^2 + 2 - 2x\sqrt{2}}{2x} \\ &= \frac{x^2 - 2x\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{2x} \\ &= \boxed{\frac{(x - \sqrt{2})^2}{2x}}. \end{aligned}$$

6. Le numérateur $(x - \sqrt{2})^2$ est positif ou nul et le dénominateur $2x$ est strictement positif. Ainsi $T(x) - \sqrt{2} \geq 0$, donc $T(x) \geq \sqrt{2}$. Le quotient est nul exactement lorsque $x - \sqrt{2} = 0$, c'est-à-dire lorsque $x = \sqrt{2}$.

 Démonstration / Partie C – Mesurer exactement la précision

7.

$$17^2 - 2 \times 12^2 = 289 - 288 = \boxed{1},$$

et

$$577^2 - 2 \times 408^2 = 332\,929 - 332\,928 = \boxed{1}.$$

8. En divisant la seconde égalité par $408^2 = 166\,464$:

$$\left(\frac{577}{408}\right)^2 - 2 = \frac{577^2 - 2 \times 408^2}{408^2} = \boxed{\frac{1}{166\,464}}.$$

9. Comme $r^2 - 2 = (r - \sqrt{2})(r + \sqrt{2})$,

$$r - \sqrt{2} = \frac{1}{166\,464(r + \sqrt{2})}.$$

Or $r > 1$ et $\sqrt{2} > 1$, donc $r + \sqrt{2} > 2$. Par conséquent,

$$0 < r - \sqrt{2} < \boxed{\frac{1}{332\,928}}.$$

10. La forme $(x^2 + 2)/(2x)$ est la plus efficace :

$$\begin{aligned} T\left(\frac{577}{408}\right) &= \frac{577^2 + 2 \times 408^2}{2 \times 577 \times 408} \\ &= \frac{332\,929 + 332\,928}{470\,832} \\ &= \frac{665\,857}{470\,832}. \end{aligned}$$

 *Démonstration / Partie D – L'identité qui explique tout*

11. Pour $x = p/q$:

$$\begin{aligned} T\left(\frac{p}{q}\right) &= \frac{(p/q)^2 + 2}{2p/q} \\ &= \frac{p^2 + 2q^2}{q^2} \times \frac{q}{2p} \\ &= \frac{p^2 + 2q^2}{2pq} = \frac{p'}{q'}. \end{aligned}$$

12. Développons :

$$\begin{aligned} p'^2 - 2q'^2 &= (p^2 + 2q^2)^2 - 2(2pq)^2 \\ &= p^4 + 4p^2q^2 + 4q^4 - 8p^2q^2 \\ &= p^4 - 4p^2q^2 + 4q^4 \\ &= (p^2 - 2q^2)^2. \end{aligned}$$

13. Si $p^2 - 2q^2 = 1$, alors

$$p'^2 - 2q'^2 = (p^2 - 2q^2)^2 = 1^2 = 1.$$

La transformation fabrique donc une nouvelle solution entière de la même relation.

14. La fraction $R = 665\,857/470\,832$ vérifie $665\,857^2 - 2 \times 470\,832^2 = 1$ par la question précédente.

Ainsi

$$(R - \sqrt{2})(R + \sqrt{2}) = \frac{1}{470\,832^2}.$$

Comme $R + \sqrt{2} > 2$,

$$0 < R - \sqrt{2} < \frac{1}{2 \times 470\,832^2}.$$

Cette borne est inférieure à 3×10^{-12} . Les dix premiers chiffres après la virgule de R sont donc ceux de $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} \approx 1,4142135624 \text{ à } 10^{-10} \text{ près}.$$

 *Démonstration / Partie E – Programme Python*

La formule de T se traduit directement :

```

1 def heron_racine_deux(x, n):
2     for k in range(n):
3         x = (x + 2 / x) / 2
4     return x

```

 *Démonstration | Lecture du programme*

En partant de $x = 2$, trois passages produisent successivement $3/2$, $17/12$ puis $577/408$ en calcul exact. Avec des nombres flottants, Python en donne des approximations décimales.

📖 Carte mémoire de la fiche

🔧 Méthode | Puissances

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

🔧 Méthode | Identités remarquables

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

🔧 Méthode | Racines

$$\sqrt{a^2} = |a|, \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b},$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

⚠️ Attention | Trois pièges

$$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2,$$

$$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Ne simplifie jamais des termes séparés par + ou – dans une fraction.

Fin de la Fiche 3 – Puissances, racines et calcul littéral

Tu sais maintenant transformer une expression sans changer sa valeur et choisir la forme qui révèle l'information utile.

Tu as aussi construit une approximation de $\sqrt{2}$ précise à plus de dix décimales avec de simples fractions.

➔ Prochaine fiche : Inégalités, comparaisons et variations.