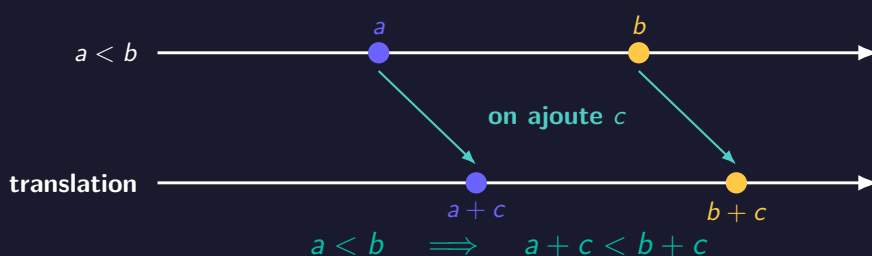


Inégalités & comparaisons

Ordre, encadrements et variations

Règles de signes ■ Différences ■ Rapports



Seconde générale ■ Mathématiques ■ Programme officiel

 Cours complet

 15 exercices

 Problème défi

 Corrigés

Table des matières

1	🔍 Pourquoi étudier les inégalités ?	3
1.1	Le problème fondamental	3
1.2	Une question de point de vue	3
2	🧠 L'idée avant la formule	3
2.1	L'ordre se lit de gauche à droite	3
2.2	Ajouter, c'est traduire	3
2.3	Multiplier par un nombre négatif, c'est retourner la droite	4
3	📖 Le cours complet	4
3.1	Vocabulaire et notations	4
3.2	Ajouter ou soustraire un même nombre	4
3.3	Additionner deux inégalités	5
3.4	Multiplier ou diviser une inégalité	6
3.5	Comparer par différence	6
3.6	Comparer par quotient	7
3.7	Carrés, racines et inverses	7
3.8	Encadrer une somme ou une différence	8
3.9	Encadrer un produit positif	9
3.10	Ordre et expression affine	10
3.11	Variations additive, multiplicative et relative	10
4	🧰 Boîte à outils : les réflexes	11
5	🎯 Pour aller plus loin	12
5.1	Moyenne arithmétique et moyenne géométrique	12
5.2	Trois moyennes ordonnées	13
6	✍ Exercices	14
7	🔑 Problème : Une racine presque demi-entière ★★ ★	17
8	✅ Corrigés détaillés	19

1 ? Pourquoi étudier les inégalités ?

1.1 Le problème fondamental

Dans la vie courante, une valeur exacte ne suffit pas toujours. On veut savoir si une vitesse respecte une limite, si un budget est suffisant, si une mesure appartient à une zone de tolérance, ou laquelle de deux offres est la plus avantageuse.

Une inégalité ne dit pas seulement que deux valeurs sont différentes. Elle les **ordonne**. Mais cet ordre doit être manipulé avec soin : ajouter conserve l'ordre, tandis que multiplier par un nombre négatif le renverse.

Intuition | Comparer sans arrondir

La calculatrice suggère que $\sqrt{50} \approx 7,071$, donc $\sqrt{50} > 7$. Une preuve exacte est plus simple : les deux nombres sont positifs et $50 > 49 = 7^2$, donc $\sqrt{50} > 7$. Une bonne comparaison transforme le problème au lieu d'empiler des décimales.

1.2 Une question de point de vue

Comparer A et B peut signifier deux choses différentes :

- mesurer l'**écart additif** $A - B$: combien d'unités les séparent ?
- mesurer le **rapport multiplicatif** A/B lorsque $B > 0$: combien de fois B faut-il pour obtenir A ?

Une augmentation de 20 euros n'a pas le même poids sur un prix de 100 euros et sur un prix de 1000 euros. La variation additive est la même, mais la variation relative change.

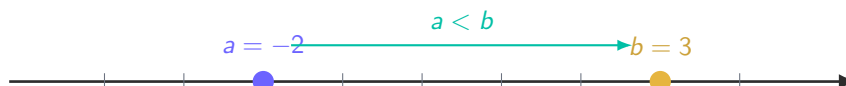
Attention | Un signe peut changer toute la conclusion

De $2 < 5$, on déduit $6 < 15$ en multipliant par $3 > 0$, mais $-6 > -15$ en multipliant par $-3 < 0$. Ne transforme jamais une inégalité sans connaître le signe du multiplicateur.

2 L'idée avant la formule

2.1 L'ordre se lit de gauche à droite

Sur une droite graduée orientée vers la droite, $a < b$ signifie que le point d'abscisse a est à gauche du point d'abscisse b . Plus un nombre est à droite, plus il est grand.



2.2 Ajouter, c'est traduire

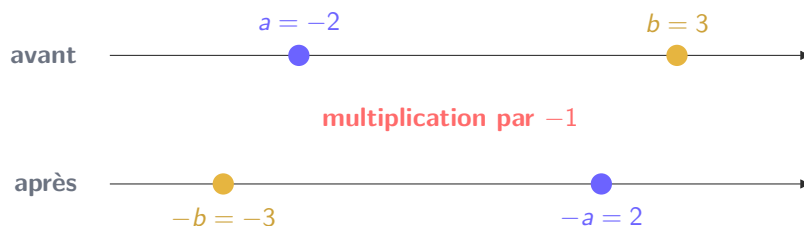
Ajouter le même nombre c à a et à b déplace les deux points de la même distance et dans le même sens. Leur ordre ne peut donc pas changer :

$$a < b \implies a + c < b + c.$$

Soustraire c revient à ajouter $-c$; l'ordre est encore conservé.

2.3 Multiplier par un nombre négatif, c'est retourner la droite

L'application $x \mapsto -x$ transforme la droite en son image miroir autour de 0. Le point le plus à droite devient le plus à gauche. C'est pourquoi le sens de l'inégalité s'inverse.



On lit $-b < -a$, donc $a < b$ entraîne $-a > -b$.

3 Le cours complet

3.1 Vocabulaire et notations

Définition

Pour deux réels a et b :

- $a < b$ signifie que a est strictement inférieur à b ;
- $a \leq b$ signifie que $a < b$ ou $a = b$;
- $a > b$ et $a \geq b$ se lisent de façon symétrique.

Une **inégalité stricte** utilise $<$ ou $>$; une inégalité large utilise $\leq$ ou $\geq$.

Propriété | Transitivité

Pour tous réels a, b, c :

$$a < b \text{ et } b < c \implies a < c.$$

La même propriété vaut avec $\leq$.

Exemple

Comme $-3 < 1$ et $1 < \sqrt{2}$, on peut conclure $-3 < \sqrt{2}$ sans calculer de valeur approchée.

3.2 Ajouter ou soustraire un même nombre

Théorème | Translation de l'ordre

Pour tous réels a, b, c :

$$a < b \text{ si et seulement si } a + c < b + c.$$

En particulier,

$$a < b \text{ si et seulement si } a - c < b - c.$$

Les versions avec $\leq$, $>$ ou $\geq$ sont analogues.

 *Démonstration | Preuve par la différence*

$a < b$ signifie que $b - a > 0$. Or

$$(b + c) - (a + c) = b - a.$$

La différence ne change pas : elle reste positive. Donc $a + c < b + c$. Le raisonnement inverse s'obtient en ajoutant $-c$.

 **Exemple**

De $x + 7 < 12$, on peut soustraire 7 aux deux membres :

$$x + 7 - 7 < 12 - 7, \quad \text{donc} \quad x < 5.$$

Cette technique prépare la résolution des inéquations de la fiche suivante.

3.3 Additionner deux inégalités

 **Théorème | Somme d'inégalités**

Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors

$$a + c \leq b + d.$$

Si l'une des deux inégalités est stricte, la conclusion est stricte.

 *Démonstration*

De $a \leq b$, on déduit $a + c \leq b + c$. De $c \leq d$, on déduit $b + c \leq b + d$. Par transitivité,

$$a + c \leq b + d.$$

 **Attention | On ne soustrait pas membre à membre au hasard**

De $a \leq b$ et $c \leq d$, on ne peut pas conclure en général que $a - c \leq b - d$. Par exemple,

$$1 \leq 2, \quad 3 \leq 100,$$

mais $1 - 3 = -2$ et $2 - 100 = -98$, donc $-2 > -98$.

3.4 Multiplier ou diviser une inégalité

★ Théorème | Le signe du multiplicateur décide

Si $a < b$:

- pour $c > 0$, on a $ac < bc$;
- pour $c < 0$, on a $ac > bc$;
- pour $c = 0$, on a $ac = bc = 0$.

Diviser par un nombre non nul suit la même règle selon son signe.

 *Démonstration | Pourquoi le sens s'inverse-t-il ?*

Supposons $a < b$, donc $b - a > 0$.

Si $c > 0$, alors $c(b - a) > 0$, soit $bc - ac > 0$; donc $ac < bc$.

Si $c < 0$, le produit $c(b - a)$ est négatif : $bc - ac < 0$. Ainsi $bc < ac$, c'est-à-dire $ac > bc$.

Exemple

De $-4 < 6$:

$$(-4) \times 5 < 6 \times 5, \quad \text{donc} \quad -20 < 30,$$

mais

$$(-4) \times (-2) > 6 \times (-2), \quad \text{donc} \quad 8 > -12.$$

Attention | Multiplicateur inconnu

Si $a < b$, on ne peut pas comparer ax et bx sans connaître le signe de x . Il faut distinguer $x > 0$, $x = 0$ et $x < 0$.

3.5 Comparer par différence

★ Théorème | Comparaison additive

Pour tous réels A et B :

$$A > B \quad \text{si et seulement si} \quad A - B > 0,$$

$$A = B \quad \text{si et seulement si} \quad A - B = 0, \quad A < B \quad \text{si et seulement si} \quad A - B < 0.$$

 *Démonstration*

On passe de $A > B$ à $A - B > 0$ en soustrayant B aux deux membres. Réciproquement, on passe de $A - B > 0$ à $A > B$ en ajoutant B . Les deux affirmations sont donc équivalentes.

✂ Méthode | Comparer exactement deux expressions

1. Calcule $A - B$.
2. Transforme ou factorise cette différence.
3. Détermine son signe.
4. Conclut avec une phrase.

Par exemple, comparons $(x + 1)^2$ et $x^2 + 1$:

$$(x + 1)^2 - (x^2 + 1) = 2x.$$

La première expression est plus grande si $x > 0$, égale si $x = 0$, plus petite si $x < 0$.

3.6 Comparer par quotient

★ Théorème | Comparaison multiplicative

Si $A > 0$ et $B > 0$, alors

$$A > B \quad \text{si et seulement si} \quad \frac{A}{B} > 1.$$

Plus généralement, $A = kB$ avec $k = A/B$: le quotient mesure combien de fois B est contenu dans A .

Démonstration

Comme $B > 0$, diviser $A > B$ par B conserve le sens : $A/B > B/B = 1$. Réciproquement, multiplier $A/B > 1$ par $B > 0$ donne $A > B$.

💡 Exemple | Deux comparaisons, deux informations

Un prix passe de 80 à 100 euros.

$$100 - 80 = 20$$

mesure une hausse additive de 20 euros, tandis que

$$\frac{100}{80} = 1,25$$

signifie que le nouveau prix est 1,25 fois l'ancien, soit une hausse de 25 %.

3.7 Carrés, racines et inverses

✓ Propriété | Comparer des carrés positifs

Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$, alors

$$a < b \quad \text{si et seulement si} \quad a^2 < b^2.$$

 Démonstration

On factorise :

$$b^2 - a^2 = (b - a)(b + a).$$

Si $0 \leq a < b$, alors $b - a > 0$ et $b + a > 0$, donc $b^2 - a^2 > 0$. Réciproquement, si $a^2 < b^2$ mais $a \geq b$, alors la même propriété donnerait $a^2 \geq b^2$, contradiction.

 Propriété | Ordre et racine carrée

Pour $0 \leq a < b$,

$$\boxed{\sqrt{a} < \sqrt{b}}.$$

 Démonstration

Les nombres $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont positifs. Leurs carrés sont a et b , avec $a < b$. La propriété précédente permet donc de conclure $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

 Propriété | L'inverse renverse l'ordre positif

Si $0 < a < b$, alors

$$\boxed{\frac{1}{a} > \frac{1}{b}}.$$

 Démonstration

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab}.$$

Le numérateur $b - a$ et le dénominateur ab sont positifs. La différence est donc positive, d'où $1/a > 1/b$.

3.8 Encadrer une somme ou une différence

 Théorème | Somme de deux encadrements

Si

$$a \leq x \leq b \quad \text{et} \quad c \leq y \leq d,$$

alors

$$\boxed{a + c \leq x + y \leq b + d}.$$

 Démonstration

Les inégalités $a \leq x$ et $c \leq y$ donnent $a + c \leq x + y$. De même, $x \leq b$ et $y \leq d$ donnent $x + y \leq b + d$. On rassemble les deux conclusions.

✓ Propriété | Différence

Sous les mêmes hypothèses,

$$a - d \leq x - y \leq b - c.$$

Démonstration

De $c \leq y \leq d$, la multiplication par -1 donne $-d \leq -y \leq -c$. On additionne ensuite l'encadrement de x :

$$a - d \leq x - y \leq b - c.$$

Exemple

Si $2 \leq x \leq 5$ et $-1 \leq y \leq 3$, alors

$$1 \leq x + y \leq 8, \quad -1 \leq x - y \leq 6.$$

3.9 Encadrer un produit positif

★ Théorème

Si $0 \leq a \leq x \leq b$ et $0 \leq c \leq y \leq d$, alors

$$ac \leq xy \leq bd.$$

Démonstration

Comme $x \geq a \geq 0$ et $y \geq c \geq 0$:

$$xy \geq ay \geq ac.$$

De même, $x \leq b$ et $y \leq d$, avec des facteurs positifs, donnent

$$xy \leq by \leq bd.$$

Attention | Avec des nombres négatifs, il faut examiner les quatre coins

La formule précédente suppose toutes les bornes positives. Si les signes varient, calcule les quatre produits ac, ad, bc, bd : le plus petit et le plus grand fournissent les bornes du produit.

3.10 Ordre et expression affine

★ Théorème | Effet du coefficient directeur

Soit $f(x) = mx + p$.

- Si $m > 0$, f conserve l'ordre : $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.
- Si $m < 0$, f renverse l'ordre : $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.
- Si $m = 0$, f est constante.

 *Démonstration | Tout repose sur une différence*

$$f(b) - f(a) = (mb + p) - (ma + p) = m(b - a).$$

Si $a < b$, alors $b - a > 0$. Le signe de $f(b) - f(a)$ est donc exactement le signe de m .

💡 Exemple

La fonction $f(x) = -3x + 7$ renverse l'ordre. Comme $2 < 5$,

$$f(2) = 1 > f(5) = -8.$$

3.11 Variations additive, multiplicative et relative

📖 Définition

Une grandeur passe d'une valeur initiale $V_i > 0$ à une valeur finale V_f .

- La **variation absolue** est $V_f - V_i$.
- Le **coefficient multiplicateur** est V_f/V_i .
- Le **taux d'évolution** est

$$t = \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_f}{V_i} - 1.$$

 *Démonstration | Lien entre taux et coefficient*

De la définition du taux,

$$t = \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_f}{V_i} - \frac{V_i}{V_i} = \frac{V_f}{V_i} - 1.$$

Donc $V_f/V_i = 1 + t$, soit

$$V_f = (1 + t)V_i.$$

✔ Propriété | Pourcentages

Augmenter de $p\%$ revient à multiplier par $1 + p/100$. Diminuer de $p\%$ revient à multiplier par $1 - p/100$.

💡 Exemple

Une quantité passe de 240 à 276 :

$$276 - 240 = 36, \quad \frac{276}{240} = 1,15, \quad t = 0,15 = 15\%.$$

La hausse est de 36 unités, soit 15 %.

⚠️ Attention | Ajouter 20 %, puis retirer 20 %

Les coefficients sont 1,2 puis 0,8. Leur produit vaut 0,96, pas 1. La valeur finale est donc 4 % plus petite que la valeur initiale.

4 🧰 Boîte à outils : les réflexes

🔧 Méthode | Transformer

Ajouter ou soustraire conserve le sens. Multiplier ou diviser conserve le sens si le nombre est positif et l'inverse s'il est négatif.

🔧 Méthode | Comparer

Calcule $A - B$. Si $A, B > 0$, le rapport A/B peut aussi être pertinent.

🔧 Méthode | Encadrer

Addition : bornes de même côté. Soustraction : on inverse les bornes du second encadrement. Produit : contrôle d'abord les signes.

🔧 Méthode | Variation

$$\Delta V = V_f - V_i, \quad k = \frac{V_f}{V_i},$$

$$t = k - 1.$$

⚠️ Attention | La phrase de conclusion compte

Un calcul de signe n'est pas encore une comparaison. Termine toujours : « la différence est positive, donc $A > B$ », ou l'énoncé correspondant.

5 Pour aller plus loin

Intuition | Un approfondissement guidé

Les inégalités suivantes sont classiques dans les classes très exigeantes. Elles restent pourtant accessibles ici : tout part de la seule évidence qu'un carré est positif ou nul.

5.1 Moyenne arithmétique et moyenne géométrique

★ Théorème | Inégalité arithmético-géométrique

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$,

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Il y a égalité si et seulement si $a = b$.

Démonstration | Démonstration à partir d'un carré

Le carré $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ est positif ou nul :

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0.$$

Donc

$$a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

puis, en divisant par $2 > 0$,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

L'égalité a lieu exactement lorsque $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, donc lorsque $a = b$.

Exemple | Une optimisation sans dérivée

Pour $x > 0$, applique le théorème à x et $9/x$:

$$\frac{x + 9/x}{2} \geq \sqrt{x \times \frac{9}{x}} = 3.$$

Ainsi

$$x + \frac{9}{x} \geq 6,$$

avec égalité lorsque $x = 9/x$, c'est-à-dire $x = 3$.

5.2 Trois moyennes ordonnées

Pour $a, b > 0$, on définit

$$H = \frac{2ab}{a+b}, \quad G = \sqrt{ab}, \quad A = \frac{a+b}{2}.$$

★ Théorème

$$H \leq G \leq A.$$

Ce sont respectivement les moyennes harmonique, géométrique et arithmétique.

Démonstration

L'inégalité $G \leq A$ vient d'être démontrée. Pour l'autre :

$$\begin{aligned} G - H &= \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} \\ &= \frac{\sqrt{ab}(a+b) - 2ab}{a+b} \\ &= \frac{\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}. \end{aligned}$$

Le dénominateur et $\sqrt{ab}$ sont positifs, tandis que $a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$ d'après la première inégalité. Donc $G - H \geq 0$, soit $H \leq G$.

Exemple

Pour $a = 2$ et $b = 8$:

$$H = \frac{32}{10} = 3,2, \quad G = \sqrt{16} = 4, \quad A = 5.$$

On vérifie bien $3,2 < 4 < 5$.

6 Exercices

Exercice 1 : Lire et ordonner

1. Ranger dans l'ordre croissant : -3 , $\sqrt{9}$, 0 , $\frac{5}{2}$, $-\frac{1}{2}$.
2. Traduire par une inégalité : « x est au moins égal à -4 » ; « y est strictement inférieur à 7 ».
3. On sait que $-2 < 5$. Comparer 2 et -5 , puis $-2 + 9$ et $5 + 9$.

Exercice 2 : Transformer une inégalité

On part de $4 < 9$. Recopier et compléter, en justifiant :

1. $4 - 7 \dots 9 - 7$;
2. $4 \times 3 \dots 9 \times 3$;
3. $4 \times (-2) \dots 9 \times (-2)$;
4. $\frac{4}{-5} \dots \frac{9}{-5}$.

Enfin, déduire de $x + 4 \leq 10$ une comparaison entre x et 6 .

Exercice 3 : Encadrer une somme et une différence

On suppose que $1 \leq x \leq 4$ et $-2 \leq y \leq 3$.

1. Encadrer $x + y$.
2. Encadrer $x - y$.
3. Donner des valeurs de x et y pour lesquelles chaque borne obtenue est atteinte.

Exercice 4 : Comparer par différence

Comparer exactement les deux nombres de chaque ligne.

1. $\frac{7}{12}$ et $\frac{5}{8}$;
2. 1001^2 et 1000×1002 ;
3. $(x + 2)^2$ et $x^2 + 4$, suivant le signe de x .

Exercice 5 : Comparer des racines

Sans utiliser de valeur décimale, comparer :

$$\sqrt{50} \text{ et } 7, \quad 2\sqrt{3} \text{ et } \sqrt{13}, \quad \sqrt{7} \text{ et } \frac{8}{3}.$$

Chaque comparaison doit comporter une phrase expliquant pourquoi on peut comparer les carrés.

Exercice 6 : Deux offres au supermarché

Un paquet A contient 450 g de café et coûte 3,60 euros. Un paquet B contient 750 g et coûte 5,70 euros.

1. Calculer exactement le prix par kilogramme de chaque paquet.
2. Quelle offre est la moins chère à quantité égale ?
3. De quel pourcentage environ le prix au kilogramme de B est-il inférieur à celui de A ?

Exercice 7 ★★☆☆ : Combiner des encadrements

On suppose que $-1 \leq a \leq 3$ et $2 \leq b \leq 5$.

1. Encadrer $2a + 3b$.
2. Encadrer $a - b$.
3. Expliquer pourquoi les quatre bornes trouvées sont les meilleures possibles.

Exercice 8 ★★☆☆ : Produit et quotient positifs

On suppose que $2 \leq x \leq 5$ et $3 \leq y \leq 7$.

1. Encadrer xy .
2. Montrer que $\frac{1}{7} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{3}$.
3. En déduire un encadrement de $\frac{x}{y}$.

Exercice 9 ★★☆☆ : Expressions affines

On considère $f(x) = 3x - 5$ et $g(x) = -2x + 7$.

1. Si $a < b$, comparer $f(a)$ et $f(b)$, puis $g(a)$ et $g(b)$.
2. Justifier que f est croissante et que g est décroissante.
3. Encadrer $f(x)$ et $g(x)$ lorsque $-2 \leq x \leq 4$.

Exercice 10 ★★☆☆ : Variations additive et multiplicative

1. Une quantité passe de 80 à 92. Calculer sa variation absolue, son coefficient multiplicateur et son taux d'évolution.
2. Un prix de 240 euros diminue de 15 %. Calculer le nouveau prix.
3. Après une hausse de 20 %, un prix vaut 96 euros. Quel était le prix initial ?

Exercice 11 ★★☆☆ : Pourcentages successifs

1. Une valeur augmente de 20 %, puis diminue de 20 %. Est-elle revenue à sa valeur initiale ?
2. Après une baisse de 20 %, de quel pourcentage faut-il augmenter la nouvelle valeur pour revenir exactement au départ ?
3. Vérifier les deux réponses en partant d'une valeur initiale de 100.

Exercice 12 ★★☆☆ : Un paramètre dont le signe change

On sait que $a < b$. Comparer $a(c - 2)$ et $b(c - 2)$ dans chacun des trois cas suivants :

$$c > 2, \quad c = 2, \quad c < 2.$$

Préciser, pour chaque cas, le signe du nombre par lequel on multiplie l'inégalité $a < b$.

Exercice 13 ★★☆☆ : Une inégalité fondamentale

Soit $x > 0$.

1. Calculer $x + \frac{1}{x} - 2$ et l'écrire sous la forme d'un quotient dont le numérateur est un carré.
2. Démontrer que $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
3. Déterminer le cas d'égalité.
4. En remplaçant x par $\sqrt{\frac{a}{b}}$ avec $a, b > 0$, retrouver l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 14 ★★☆☆ : Un produit avec des nombres négatifs

On suppose que $-2 \leq x \leq 3$ et $1 \leq y \leq 4$.

1. Pourquoi la règle « multiplier les deux bornes inférieures et les deux bornes supérieures » ne s'applique-t-elle pas directement ?
2. Calculer les quatre produits $(-2) \times 1$, $(-2) \times 4$, 3×1 et 3×4 .
3. En déduire le meilleur encadrement possible de xy .

Exercice 15 ★★☆☆ : Rationaliser pour comparer

Soient $a > b > 0$.

1. Démontrer que

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

2. Si $a - b = 1$ et $b \geq 1$, montrer que

$$0 < \sqrt{a} - \sqrt{b} < \frac{1}{2\sqrt{b}}.$$

3. Sans calculatrice, comparer $\sqrt{2} - 1$ et $\sqrt{101} - 10$.

7 🦉 Problème : Une racine presque demi-entière ★★★

🧠 Intuition | Le défi

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$x_n = \sqrt{n^2 + n}.$$

Le nombre sous la racine n'est pas un carré parfait. Pourtant, x_n est très proche de $n + \frac{1}{2}$. Le but est de le démontrer, de mesurer exactement l'erreur, puis de construire un algorithme qui garantit une précision donnée.

Partie A — Localiser la racine

1. Montrer, en comparant des carrés, que

$$n < x_n < n + \frac{1}{2}.$$

2. En posant $d_n = x_n - n$, en déduire que $0 < d_n < \frac{1}{2}$.
3. En multipliant par une expression conjuguée, montrer que

$$d_n = \frac{n}{x_n + n}.$$

Partie B — Mesurer l'erreur exactement

On pose maintenant $e_n = n + \frac{1}{2} - x_n$.

4. Montrer que

$$e_n = \frac{1}{4 \left(n + \frac{1}{2} + x_n \right)}.$$

5. En utilisant $x_n > n$, prouver que

$$0 < e_n < \frac{1}{8n}.$$

6. En déduire l'encadrement

$$n + \frac{1}{2} - \frac{1}{8n} < \sqrt{n^2 + n} < n + \frac{1}{2}.$$

7. Appliquer cet encadrement à $n = 100$.

Partie C — Comment les écarts évoluent-ils ?

8. Montrer que

$$d_n = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n} + 1}.$$

9. Démontrer que la suite des écarts d_n est strictement croissante : $d_{n+1} > d_n$.
10. Démontrer que la suite des erreurs e_n est strictement décroissante : $e_{n+1} < e_n$.

Partie D — Une garantie de précision

On approche x_n par $A_n = n + \frac{1}{2}$.

11. Donner une borne de l'erreur absolue $|A_n - x_n|$, puis montrer que l'erreur relative vérifie

$$\frac{|A_n - x_n|}{x_n} < \frac{1}{8n^2}.$$

12. Trouver le plus petit entier n que cette borne permet de choisir pour garantir une erreur relative strictement inférieure à 10^{-6} .

Partie E — Traduire le raisonnement en Python

Compléter le programme suivant afin qu'il renvoie le plus petit entier $n \geq 1$ pour lequel la garantie $\frac{1}{8n^2} < \varepsilon$ est satisfaite.

```
1 def rang_precision(epsilon):  
2     n = 1  
3     while .....:  
4         n = .....  
5     return n  
6  
7 print(rang_precision(10**(-6)))
```

Expliquer pourquoi la boucle finit toujours lorsque $\varepsilon > 0$, puis prévoir la valeur affichée.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Lire et justifier*

1. Comme $\sqrt{9} = 3$ et $-3 < -\frac{1}{2} < 0 < \frac{5}{2} < 3$, on obtient

$$-3 < -\frac{1}{2} < 0 < \frac{5}{2} < \sqrt{9}.$$

2. « Au moins » signifie « supérieur ou égal » : $x \geq -4$. La seconde phrase donne $y < 7$.
3. En multipliant $-2 < 5$ par $-1 < 0$, on renverse le sens : $2 > -5$. En ajoutant 9 aux deux membres, on conserve le sens : $7 < 14$, c'est-à-dire $-2 + 9 < 5 + 9$.

Corrigé 2

 *Démonstration / Une opération, un signe*

1. On soustrait le même nombre : $-3 < 2$.
2. On multiplie par $3 > 0$, donc le sens est conservé : $12 < 27$.
3. On multiplie par $-2 < 0$, donc le sens est renversé : $-8 > -18$.
4. On divise par $-5 < 0$, donc le sens est renversé :

$$-\frac{4}{5} > -\frac{9}{5}.$$

Enfin, on soustrait 4 aux deux membres de $x + 4 \leq 10$:

$$x + 4 - 4 \leq 10 - 4, \quad x \leq 6.$$

Corrigé 3

 *Démonstration / Construire les bornes*

Pour la somme, on additionne les bornes de même côté :

$$1 + (-2) \leq x + y \leq 4 + 3, \quad -1 \leq x + y \leq 7.$$

Pour la différence, le plus petit $x - y$ est obtenu avec le plus petit x et le plus grand y ; le plus grand avec le plus grand x et le plus petit y :

$$1 - 3 \leq x - y \leq 4 - (-2), \quad -2 \leq x - y \leq 6.$$

Les bornes sont atteintes :

— $x + y = -1$ pour $(x, y) = (1, -2)$ et $x + y = 7$ pour $(4, 3)$;

— $x - y = -2$ pour $(1, 3)$ et $x - y = 6$ pour $(4, -2)$.

Corrigé 4

 *Démonstration / Le signe de la différence*

1.

$$\frac{7}{12} - \frac{5}{8} = \frac{14}{24} - \frac{15}{24} = -\frac{1}{24} < 0,$$

donc $\boxed{\frac{7}{12} < \frac{5}{8}}.$

2.

$$1001^2 - 1000 \times 1002 = 1002001 - 1002000 = 1 > 0,$$

donc $\boxed{1001^2 > 1000 \times 1002}.$

3.

$$(x + 2)^2 - (x^2 + 4) = x^2 + 4x + 4 - x^2 - 4 = 4x.$$

Ainsi $(x + 2)^2 > x^2 + 4$ si $x > 0$, les deux expressions sont égales si $x = 0$, et $(x + 2)^2 < x^2 + 4$ si $x < 0$.

Corrigé 5

 *Démonstration / Comparer les carrés positifs*

Tous les nombres comparés sont positifs ou nuls. Sur $[0, +\infty[$, comparer deux nombres revient donc à comparer leurs carrés.

— $(\sqrt{50})^2 = 50 > 49 = 7^2$, donc $\boxed{\sqrt{50} > 7}.$

— $(2\sqrt{3})^2 = 12 < 13 = (\sqrt{13})^2$, donc $\boxed{2\sqrt{3} < \sqrt{13}}.$

— $(\sqrt{7})^2 = 7 = \frac{63}{9} < \frac{64}{9} = \left(\frac{8}{3}\right)^2$, donc $\boxed{\sqrt{7} < \frac{8}{3}}.$

La phrase sur la positivité est indispensable : pour des nombres négatifs, l'ordre des carrés ne donne pas directement l'ordre des nombres.

Corrigé 6

 *Démonstration / Ramener à la même quantité*

450 g correspondent à 0,45 kg et 750 g à 0,75 kg. Ainsi

$$p_A = \frac{3,60}{0,45} = 8 \text{ euros/kg}, \quad p_B = \frac{5,70}{0,75} = 7,60 \text{ euros/kg}.$$

Donc l'offre B est la moins chère à quantité égale. La baisse relative, mesurée par rapport au prix A, vaut

$$\frac{7,60 - 8}{8} = \frac{-0,40}{8} = -0,05 = -5\%.$$

Le prix au kilogramme de B est donc $\boxed{5\%}$ moins élevé que celui de A.

Corrigé 7

 *Démonstration / Combiner sans perdre les bornes*

Comme 2 et 3 sont positifs,

$$-2 \leq 2a \leq 6, \quad 6 \leq 3b \leq 15.$$

En additionnant,

$$\boxed{4 \leq 2a + 3b \leq 21}.$$

Pour la différence,

$$\boxed{-1 - 5 \leq a - b \leq 3 - 2}, \quad \boxed{-6 \leq a - b \leq 1}.$$

Ces bornes sont optimales car elles sont atteintes : $2a + 3b = 4$ pour $(a, b) = (-1, 2)$, $2a + 3b = 21$ pour $(3, 5)$, $a - b = -6$ pour $(-1, 5)$ et $a - b = 1$ pour $(3, 2)$.

Corrigé 8

 *Démonstration / Inverser puis multiplier*

Toutes les bornes sont positives. On peut donc multiplier membre à membre :

$$\boxed{6 \leq xy \leq 35}.$$

Comme $3 \leq y \leq 7$, la fonction inverse renverse l'ordre sur les nombres positifs :

$$\boxed{\frac{1}{7} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{3}}.$$

Enfin x et $1/y$ sont positifs. En multipliant les bornes extrêmes,

$$2 \times \frac{1}{7} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 5 \times \frac{1}{3},$$

d'où

$$\boxed{\frac{2}{7} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{5}{3}}.$$

Les bornes sont atteintes pour $(x, y) = (2, 7)$ et $(5, 3)$.

Corrigé 9

 *Démonstration / Lire le coefficient directeur*

Si $a < b$, alors, puisque $3 > 0$,

$$3a < 3b \implies 3a - 5 < 3b - 5.$$

Donc $f(a) < f(b)$ et f est strictement croissante.

En revanche, $-2 < 0$, donc

$$-2a > -2b \implies -2a + 7 > -2b + 7.$$

Ainsi $g(a) > g(b)$ et g est strictement décroissante.

Pour $-2 \leq x \leq 4$, la croissance de f donne

$$f(-2) \leq f(x) \leq f(4), \quad -11 \leq f(x) \leq 7.$$

La décroissance de g inverse les images des extrémités :

$$g(4) \leq g(x) \leq g(-2), \quad -1 \leq g(x) \leq 11.$$

Corrigé 10

 *Démonstration* / *Trois mesures d'une évolution*

1. Variation absolue : $92 - 80 = 12$. Coefficient multiplicateur :

$$\frac{92}{80} = 1,15.$$

Le taux est $1,15 - 1 = 0,15$, soit une hausse de 15% .

2. Une baisse de 15% correspond au coefficient $1 - 0,15 = 0,85$:

$$240 \times 0,85 = 204 \text{ euros}.$$

3. Si P est le prix initial, $1,20P = 96$, donc

$$P = \frac{96}{1,20} = 80 \text{ euros}.$$

Corrigé 11

 *Démonstration* / *Composer des coefficients*

Une hausse de 20% a pour coefficient $1,20$; une baisse de 20% a pour coefficient $0,80$. Leur composition vaut

$$1,20 \times 0,80 = 0,96.$$

La valeur finale représente 96% de la valeur initiale : elle a donc baissé de 4% .

Après une baisse de 20% , le coefficient nécessaire pour revenir au départ est

$$\frac{1}{0,80} = 1,25,$$

soit une hausse de 25% .

Vérification sur 100 : $100 \times 1,20 \times 0,80 = 96$, tandis que $100 \times 0,80 \times 1,25 = 100$.

Corrigé 12

 *Démonstration / Le signe du paramètre*

On multiplie $a < b$ par $c - 2$. Tout dépend donc de son signe.

— Si $c > 2$, alors $c - 2 > 0$: le sens est conservé et

$$a(c - 2) < b(c - 2).$$

— Si $c = 2$, alors $c - 2 = 0$: les deux produits valent 0, donc

$$a(c - 2) = b(c - 2).$$

— Si $c < 2$, alors $c - 2 < 0$: le sens est renversé et

$$a(c - 2) > b(c - 2).$$

Cet exercice montre pourquoi il est dangereux de multiplier une inégalité par une expression dont on ignore le signe.

Corrigé 13

 *Démonstration / Faire apparaître un carré*

Comme $x > 0$,

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} = \frac{(x - 1)^2}{x}.$$

Le numérateur est positif ou nul et le dénominateur est strictement positif. Ainsi

$$x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0, \quad \boxed{x + \frac{1}{x} \geq 2}.$$

Il y a égalité si et seulement si $(x - 1)^2 = 0$, donc si et seulement si $\boxed{x = 1}$.

En prenant $x = \sqrt{a/b}$ avec $a, b > 0$, on obtient

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \geq 2.$$

Puis, en multipliant par $\sqrt{ab} > 0$,

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \quad \boxed{\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}}.$$

Corrigé 14

 *Démonstration / Examiner les quatre coins*

L'intervalle de x contient des nombres négatifs et positifs. On ne peut donc pas utiliser la règle réservée aux quatre bornes positives.

Les quatre produits aux coins du rectangle des possibilités valent

$$(-2) \times 1 = -2, \quad (-2) \times 4 = -8, \quad 3 \times 1 = 3, \quad 3 \times 4 = 12.$$

Le plus petit est -8 et le plus grand est 12 . Par conséquent

$$\boxed{-8 \leq xy \leq 12}.$$

Les deux bornes sont atteintes : -8 pour $(x, y) = (-2, 4)$ et 12 pour $(3, 4)$.

Corrigé 15

 *Démonstration / Utiliser le conjugué*

On multiplie par l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned} \sqrt{a} - \sqrt{b} &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= \boxed{\frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}}. \end{aligned}$$

Le dénominateur est non nul car $a, b > 0$.

Si $a - b = 1$, alors

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} > 0.$$

De plus $a > b$, donc $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 2\sqrt{b}$. Les nombres étant positifs, le passage aux inverses renverse l'ordre :

$$\boxed{0 < \sqrt{a} - \sqrt{b} < \frac{1}{2\sqrt{b}}}.$$

Enfin,

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}, \quad \sqrt{101} - 10 = \frac{1}{\sqrt{101} + 10}.$$

Or $\sqrt{2} + 1 < \sqrt{101} + 10$. Les dénominateurs sont positifs, donc

$$\boxed{\sqrt{2} - 1 > \sqrt{101} - 10}.$$

Corrigé du problème : Une racine presque demi-entière *Démonstration / Partie A – Localiser la racine*

1. Comme $n \geq 1$, les nombres comparés sont positifs. D'une part,

$$n^2 < n^2 + n = x_n^2,$$

donc $n < x_n$. D'autre part,

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 = n^2 + n + \frac{1}{4} > n^2 + n = x_n^2,$$

donc $x_n < n + \frac{1}{2}$. Finalement,

$$n < x_n < n + \frac{1}{2}.$$

2. En soustrayant n aux trois membres,

$$0 < d_n = x_n - n < \frac{1}{2}.$$

3. On rationalise :

$$\begin{aligned} d_n = x_n - n &= \frac{(x_n - n)(x_n + n)}{x_n + n} \\ &= \frac{x_n^2 - n^2}{x_n + n} = \frac{n^2 + n - n^2}{x_n + n}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$d_n = \frac{n}{x_n + n}.$$

 *Démonstration / Partie B – Mesurer l'erreur exactement*

4. L'expression conjuguée est $n + \frac{1}{2} + x_n$. Alors

$$\begin{aligned} e_n &= n + \frac{1}{2} - x_n \\ &= \frac{\left(n + \frac{1}{2} - x_n\right)\left(n + \frac{1}{2} + x_n\right)}{n + \frac{1}{2} + x_n} \\ &= \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - x_n^2}{n + \frac{1}{2} + x_n} \\ &= \frac{n^2 + n + \frac{1}{4} - (n^2 + n)}{n + \frac{1}{2} + x_n}. \end{aligned}$$

Donc

$$e_n = \frac{1}{4 \left(n + \frac{1}{2} + x_n \right)}.$$

5. On sait déjà que $e_n > 0$. Comme $x_n > n$,

$$n + \frac{1}{2} + x_n > 2n + \frac{1}{2} > 2n.$$

En multipliant par $4 > 0$, puis en passant aux inverses positifs,

$$4 \left(n + \frac{1}{2} + x_n \right) > 8n \implies 0 < e_n < \frac{1}{8n}.$$

6. L'égalité $e_n = n + \frac{1}{2} - x_n$ donne $x_n = n + \frac{1}{2} - e_n$. En utilisant $0 < e_n < 1/(8n)$,

$$n + \frac{1}{2} - \frac{1}{8n} < \sqrt{n^2 + n} < n + \frac{1}{2}.$$

7. Pour $n = 100$,

$$100 + \frac{1}{2} - \frac{1}{800} < \sqrt{10100} < 100 + \frac{1}{2}.$$

Comme $\frac{1}{800} = 0,00125$,

$$100,49875 < \sqrt{10100} < 100,5.$$

L'intervalle a une largeur de seulement 0,00125.



Démonstration / Partie C – Comment les écarts évoluent-ils ?

8. Dans la formule obtenue à la question 3, on factorise n au numérateur de la racine :

$$x_n = \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = n \sqrt{1 + \frac{1}{n}},$$

car $n > 0$. Ainsi

$$d_n = \frac{n}{n \sqrt{1 + 1/n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n} + 1}.$$

9. Comme $n + 1 > n > 0$,

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

La racine carrée conserve l'ordre sur les nombres positifs, donc

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} + 1 < \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1.$$

Ces deux dénominateurs sont positifs : leurs inverses sont donc rangés dans l'ordre contraire. Par conséquent

$$d_{n+1} > d_n.$$

L'écart entre x_n et l'entier n augmente, tout en restant inférieur à $1/2$.

10. On a

$$x_{n+1}^2 = (n+1)^2 + (n+1) > n^2 + n = x_n^2.$$

Les deux nombres étant positifs, $x_{n+1} > x_n$. Ainsi

$$(n+1) + \frac{1}{2} + x_{n+1} > n + \frac{1}{2} + x_n.$$

Dans la formule de e_n , le dénominateur augmente strictement ; l'inverse diminue strictement. Donc

$$e_{n+1} < e_n.$$

 *Démonstration / Partie D – Une garantie de précision*

11. Comme $A_n = n + \frac{1}{2} > x_n$,

$$|A_n - x_n| = A_n - x_n = e_n < \frac{1}{8n}.$$

De plus $x_n > n > 0$. On peut donc diviser par x_n , puis utiliser $1/x_n < 1/n$:

$$\frac{|A_n - x_n|}{x_n} < \frac{1}{8n} \times \frac{1}{x_n} < \frac{1}{8n^2}.$$

12. On cherche

$$\frac{1}{8n^2} < 10^{-6}.$$

Comme les quantités sont positives,

$$8n^2 > 10^6 \text{ si et seulement si } n^2 > 125000.$$

Or $353^2 = 124609 < 125000$ et $354^2 = 125316 > 125000$. Le plus petit entier garanti par cette borne est donc

$$n = 354.$$

 *Démonstration / Partie E – Traduire le raisonnement en Python*

La boucle doit continuer tant que la garantie demandée n'est pas encore satisfaite, c'est-à-dire tant que $1/(8n^2) \geq \varepsilon$. À chaque passage, on augmente n de 1.

```
1 def rang_precision(epsilon):
2     n = 1
3     while 1 / (8 * n**2) >= epsilon:
4         n = n + 1
5     return n
6
7 print(rang_precision(10**(-6)))
```

 Démonstration | Lecture du programme

Lorsque n grandit, $1/(8n^2)$ devient aussi petit que l'on veut ; pour tout $\varepsilon > 0$, la condition de la boucle finit donc par devenir fausse. D'après la question précédente, le programme affiche

354

. Intuition | Ce que le problème nous a appris

Une approximation rigoureuse se construit en trois temps : on **localise** le nombre par des comparaisons exactes, on **transforme l'écart** avec une expression conjuguée, puis on remplace la formule exacte par une **borne simple** utilisable dans un algorithme.

Ici,

$$0 < \frac{1}{2} - d_n = e_n < \frac{1}{8n}.$$

Ainsi, choisir n assez grand rend d_n aussi proche que l'on veut de $1/2$. C'est une première rencontre, entièrement guidée, avec l'idée de limite.

Carte mémoire de la fiche

✂ Méthode | Transformer

Ajouter ou soustraire conserve le sens. Multiplier ou diviser par un nombre positif conserve le sens ; par un nombre négatif, il le renverse.

✂ Méthode | Encadrer

Additionne les bornes pour une somme. Pour une différence : petit moins grand, puis grand moins petit. Pour un produit, surveille les signes.

✂ Méthode | Comparer

$$A - B > 0 \implies A > B.$$

Si $B > 0$,

$$\frac{A}{B} > 1 \implies A > B.$$

⚠ Attention | Le signe décide

Avant toute multiplication ou division, identifie le signe du nombre. Sans ce signe, on ne peut pas savoir si l'ordre est conservé ou renversé.

Fin de la Fiche 4 – Inégalités, comparaisons et variations

Tu sais maintenant comparer exactement, transformer une inégalité et construire un encadrement sans perdre le sens de l'ordre.

Tu as aussi mesuré l'erreur d'une approximation et découvert comment une borne exacte devient une garantie algorithmique.

→ Prochaine fiche : Équations et inéquations du premier degré.