

Équations & inéquations

Premier degré, produit nul & modélisation

Équivalences ■ Solutions ■ Tableaux de signes

$$\boxed{3x + 5 = 20} \xrightarrow{-5 \text{ des deux côtés}} \boxed{3x = 15} \xrightarrow{\div 3 \text{ des deux côtés}} \boxed{x = 5}$$

même équilibre, forme plus lisible

Seconde générale ■ Mathématiques ■ Programme officiel

 Cours complet

 15 exercices

 Problème défi

 Corrigés

Table des matières

1	🔍 Pourquoi étudier les équations et les inéquations ?	3
1.1	Une inconnue, mais pas une devinette	3
1.2	Résoudre, c'est aussi expliquer	3
2	🧠 L'idée avant la formule	3
2.1	Phrase ouverte et ensemble des solutions	3
2.2	Des transformations réversibles	3
2.3	Pour une inéquation, le sens compte	4
3	🔢 Équations du premier degré	4
3.1	Vocabulaire indispensable	4
3.2	Les deux opérations fondamentales	4
3.3	Les trois cas de l'équation générale	5
3.4	Dénominateurs et valeurs interdites	6
4	🔧 Produit nul et équation $x^2 = a$	7
4.1	La propriété du produit nul	7
4.2	Résoudre $x^2 = a$	8
5	≤ Inéquations du premier degré	8
5.1	Les règles de transformation	8
5.2	Cas particuliers	9
5.3	Double inégalité et intersection	9
6	📊 Signe d'une expression, d'un produit ou d'un quotient	10
6.1	Signe de $ax + b$	10
6.2	Produit et quotient de facteurs affines	10
7	🗨️ Modéliser un problème	11
7.1	Du français aux mathématiques	11
7.2	Isoler une lettre dans une formule	12
8	📈 Pour aller plus loin – guidé et facultatif	12
8.1	Une équation avec un paramètre	13
8.2	Distance et valeur absolue	13
8.3	Un mini-algorithme de vérification	13
9	🧰 Boîte à outils et erreurs à éviter	14
10	✍️ Exercices	15
11	🌟 Problème : <i>Le pass culturel solidaire</i> ★★ ★	18
12	✅ Corrigés détaillés	20

1 ? Pourquoi étudier les équations et les inéquations ?

1.1 Une inconnue, mais pas une devinette

Une quantité est souvent inconnue : la longueur d'un terrain, le nombre de trajets possibles avec un budget, l'instant auquel deux tarifs deviennent équivalents. Une **équation** traduit une égalité imposée ; une **inéquation** traduit une contrainte comme « au plus », « au moins » ou « strictement moins de ».

Résoudre ne consiste pas à essayer des nombres au hasard. On transforme la phrase mathématique jusqu'à faire apparaître toutes les valeurs possibles de l'inconnue, et seulement celles-là.

Intuition | La balance

Imagine une balance parfaitement en équilibre. Si tu ajoutes la même masse sur les deux plateaux, elle reste en équilibre. Si tu retires la même masse des deux côtés, elle reste encore en équilibre. Résoudre une équation, c'est rendre progressivement visible la masse cachée sans rompre l'équilibre.

1.2 Résoudre, c'est aussi expliquer

Une réponse comme « $x = 4$ » n'est convaincante que si l'on sait :

- d'où vient le nombre 4 ;
- pourquoi aucune autre valeur ne convient ;
- si toutes les transformations effectuées gardent exactement les mêmes solutions ;
- si les contraintes du problème sont respectées.

Cette fiche apprend donc une méthode générale : **traduire, transformer, conclure et vérifier**.

Attention | Une solution n'est pas toujours un nombre

Une équation peut avoir une solution unique, aucune solution ou une infinité de solutions. Une inéquation a souvent tout un intervalle de solutions. Il faut annoncer l'**ensemble des solutions**.

2 L'idée avant la formule

2.1 Phrase ouverte et ensemble des solutions

L'égalité $3x + 5 = 20$ est une **phrase ouverte** : elle devient vraie ou fausse selon la valeur choisie pour x .

Pour $x = 5$, on obtient $3 \times 5 + 5 = 20$: la phrase est vraie. Pour $x = 4$, on obtient $17 = 20$: elle est fausse. Ainsi 5 est une solution et 4 ne l'est pas.

Définition | Solution et ensemble des solutions

Une **solution** d'une équation ou d'une inéquation est une valeur autorisée de l'inconnue qui rend la phrase vraie. L'ensemble de toutes les solutions se note souvent S .

2.2 Des transformations réversibles

On veut passer d'une phrase compliquée à une phrase simple sans gagner ni perdre de solution. Le symbole $\iff$ signifie « est équivalent à » : les deux phrases ont exactement les mêmes solutions.

« Résoudre, c'est transformer sans perdre les solutions. »

$$3x + 5 = 20 \iff 3x = 15 \iff x = 5.$$

Chaque flèche peut être parcourue dans les deux sens : on a d'abord soustrait 5 aux deux membres, puis divisé les deux membres par $3 \neq 0$.

⚠ Attention | Le symbole $\implies$ n'est pas $\iff$

$P \implies Q$ affirme seulement que si P est vraie, alors Q est vraie. Avec $P \iff Q$, on affirme aussi le retour de Q vers P . Pour résoudre une équation, on recherche autant que possible des équivalences.

2.3 Pour une inéquation, le sens compte

On peut ajouter ou soustraire un même nombre sans changer le sens. En revanche, multiplier ou diviser par un nombre **négatif** renverse l'ordre :

$$-2x < 6 \iff x > -3.$$

Le nombre -3 n'est pas solution car l'inégalité est stricte. On conclut $S =] - 3; +\infty[$.



3 Équations du premier degré

3.1 Vocabulaire indispensable

Dans une équation, les expressions situées à gauche et à droite du signe $=$ sont les deux **membres**. La lettre recherchée est l'**inconnue**.

💡 Exemple | Reconnaître les membres

Dans $4(2x - 1) + 3 = 5x + 11$, le membre de gauche est $4(2x - 1) + 3$ et le membre de droite est $5x + 11$. Avant d'isoler x , il est utile de réduire : $8x - 1 = 5x + 11$.

3.2 Les deux opérations fondamentales

★ Théorème | Transformer une équation

Pour tous réels A , B et k :

$$A = B \text{ si et seulement si } A + k = B + k.$$

Pour tout réel non nul k :

$$A = B \text{ si et seulement si } kA = kB \quad \text{et} \quad A = B \text{ si et seulement si } \frac{A}{k} = \frac{B}{k}.$$

 *Démonstration* | Pourquoi cela conserve-t-il exactement les solutions ?

Si $A = B$, ajouter k aux deux membres donne $A + k = B + k$. Réciproquement, si $A + k = B + k$, soustraire k aux deux membres redonne $A = B$. On a donc bien une équivalence.

Si $k \neq 0$, la multiplication par k est réversible : on peut ensuite diviser par k . Ainsi $A = B$ et $kA = kB$ ont exactement les mêmes solutions. La condition $k \neq 0$ est essentielle : en multipliant n'importe quelle équation par 0, on obtiendrait $0 = 0$ et l'on perdrait toute l'information de départ.

Méthode | Résoudre $ax + b = cx + d$

1. Développe seulement si c'est utile, puis réduis chaque membre.
2. Regroupe les termes en x dans un membre et les nombres dans l'autre.
3. Obtiens une forme $kx = m$.
4. Si $k \neq 0$, divise par k et annonce $S = \{m/k\}$.
5. Si $k = 0$, examine la phrase restante : vraie pour tout x , ou impossible.

Exemple | Une solution unique

$$4(2x - 1) + 3 = 5x + 11$$

$$8x - 1 = 5x + 11$$

$$3x = 12$$

$$x = 4.$$

Donc $S = \{4\}$. Vérification : $4(8 - 1) + 3 = 31$ et $5 \times 4 + 11 = 31$.

3.3 Les trois cas de l'équation générale

Propriété | Bilan pour $ax + b = cx + d$

L'équation est équivalente à $(a - c)x = d - b$.

— Si $a \neq c$, il existe une solution unique :

$$S = \left\{ \frac{d - b}{a - c} \right\}.$$

— Si $a = c$ et $b = d$, l'égalité est toujours vraie : $S = \mathbb{R}$.

— Si $a = c$ et $b \neq d$, l'égalité est impossible : $S = \emptyset$.

 *Démonstration* | Pourquoi seulement trois cas ?

Après regroupement, toute équation de cette forme devient $(a - c)x = d - b$.

Si $a - c \neq 0$, on peut diviser et obtenir une unique valeur. Si $a - c = 0$, le membre de gauche vaut toujours 0 : la phrase est $0 = 0$ lorsque $d - b = 0$, donc vraie pour tout réel ; elle est $0 = k$ avec $k \neq 0$ dans l'autre cas, donc fausse pour tout réel. Ces possibilités couvrent tous les cas.

💡 Exemple | Aucune ou une infinité de solutions

$$3(x + 2) = 3x + 6 \iff 3x + 6 = 3x + 6 \iff 0 = 0.$$

Donc $S = \mathbb{R}$. En revanche,

$$2(x + 1) = 2x + 5 \iff 2 = 5,$$

ce qui est impossible : $S = \emptyset$.

3.4 Dénominateurs et valeurs interdites

Une expression comme $\frac{3}{x-2}$ n'existe pas pour $x = 2$. Avant toute transformation, on détermine donc l'ensemble de définition.

🔧 Méthode | Équation avec des quotients

1. Note toutes les valeurs interdites.
2. Multiplie les deux membres par un dénominateur commun **non nul sur le domaine**.
3. Résous l'équation obtenue.
4. Rejette toute valeur interdite, puis vérifie.

💡 Exemple | Le domaine avant le calcul

Réolvons $\frac{2x+1}{x-3} = 5$. On impose $x \neq 3$. Sur ce domaine, $x - 3 \neq 0$, donc

$$\frac{2x+1}{x-3} = 5 \text{ si et seulement si } 2x+1 = 5(x-3)$$

$$\text{si et seulement si } 2x+1 = 5x-15$$

$$\text{si et seulement si } 16 = 3x$$

$$\text{si et seulement si } x = \frac{16}{3}.$$

Cette valeur est autorisée, donc $S = \{16/3\}$.

⚠ Attention | On ne simplifie pas dans une somme

Dans $\frac{x+3}{x}$, on ne peut pas « barrer les x » : le numérateur est une somme. On peut en revanche écrire $\frac{x+3}{x} = 1 + \frac{3}{x}$ lorsque $x \neq 0$.

4 Produit nul et équation $x^2 = a$

4.1 La propriété du produit nul

★ Théorème | Produit nul

Pour tous réels A et B ,

$$A \times B = 0 \text{ si et seulement si } A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

Plus généralement, un produit de plusieurs facteurs est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul.

 Démonstration | Pourquoi ?

Si $A = 0$ ou $B = 0$, alors $AB = 0$: c'est le sens facile. Réciproquement, supposons $AB = 0$. Si $A = 0$, c'est terminé. Sinon $A \neq 0$ et l'on peut diviser l'égalité $AB = 0$ par A , ce qui donne $B = 0$.

🔧 Méthode | Résoudre une équation produit-nul

1. Ramène tout dans un membre afin d'obtenir $P(x) = 0$.
2. Factorise $P(x)$.
3. Annule chaque facteur et résous les équations obtenues.
4. Réunis toutes les solutions.

💡 Exemple | Ne pas développer trop vite

$$(3x - 2)(x + 5) = 0 \text{ si et seulement si } 3x - 2 = 0 \text{ ou } x + 5 = 0 \text{ si et seulement si } x = \frac{2}{3} \text{ ou } x = -5.$$

Ainsi $S = \{-5; 2/3\}$.

⚠ Attention | Le produit doit être à droite de zéro

De $(x - 1)(x + 4) = 6$, on ne peut pas conclure qu'un facteur vaut 6 ou 0. La propriété s'applique uniquement lorsque le produit est égal à 0.

4.2 Résoudre $x^2 = a$

✓ Propriété | Les trois cas

Pour un réel a :

- si $a < 0$, $S = \emptyset$;
- si $a = 0$, $S = \{0\}$;
- si $a > 0$, $S = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$.

Démonstration | Pourquoi y a-t-il deux solutions lorsque $a > 0$?

Un carré est toujours positif ou nul ; il ne peut donc pas valoir un nombre négatif. Si $a \geq 0$, l'identité remarquable donne

$$x^2 - a = x^2 - (\sqrt{a})^2 = (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}).$$

Ainsi

$$x^2 = a \text{ si et seulement si } (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0 \text{ si et seulement si } x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}.$$

Pour $a = 0$, ces deux valeurs coïncident et donnent seulement $x = 0$.

5 ≤ Inéquations du premier degré

5.1 Les règles de transformation

★ Théorème | Transformer une inéquation

Pour tous réels A , B et k :

$$A < B \text{ si et seulement si } A + k < B + k.$$

Si $k > 0$,

$$A < B \text{ si et seulement si } kA < kB.$$

Si $k < 0$,

$$A < B \text{ si et seulement si } kA > kB.$$

Les mêmes règles valent pour $\leq$, $>$ et $\geq$.

Démonstration | Pourquoi le sens s'inverse-t-il avec un nombre négatif ?

Supposons $A < B$ et $k < 0$. Alors $B - A > 0$ et $-k > 0$. Leur produit est positif :

$$(-k)(B - A) > 0.$$

En développant, $kA - kB > 0$, donc $kA > kB$. Le raisonnement est réversible car $k \neq 0$, d'où l'équivalence.

✂ Méthode | Résoudre $ax + b \leq cx + d$

Regroupe les termes en x , puis les nombres. Lorsque tu arrives à $kx \leq m$:

- si $k > 0$, divise sans changer le sens ;
- si $k < 0$, divise et renverse le sens ;
- si $k = 0$, décide si l'inégalité numérique restante est toujours vraie ou toujours fausse.

Termine par un intervalle et, si possible, une droite graduée.

💡 Exemple | Un coefficient négatif

$$\begin{aligned} 5 - 3x &\leq 17 \\ -3x &\leq 12 \\ x &\geq -4. \end{aligned}$$

La dernière flèche renverse le sens car on divise par $-3 < 0$. Ainsi

$$S = [-4; +\infty[.$$

Le crochet est fermé en -4 car l'égalité est autorisée.

5.2 Cas particuliers

💡 Exemple | Tous les réels ou aucun réel

$$2x + 1 < 2x + 5 \text{ si et seulement si } 1 < 5.$$

La dernière phrase est toujours vraie, donc $S = \mathbb{R}$. En revanche,

$$4x - 3 \geq 4x + 2 \text{ si et seulement si } -3 \geq 2$$

est toujours fausse, donc $S = \emptyset$.

5.3 Double inégalité et intersection

La phrase $-2 \leq 3x + 1 < 7$ impose deux conditions simultanées :

$$-2 \leq 3x + 1 \quad \text{et} \quad 3x + 1 < 7.$$

On peut ici transformer les trois membres en même temps :

$$-2 \leq 3x + 1 < 7 \text{ si et seulement si } -3 \leq 3x < 6 \text{ si et seulement si } -1 \leq x < 2.$$

Donc $S = [-1; 2[.$

⚠ Attention | « Et » signifie intersection

Une valeur doit satisfaire les deux contraintes. On garde donc leur partie commune. Par exemple, $x \geq -1$ et $x < 2$ donnent $[-1; +\infty[\cap]-\infty; 2[= [-1; 2[$.

6 Signe d'une expression, d'un produit ou d'un quotient

6.1 Signe de $ax + b$

Supposons $a \neq 0$ et posons $\alpha = -b/a$, l'unique solution de $ax + b = 0$.

★ Théorème | Signe d'une expression affine

L'expression $ax + b$ s'annule en $\alpha = -b/a$ et a :

- le signe opposé à celui de a lorsque $x < \alpha$;
- le signe de a lorsque $x > \alpha$.

On peut retenir : « signe de a à droite de la racine ».

Démonstration | Factoriser autour de la racine

Puisque $\alpha = -b/a$, on a $b = -a\alpha$. Donc

$$ax + b = ax - a\alpha = a(x - \alpha).$$

Si $x < \alpha$, alors $x - \alpha < 0$ et le produit $a(x - \alpha)$ a le signe opposé à a . Si $x > \alpha$, le facteur $x - \alpha$ est positif et le produit a le signe de a .

Exemple | Tableau de signe de $-2x + 6$

La racine est 3 et le coefficient -2 est négatif. Le signe est donc positif à gauche de 3 et négatif à droite.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-2x + 6$	+	0	-

Ainsi $-2x + 6 \geq 0$ pour $x \in]-\infty; 3]$.

6.2 Produit et quotient de facteurs affines

Pour résoudre $(2x - 1)(x + 3) \leq 0$, on repère les valeurs qui annulent les facteurs : -3 et $1/2$. Puis on combine les signes.

x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x - 1$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$
produit	$+$	0	$-$	$+$

Le produit est négatif ou nul entre les deux racines :

$$(2x - 1)(x + 3) \leq 0 \text{ si et seulement si } x \in [-3; 1/2].$$

✂ Méthode | Tableau de signes complet

1. Factorise l'expression.
2. Trouve les zéros de chaque facteur et les valeurs interdites des dénominateurs.
3. Range toutes ces valeurs sur la première ligne.
4. Complète le signe de chaque facteur, puis combine les signes.
5. Lis les colonnes demandées. Inclus les zéros pour $\leq$ ou $\geq$, mais jamais une valeur interdite.

⚠ Attention | Zéro autorisé, dénominateur nul interdit

Dans $\frac{x-4}{2x+1}$, la valeur 4 annule le numérateur : le quotient vaut 0. En revanche $-1/2$ annule le dénominateur : l'expression n'existe pas et cette valeur est toujours exclue.

7 🧠 Modéliser un problème

7.1 Du français aux mathématiques

Expression	Traduction possible
au plus A	$x \leq A$
au moins A	$x \geq A$
strictement moins de A	$x < A$
strictement plus de A	$x > A$
p euros fixes puis q par unité	$p + qx$
deux quantités égales	une équation
une contrainte de budget	une inéquation

Méthode | Les cinq lignes d'une modélisation

1. **Choisir l'inconnue** et préciser son unité ainsi que ses valeurs possibles.
2. **Exprimer** toutes les quantités avec cette inconnue.
3. **Traduire** la condition par une équation ou une inéquation.
4. **Résoudre** avec des équivalences justifiées.
5. **Interpréter** dans le contexte : entier, positif, durée, prix, etc.

Exemple | Budget et nombre entier

Une carte coûte 8 euros, puis chaque entrée coûte 3,50 euros. Avec 30 euros, combien d'entrées peut-on acheter au maximum ? Posons $n \in \mathbb{N}$ le nombre d'entrées.

$$8 + 3,5n \leq 30 \text{ si et seulement si } 3,5n \leq 22 \text{ si et seulement si } n \leq \frac{44}{7} \approx 6,29.$$

Comme n est entier, le maximum est $\boxed{6}$ entrées. La réponse n'est pas 6,29 entrées : l'interprétation finale est indispensable.

7.2 Isoler une lettre dans une formule

La même logique permet d'exprimer une grandeur en fonction des autres.

Exemple | Exprimer y dans $ax + by = c$

Si $b \neq 0$,

$$ax + by = c \text{ si et seulement si } by = c - ax \text{ si et seulement si } \boxed{y = \frac{c - ax}{b}}.$$

On ne cherche pas une valeur numérique : on isole simplement la lettre demandée.

Exemple | Une formule géométrique

L'aire d'un trapèze est $A = \frac{(B + b)h}{2}$. Si $B + b \neq 0$, alors

$$2A = (B + b)h \text{ si et seulement si } \boxed{h = \frac{2A}{B + b}}.$$

Dans une figure non aplatie, $B + b > 0$, donc la division est bien autorisée.

8 Pour aller plus loin – guidé et facultatif

Cette partie n'est pas nécessaire pour maîtriser le socle officiel. Elle montre cependant que les mêmes idées permettent d'aborder des questions plus riches, sans formule magique.

8.1 Une équation avec un paramètre

Dans $(m-2)x = m+1$, la lettre x est l'inconnue et m est un **paramètre** : il désigne un nombre fixé, mais que l'on ne connaît pas encore.

✂ Méthode | Le réflexe : puis-je diviser ?

Avant de diviser par $m-2$, il faut distinguer deux cas.

- Si $m \neq 2$, alors $m-2 \neq 0$ et l'unique solution est $x = \frac{m+1}{m-2}$.
- Si $m = 2$, l'équation devient $0 \times x = 3$, donc $0 = 3$: il n'y a aucune solution.

Le paramètre ne rend pas le calcul mystérieux : il oblige seulement à examiner le cas où un diviseur potentiel s'annule.

8.2 Distance et valeur absolue

L'équation $|x - a| = r$ signifie que la distance entre x et a vaut r .

✓ Propriété | Deux points à distance r

Pour $r \geq 0$,

$$|x - a| = r \text{ si et seulement si } x = a - r \text{ ou } x = a + r.$$

Si $r < 0$, l'équation n'a aucune solution car une distance ne peut pas être négative.

✎ Démonstration | Lecture sur la droite réelle

Les deux points situés à la distance r du centre a sont celui obtenu en se déplaçant de r unités vers la gauche, d'abscisse $a - r$, et celui obtenu en se déplaçant de r unités vers la droite, d'abscisse $a + r$. Pour $r = 0$, les deux points se confondent en a .

💡 Exemple | Une équation de distance

$$|2x - 3| = 5 \text{ si et seulement si } 2x - 3 = -5 \text{ ou } 2x - 3 = 5 \text{ si et seulement si } x = -1 \text{ ou } x = 4.$$

$$\text{Donc } S = \{-1; 4\}.$$

8.3 Un mini-algorithme de vérification

Un programme peut tester une valeur, mais il ne remplace pas la preuve que toutes les solutions ont été trouvées.

```
1 def est_solution_equation(x):  
2     return 4 * (2*x - 1) + 3 == 5*x + 11  
3  
4 for valeur in range(-2, 8):  
5     if est_solution_equation(valeur):  
6         print(valeur)
```

Le programme affiche 4. Cela vérifie la solution parmi les entiers testés ; le raisonnement algébrique prouve, lui, que 4 est l'unique solution réelle.

9 Boîte à outils et erreurs à éviter

Méthode | Équation

Développe si utile, réduis, regroupe les x , regroupe les nombres, puis divise seulement par un nombre non nul.

Méthode | Quotient

Commence par les valeurs interdites. Dans la réponse finale, un dénominateur ne vaut jamais zéro.

Méthode | Inéquation

Même stratégie, mais note le signe du coefficient avant de diviser. S'il est négatif, renverse le sens.

Attention | Changer de membre

Un terme ne « change pas de signe parce qu'il traverse le signe $=$ ». On ajoute son opposé aux deux membres. La règle raccourcie vient de cette vraie opération.

Méthode | Produit nul

Obtiens d'abord un produit égal à zéro. Ensuite seulement, annule chaque facteur.

Attention | Diviser par l'inconnue

Diviser par x sans savoir si $x = 0$ peut faire disparaître une solution. Par exemple $x(x - 3) = 0$ a deux solutions ; diviser par x ferait perdre $x = 0$.

Intuition | Le protocole universel

Domaine : quelles valeurs sont autorisées ?

Conclusion : ai-je annoncé l'ensemble S ?

Transformation : chaque étape est-elle réversible ?

Contrôle : les solutions vérifient-elles la phrase de départ ?

10 Exercices

Pour chaque exercice, rédige les transformations et termine par l'ensemble des solutions. Les étoiles indiquent le niveau de difficulté ; elles ne disent jamais que l'exercice est inaccessible.

Exercice 1 : Tester une solution

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en montrant le remplacement de x .

- a) 4 est solution de $3x - 5 = 7$.
- b) -2 est solution de $x^2 - 3x = 10$.
- c) $1/2$ est solution de $4x + 1 < 3$.
- d) 3 est solution de $\frac{x+1}{x-1} = 2$.

Exercice 2 : Premiers équilibres

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- a) $x + 7 = 19$,
- b) $5x = -35$,
- c) $3x - 8 = 13$,
- d) $7 - 2x = 15$.

Exercice 3 : L'inconnue dans les deux membres

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- a) $5x + 7 = 2x + 19$,
- b) $9 - 4x = 3x + 2$,
- c) $3(x - 2) + 5 = 2(x + 4)$,
- d) $\frac{2x - 1}{3} = \frac{x + 5}{2}$.

Exercice 4 : Combien de solutions ?

Résoudre et préciser si l'équation possède zéro, une ou une infinité de solutions :

- a) $4(x + 2) = 4x + 8$,
- b) $3(x - 1) = 3x + 5$,
- c) $2(3x - 4) + 1 = 6x - 7$,
- d) $5(x + 1) - 2x = 3x + 2$.

Exercice 5 : Quotients et valeurs interdites

Résoudre dans $\mathbb{R}$ après avoir indiqué les valeurs interdites :

- a) $\frac{x+2}{x-1} = 3$,
- b) $\frac{5}{2x+1} = 1$,
- c) $\frac{x}{x+2} = \frac{3}{4}$,
- d) $\frac{2x-3}{x+1} = 2$.

Exercice 6 : Carrés

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- a) $x^2 = 49$,
- b) $x^2 = 11$,
- c) $x^2 = -4$,
- d) $(2x - 1)^2 = 25$.

Exercice 7 ★★☆☆ : **Produit nul**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ sans développer lorsque la forme est déjà factorisée :

- a) $(x - 6)(2x + 3) = 0$,
- b) $x(5x - 2)(x + 4) = 0$,
- c) $(x + 3)^2 - 16 = 0$,
- d) $(3x - 1)(x + 2) = (3x - 1)(2x - 5)$.

Exercice 8 ★☆☆☆ : **Premières inéquations**

Résoudre puis donner la réponse sous forme d'intervalle :

- a) $x + 4 < 9$,
- b) $3x \geq -12$,
- c) $-5x \leq 20$,
- d) $7 - 2x > 1$.

Exercice 9 ★★☆☆ : **Inconnue dans les deux membres**

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- a) $5x - 7 \leq 2x + 8$,
- b) $4 - 3x < 7x + 9$,
- c) $2(x - 1) + 3 \geq 5(x + 2)$,
- d) $6(x - 2) - 4x > 2(x + 1) - 15$.

Exercice 10 ★★☆☆ : **Deux contraintes simultanées**

Résoudre :

- a) $-5 \leq 2x + 1 < 9$;
- b) $3x - 2 > 7$ et $5x + 4 \leq 29$;
- c) $x + 3 \leq 1$ et $2x - 5 > -11$;
- d) $4x + 1 \geq 13$ et $2x - 7 < -3$.

Représenter chaque ensemble de solutions sur une droite graduée.

Exercice 11 ★★☆☆ : **Signe d'une expression affine**

Pour chaque expression, déterminer sa racine, construire son tableau de signe, puis résoudre l'inéquation proposée.

- a) $A(x) = 3x - 12$ et $A(x) \leq 0$;
- b) $B(x) = -5x - 10$ et $B(x) > 0$;
- c) $C(x) = 7 - 2x$ et $C(x) \geq 0$.

Exercice 12 ★★☆☆ : **Produits et quotients**

Résoudre à l'aide d'un tableau de signes :

a) $(x - 2)(x + 5) \geq 0,$

b) $(3x + 6)(4 - x) < 0,$

c) $\frac{x - 1}{x + 3} \leq 0,$

d) $\frac{(2x - 1)(x + 4)}{x - 3} > 0.$

Exercice 13 ★★☆☆ : **Isoler une variable**

Exprimer la lettre demandée en fonction des autres. Préciser la condition qui autorise la division.

a) $P = 2L + 2\ell$: exprimer L .

b) $v = v_0 + at$: exprimer t .

c) $R = \frac{U}{I}$: exprimer I .

d) $ax + by = c$: exprimer x .

Exercice 14 ★★☆☆ : **Équation à paramètre – pour aller plus loin**

Selon les valeurs du réel m , résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(m - 1)x = 2m - 2.$$

On distinguera soigneusement le cas $m = 1$ du cas $m \neq 1$.

Puis résoudre, selon $p \in \mathbb{R}$,

$$(p + 2)x = p^2 - 4.$$

Exercice 15 ★★☆☆ : **Modéliser et interpréter**

Un service de location propose deux tarifs pour une journée :

— tarif A : 18 euros, puis 0,22 euro par kilomètre ;

— tarif B : 30 euros, puis 0,10 euro par kilomètre.

On note $x \geq 0$ le nombre de kilomètres parcourus.

1. Exprimer les deux prix $A(x)$ et $B(x)$.
2. Pour quelle distance les prix sont-ils égaux ?
3. Pour quelles distances le tarif B est-il moins cher ou de même prix que le tarif A ?
4. Une personne dispose de 47 euros et choisit le tarif B. Quelle distance entière maximale peut-elle parcourir ?
5. Expliquer pourquoi une distance négative trouvée par un calcul devrait être rejetée.

11 🦋 Problème : *Le pass culturel solidaire* ★★ ★

🧠 Intuition | Le défi

Une association veut proposer trois pass pour que chacun puisse participer, quel que soit son budget. Le choix le moins cher dépend du nombre d'activités. Tu vas construire une décision complète, la justifier par des inéquations, puis étudier l'effet d'une aide financière. Toutes les questions utilisent seulement les outils de cette fiche.

On note $x \geq 0$ le nombre d'activités effectuées pendant l'année. Les prix, en euros, sont :

$$S(x) = 4x, \quad M(x) = 15 + 2,5x, \quad L(x) = 45 + x.$$

Partie A – Comprendre les trois offres

1. Pour chaque offre, expliquer le rôle du terme fixe et du coefficient de x .
2. Calculer les trois prix pour $x = 0$, $x = 8$, $x = 16$ et $x = 24$. Organiser les résultats dans un tableau.
3. Résoudre les trois équations $S(x) = M(x)$, $S(x) = L(x)$ et $M(x) = L(x)$.
4. Interpréter concrètement chaque solution.

Partie B – Choisir sans se tromper

5. Résoudre $S(x) \leq M(x)$ puis $S(x) \leq L(x)$.
6. En déduire que l'offre S est la moins chère pour $0 \leq x \leq 10$.
7. Résoudre $M(x) \leq S(x)$ puis $M(x) \leq L(x)$.
8. En déduire que l'offre M est la moins chère pour $10 \leq x \leq 20$.
9. Prouver que l'offre L est la moins chère pour $x \geq 20$.
10. Résumer la meilleure offre sur une droite graduée. Que se passe-t-il exactement pour $x = 10$ et $x = 20$?

Partie C – Tenir compte d'un budget

11. Avec un budget de 54 euros, combien d'activités entières peut-on faire au maximum avec chaque offre ?
12. Parmi ces trois possibilités, laquelle permet le plus grand nombre d'activités ? Vérifier que ce choix correspond bien aux intervalles obtenus dans la partie B.

Partie D – Coût moyen

Pour $x > 0$, le coût moyen par activité de l'offre M est

$$C_M(x) = \frac{15 + 2,5x}{x}.$$

13. Résoudre $C_M(x) = 3$. Interpréter la solution.
14. Résoudre $C_M(x) \leq 3,25$ et donner le plus petit nombre entier d'activités correspondant.

Partie E – Une aide pour rendre le pass L accessible

Une subvention de p euros, avec $p \geq 0$, transforme le prix du pass L en

$$L_p(x) = 45 - p + x.$$

L'association voudrait que ce pass soit moins cher ou de même prix que les deux autres dès 12 activités.

15. Traduire cette volonté par deux inégalités devant être vraies pour tout $x \geq 12$.
16. Montrer que, pour comparer L_p à S sur $[12; +\infty[$, la contrainte la plus exigeante se rencontre en $x = 12$. Faire de même pour la comparaison avec M.
17. Déterminer la plus petite valeur de p qui réalise l'objectif.
18. Pour cette valeur minimale, préciser les éventuelles égalités de prix et expliquer ce que change la subvention.

Partie F – Traduire la décision en Python

Compléter mentalement puis expliquer le programme suivant, qui renvoie le nom d'une offre la moins chère. En cas d'égalité, il peut renvoyer l'une des offres ex aequo.

```
1 def meilleur_pass(x):
2     prix_s = 4*x
3     prix_m = 15 + 2.5*x
4     prix_l = 45 + x
5     minimum = min(prix_s, prix_m, prix_l)
6     if prix_s == minimum:
7         return "S"
8     elif prix_m == minimum:
9         return "M"
10    else:
11        return "L"
12
13 for x in range(0, 31):
14     print(x, meilleur_pass(x))
```

19. Prévoir les changements de valeur affichée sans exécuter le programme.
20. Pourquoi cette exploration numérique ne remplace-t-elle pas les preuves de la partie B ?

12 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Remplacer sans modifier l'expression*

a) Pour $x = 4$, le membre de gauche vaut

$$3 \times 4 - 5 = 12 - 5 = 7.$$

Il est égal au membre de droite : l'affirmation est **vraie**.

b) Pour $x = -2$,

$$(-2)^2 - 3 \times (-2) = 4 + 6 = 10.$$

L'affirmation est **vraie**. Les parenthèses autour de -2 sont indispensables lorsque l'on calcule son carré.

c) Pour $x = 1/2$,

$$4 \times \frac{1}{2} + 1 = 3.$$

Or l'inéquation demande $3 < 3$, ce qui est faux. L'affirmation est **fausse** : une borne stricte n'accepte pas l'égalité.

d) Pour $x = 3$, le dénominateur vaut $2 \neq 0$ et

$$\frac{3+1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2.$$

L'affirmation est **vraie**.

Corrigé 2

 *Démonstration / Isoler l'inconnue*

a)

$$x + 7 = 19 \text{ si et seulement si } x = 12, \quad \boxed{S = \{12\}}.$$

b)

$$5x = -35 \text{ si et seulement si } x = -7, \quad \boxed{S = \{-7\}}.$$

c)

$$3x - 8 = 13 \text{ si et seulement si } 3x = 21 \text{ si et seulement si } x = 7, \quad \boxed{S = \{7\}}.$$

d)

$$7 - 2x = 15 \text{ si et seulement si } -2x = 8 \text{ si et seulement si } x = -4, \quad \boxed{S = \{-4\}}.$$

Dans la dernière équation, diviser une égalité par -2 ne pose aucun problème : le renversement du sens concerne les inégalités, pas les égalités.

Corrigé 3

 *Démonstration / Regrouper les termes de même nature*

a)

$$5x + 7 = 2x + 19 \text{ si et seulement si } 3x = 12 \text{ si et seulement si } x = 4, \quad S = \{4\}.$$

b)

$$9 - 4x = 3x + 2 \text{ si et seulement si } 7 = 7x \text{ si et seulement si } x = 1, \quad S = \{1\}.$$

c) On développe d'abord :

$$3(x - 2) + 5 = 2(x + 4) \text{ si et seulement si } 3x - 1 = 2x + 8 \text{ si et seulement si } x = 9.$$

Donc $S = \{9\}$.

d) On multiplie les deux membres par 6, ou directement par les dénominateurs 3 et 2 :

$$\frac{2x - 1}{3} = \frac{x + 5}{2} \text{ si et seulement si } 2(2x - 1) = 3(x + 5)$$

$$\text{si et seulement si } 4x - 2 = 3x + 15$$

$$\text{si et seulement si } x = 17.$$

Ainsi $S = \{17\}$.

Corrigé 4

 *Démonstration / Lire la phrase finale*

a)

$$4(x + 2) = 4x + 8 \text{ si et seulement si } 4x + 8 = 4x + 8 \text{ si et seulement si } 0 = 0.$$

Cette phrase est vraie pour tout réel : $S = \mathbb{R}$.

b)

$$3(x - 1) = 3x + 5 \text{ si et seulement si } 3x - 3 = 3x + 5 \text{ si et seulement si } -3 = 5.$$

Cette phrase est impossible : $S = \emptyset$.

c)

$$2(3x - 4) + 1 = 6x - 7 \text{ si et seulement si } 6x - 7 = 6x - 7 \text{ si et seulement si } 0 = 0.$$

Donc $S = \mathbb{R}$.

d)

$$5(x + 1) - 2x = 3x + 2 \text{ si et seulement si } 3x + 5 = 3x + 2 \text{ si et seulement si } 5 = 2.$$

Donc $S = \emptyset$.

Corrigé 5

 Démonstration / Domaine, calcul, contrôle

a) La valeur interdite est 1. Pour $x \neq 1$,

$$\frac{x+2}{x-1} = 3 \text{ si et seulement si } x+2 = 3x-3 \text{ si et seulement si } 5 = 2x \text{ si et seulement si } x = \frac{5}{2}.$$

La valeur $5/2$ est autorisée : $S = \{5/2\}$.

b) La valeur interdite est $-1/2$. Pour $x \neq -1/2$,

$$\frac{5}{2x+1} = 1 \text{ si et seulement si } 5 = 2x+1 \text{ si et seulement si } x = 2.$$

Donc $S = \{2\}$.

c) La valeur interdite est -2 . Pour $x \neq -2$,

$$\frac{x}{x+2} = \frac{3}{4} \text{ si et seulement si } 4x = 3(x+2) \text{ si et seulement si } 4x = 3x+6 \text{ si et seulement si } x = 6.$$

Donc $S = \{6\}$.

d) La valeur interdite est -1 . Pour $x \neq -1$,

$$\frac{2x-3}{x+1} = 2 \text{ si et seulement si } 2x-3 = 2x+2 \text{ si et seulement si } -3 = 2.$$

Cette dernière phrase est impossible : $S = \emptyset$.

Corrigé 6

 Démonstration / Distinguer le signe du second membre

a) Comme $49 = 7^2$,

$$x^2 = 49 \text{ si et seulement si } x = -7 \text{ ou } x = 7, \quad S = \{-7; 7\}.$$

b) Comme $11 > 0$,

$$S = \{-\sqrt{11}; \sqrt{11}\}.$$

c) Un carré réel ne peut pas être négatif : $S = \emptyset$.

d) Posons provisoirement $X = 2x - 1$. Alors $X^2 = 25$, donc $X = -5$ ou $X = 5$:

$$2x - 1 = -5 \text{ ou } 2x - 1 = 5 \text{ si et seulement si } x = -2 \text{ ou } x = 3.$$

Ainsi $S = \{-2; 3\}$.

Corrigé 7

 Démonstration / Faire apparaître un produit nul

a)

$$(x - 6)(2x + 3) = 0 \text{ si et seulement si } x - 6 = 0 \text{ ou } 2x + 3 = 0.$$

Donc $S = \{-3/2; 6\}$.

b)

$$x(5x - 2)(x + 4) = 0 \text{ si et seulement si } x = 0 \text{ ou } 5x - 2 = 0 \text{ ou } x + 4 = 0.$$

Ainsi $S = \{-4; 0; 2/5\}$.

c) On reconnaît une différence de deux carrés :

$$(x + 3)^2 - 16 = (x + 3 - 4)(x + 3 + 4) = (x - 1)(x + 7).$$

Donc $S = \{-7; 1\}$.

d) On ramène tout dans le membre de gauche et on conserve le facteur commun :

$$\begin{aligned} (3x - 1)(x + 2) &= (3x - 1)(2x - 5) \\ (3x - 1)[(x + 2) - (2x - 5)] &= 0 \\ (3x - 1)(7 - x) &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi $3x - 1 = 0$ ou $7 - x = 0$, donc $S = \{1/3; 7\}$.

Corrigé 8

 Démonstration / Surveiller le signe du coefficient

a)

$$x + 4 < 9 \text{ si et seulement si } x < 5, \quad S =] - \infty; 5[.$$

b)

$$3x \geq -12 \text{ si et seulement si } x \geq -4, \quad S = [-4; +\infty[.$$

c) On divise par $-5 < 0$, donc on renverse le sens :

$$-5x \leq 20 \text{ si et seulement si } x \geq -4, \quad S = [-4; +\infty[.$$

d)

$$7 - 2x > 1 \text{ si et seulement si } -2x > -6 \text{ si et seulement si } x < 3.$$

Donc $S =] - \infty; 3[.$

Corrigé 9

 Démonstration / Une transformation à la fois

a)

$$5x - 7 \leq 2x + 8 \text{ si et seulement si } 3x \leq 15 \text{ si et seulement si } x \leq 5, \quad S =] - \infty; 5].$$

b)

$$4 - 3x < 7x + 9 \text{ si et seulement si } -10x < 5 \text{ si et seulement si } x > -\frac{1}{2}.$$

Le sens s'inverse lors de la division par -10 , donc $S =] - 1/2; +\infty[$.

c)

$$2(x - 1) + 3 \geq 5(x + 2)$$

$$2x + 1 \geq 5x + 10$$

$$-9 \geq 3x$$

$$x \leq -3.$$

Ainsi $S =] - \infty; -3]$.

d)

$$6(x - 2) - 4x > 2(x + 1) - 15$$

$$2x - 12 > 2x - 13$$

$$-12 > -13.$$

La dernière phrase est toujours vraie : $S = \mathbb{R}$.

Corrigé 10

 Démonstration / Chercher la partie commune

a)

$$-5 \leq 2x + 1 < 9 \text{ si et seulement si } -6 \leq 2x < 8 \text{ si et seulement si } -3 \leq x < 4.$$

Donc $S = [-3; 4[$.

b) La première contrainte donne $3x > 9$, donc $x > 3$. La seconde donne $5x \leq 25$, donc $x \leq 5$. Leur intersection est $S =]3; 5]$.

c) On obtient $x \leq -2$ et

$$2x - 5 > -11 \text{ si et seulement si } 2x > -6 \text{ si et seulement si } x > -3.$$

La partie commune est $S =] - 3; -2]$.

d) Les deux contraintes donnent $x \geq 3$ et

$$2x - 7 < -3 \text{ si et seulement si } 2x < 4 \text{ si et seulement si } x < 2.$$

Aucun réel ne peut être simultanément supérieur ou égal à 3 et strictement inférieur à 2 : $S = \emptyset$.
 Sur une droite graduée, un crochet fermé correspond à un point inclus, un crochet ouvert à un point exclu ; le dernier cas ne contient aucun point.

Corrigé 11

 *Démonstration / Signe de a à droite de la racine*

a) La racine de $3x - 12$ est 4. Comme le coefficient 3 est positif, l'expression est négative avant 4, nulle en 4, positive après 4. Ainsi

$$3x - 12 \leq 0 \text{ si et seulement si } x \leq 4, \quad S =] - \infty; 4].$$

b) La racine de $-5x - 10$ est -2 . Le coefficient est négatif : le signe est positif avant la racine et négatif après. Donc

$$-5x - 10 > 0 \text{ si et seulement si } x < -2, \quad S =] - \infty; -2[.$$

c) La racine de $7 - 2x$ est $7/2$. Le coefficient est négatif : l'expression est positive avant $7/2$, nulle en $7/2$, négative après. Donc

$$7 - 2x \geq 0 \text{ si et seulement si } x \leq \frac{7}{2}, \quad S =] - \infty; 7/2].$$

Corrigé 12

 *Démonstration / Ranger d'abord toutes les valeurs critiques*

a) Les racines sont -5 et 2 . Le produit de deux facteurs de coefficient directeur positif est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles. Comme on demande ≥ 0 , les racines sont incluses :

$$S =] - \infty; -5] \cup [2; +\infty[.$$

b) Les racines sont -2 et 4 . Pour $x < -2$, le premier facteur est négatif et le second positif : le produit est négatif. Entre -2 et 4 , les deux sont positifs. Après 4 , leurs signes sont opposés. L'inégalité est stricte :

$$S =] - \infty; -2[\cup]4; +\infty[.$$

c) La valeur -3 est interdite et le numérateur s'annule en 1 . Le quotient est positif sur $] - \infty; -3[$, négatif sur $] -3; 1[$, nul en 1 , puis positif. Ainsi

$$S =] -3; 1].$$

Le point -3 reste exclu, même si le signe recherché autorise l'égalité.

d) Les valeurs critiques sont -4 , $1/2$ et la valeur interdite 3 . Le signe du quotient est successivement

$$- \text{ sur }] - \infty; -4[, \quad + \text{ sur }] -4; 1/2[, \quad - \text{ sur }]1/2; 3[, \quad + \text{ sur }]3; +\infty[.$$

Comme l'inégalité est stricte, les zéros sont exclus ; 3 est interdit. Donc

$$S =] - 4; 1/2[\cup] 3; +\infty[.$$

Corrigé 13

 *Démonstration / Effectuer la même opération sur les deux membres*

a)

$$P = 2L + 2\ell \text{ si et seulement si } 2L = P - 2\ell \text{ si et seulement si } L = \frac{P - 2\ell}{2} = \frac{P}{2} - \ell.$$

On divise par la constante $2 \neq 0$.

b)

$$v = v_0 + at \text{ si et seulement si } at = v - v_0.$$

Si $a \neq 0$, alors $t = (v - v_0)/a$.

c) L'écriture initiale impose $I \neq 0$. On a $R = U/I$ si et seulement si $RI = U$. Si $R \neq 0$, alors

$$I = \frac{U}{R},$$

et la valeur obtenue doit respecter $I \neq 0$. Si $R = 0$, on ne peut pas diviser par R : la relation exige alors $U = 0$ et doit être examinée séparément.

d)

$$ax + by = c \text{ si et seulement si } ax = c - by.$$

Si $a \neq 0$, alors $x = (c - by)/a$.

Corrigé 14

 *Démonstration / Ne jamais diviser avant d'avoir traité le cas zéro*

La première équation s'écrit

$$(m - 1)x = 2(m - 1).$$

Si $m \neq 1$, on peut diviser par $m - 1$ et l'on obtient $x = 2$, donc $S = \{2\}$.

Si $m = 1$, l'équation devient $0 \times x = 0$, vraie pour tout réel. Dans ce cas, $S = \mathbb{R}$.

Pour la seconde équation, on factorise le second membre :

$$(p + 2)x = p^2 - 4 = (p - 2)(p + 2).$$

Si $p \neq -2$, on divise par $p + 2$ et l'on obtient $x = p - 2$. Ainsi $S = \{p - 2\}$.

Si $p = -2$, les deux membres valent 0 pour tout x . On a alors $S = \mathbb{R}$.

Le cas $p = 2$ n'est pas exceptionnel pour la division : $p + 2 = 4 \neq 0$, et l'unique solution est simplement $x = 0$.

Corrigé 15

 *Démonstration / Construire puis interpréter le modèle*

1. Pour $x \geq 0$ kilomètres,

$$A(x) = 18 + 0,22x \quad \text{et} \quad B(x) = 30 + 0,10x.$$

2. Les prix sont égaux lorsque

$$18 + 0,22x = 30 + 0,10x$$

$$0,12x = 12$$

$$x = 100.$$

Les deux tarifs coûtent alors 40 euros. La distance cherchée est **100 km**.

3.

$$B(x) \leq A(x) \text{ si et seulement si } 30 + 0,10x \leq 18 + 0,22x$$

$$\text{si et seulement si } 12 \leq 0,12x$$

$$\text{si et seulement si } x \geq 100.$$

En tenant compte de $x \geq 0$, le tarif B est au moins aussi avantageux à partir de **100 km**.

4. Avec le tarif B,

$$30 + 0,10x \leq 47 \text{ si et seulement si } 0,10x \leq 17 \text{ si et seulement si } x \leq 170.$$

La distance entière maximale est donc **170 km**.

5. L'inconnue représente une distance, donc le modèle impose $x \geq 0$. Une solution algébrique négative serait hors du domaine du problème et devrait être rejetée.

Corrigé du problème : Le pass culturel solidaire

Démonstration / Partie A – Comprendre les trois offres

1. Dans $S(x) = 4x$, il n'y a aucun coût fixe et chaque activité ajoute 4 euros. Dans $M(x) = 15 + 2,5x$, l'adhésion fixe coûte 15 euros et chaque activité ajoute 2,50 euros. Dans $L(x) = 45 + x$, le coût fixe est 45 euros et chaque activité supplémentaire ne coûte qu'un euro.

2.

x	0	8	16	24
$S(x)$	0	32	64	96
$M(x)$	15	35	55	75
$L(x)$	45	53	61	69

3. On résout successivement :

$S(x) = M(x)$ si et seulement si $4x = 15 + 2,5x$ si et seulement si $1,5x = 15$,
si et seulement si $x = 10$;

$S(x) = L(x)$ si et seulement si $4x = 45 + x$ si et seulement si $3x = 45$,
si et seulement si $x = 15$;

$M(x) = L(x)$ si et seulement si $15 + 2,5x = 45 + x$ si et seulement si $1,5x = 30$,
si et seulement si $x = 20$.

4. Pour 10 activités, S et M coûtent tous deux 40 euros. Pour 15 activités, S et L coûtent tous deux 60 euros. Pour 20 activités, M et L coûtent tous deux 65 euros. Une égalité entre deux offres ne signifie pas forcément qu'elles sont les moins chères : à $x = 15$, l'offre M coûte seulement 52,50 euros.

Démonstration / Partie B – Choisir sans se tromper

5.

$S(x) \leq M(x)$ si et seulement si $4x \leq 15 + 2,5x$ si et seulement si $x \leq 10$.

De plus,

$S(x) \leq L(x)$ si et seulement si $4x \leq 45 + x$ si et seulement si $x \leq 15$.

6. Pour que S soit la moins chère, les deux inégalités doivent être vraies. Avec $x \geq 0$, leur intersection est

$$[0; 10] \cap [0; 15] = [0; 10].$$

7.

$M(x) \leq S(x)$ si et seulement si $x \geq 10$, $M(x) \leq L(x)$ si et seulement si $x \leq 20$.

8. Les deux conditions sont vraies simultanément pour

$$x \in [10; 20].$$

9.

 $L(x) \leq S(x)$ si et seulement si $x \geq 15$, $L(x) \leq M(x)$ si et seulement si $x \geq 20$.

 Leur intersection avec $x \geq 0$ est $[20; +\infty[$.

10. Le choix peut donc se résumer ainsi :


 Pour $x = 10$, S et M sont ex aequo et moins chères que L. Pour $x = 20$, M et L sont ex aequo et moins chères que S.

Démonstration / Partie C – Tenir compte d'un budget

11. Avec S,

$$4x \leq 54 \text{ si et seulement si } x \leq 13,5.$$

Le nombre d'activités étant entier, le maximum est 13.

Avec M,

$$15 + 2,5x \leq 54 \text{ si et seulement si } 2,5x \leq 39 \text{ si et seulement si } x \leq 15,6.$$

Le maximum entier est 15.

Avec L,

$$45 + x \leq 54 \text{ si et seulement si } x \leq 9.$$

Le maximum entier est 9.

 12. L'offre M permet le plus grand nombre d'activités : $[15]$. Ce résultat est cohérent avec la partie B, car $15 \in [10; 20]$, l'intervalle sur lequel M est la moins chère.

Démonstration / Partie D – Coût moyen

 Le domaine est $x > 0$, car on ne peut ni diviser par zéro ni parler de coût moyen par activité lorsqu'aucune activité n'est effectuée.

 13. Comme $x > 0$, on peut multiplier par x sans ambiguïté :

$$\frac{15 + 2,5x}{x} = 3 \text{ si et seulement si } 15 + 2,5x = 3x$$

$$\text{si et seulement si } 15 = 0,5x$$

$$\text{si et seulement si } x = 30.$$

 Pour 30 activités, le prix total est 90 euros, soit exactement $[3 \text{ euros par activité}]$.

 14. Toujours parce que $x > 0$,

$$\frac{15 + 2,5x}{x} \leq 3,25 \text{ si et seulement si } 15 + 2,5x \leq 3,25x$$

$$\text{si et seulement si } 15 \leq 0,75x$$

$$\text{si et seulement si } x \geq 20.$$

 Le plus petit nombre entier d'activités est donc $[20]$.

 Démonstration / Partie E – Une aide pour rendre le pass L accessible

15. L'objectif est que, pour tout $x \geq 12$,

$$L_p(x) \leq S(x) \quad \text{et} \quad L_p(x) \leq M(x).$$

Autrement dit,

$$45 - p + x \leq 4x \quad \text{et} \quad 45 - p + x \leq 15 + 2,5x.$$

16. La première inégalité s'écrit

$$45 - p \leq 3x.$$

Sur $[12; +\infty[$, le membre $3x$ est le plus petit en $x = 12$. Si l'inégalité est vraie en 12, elle le reste donc pour tout $x \geq 12$. On obtient

$$45 - p \leq 36 \text{ si et seulement si } p \geq 9.$$

La seconde s'écrit

$$30 - p \leq 1,5x.$$

Le membre $1,5x$ est lui aussi le plus petit en $x = 12$. Il faut et il suffit donc que

$$30 - p \leq 18 \text{ si et seulement si } p \geq 12.$$

17. Les deux contraintes doivent être satisfaites :

$$p \geq 9 \quad \text{et} \quad p \geq 12.$$

Leur intersection est $[12; +\infty[$. La plus petite subvention possible est donc

$$p = 12 \text{ euros}.$$

18. Avec cette subvention, $L_{12}(x) = 33 + x$. Pour $x = 12$,

$$L_{12}(12) = 45, \quad M(12) = 45, \quad S(12) = 48.$$

L et M sont ex aequo. Pour $x > 12$, on a

$$L_{12}(x) - M(x) = 18 - 1,5x < 0$$

et

$$L_{12}(x) - S(x) = 33 - 3x < 0.$$

Le pass subventionné L devient alors strictement le moins cher. L'aide avance donc son seuil d'intérêt de 20 à 12 activités.

 Démonstration / Partie F – Traduire la décision en Python

19. D'après la partie B, le programme renvoie S pour les entiers de 0 à 10, puis M pour les entiers de 11 à 20, puis L pour les entiers de 21 à 30. Aux égalités, l'ordre des tests décide : en 10, le premier

test renvoie S ; en 20, le test de M est rencontré avant celui de L. Les changements visibles ont donc lieu entre 10 et 11, puis entre 20 et 21.

20. La boucle ne teste que les entiers de 0 à 30. Elle ne dit rien directement sur $x = 10,4$, sur $x = 100$ ou sur tous les autres réels. Les inéquations prouvent le résultat sur des intervalles entiers de nombres et expliquent pourquoi les seuils sont exactement 10 et 20.



Intuition | Ce que le problème nous a appris

Comparer plusieurs offres demande davantage que résoudre une seule équation. Une équation trouve un **point de rencontre** ; des inéquations déterminent les **zones de choix**. Une contrainte valable « pour tout $x \geq 12$ » peut parfois se ramener au cas le plus exigeant, ici la borne $x = 12$. Enfin, le calcul doit toujours revenir au contexte : un nombre d'activités est entier et un coût moyen exige $x > 0$.

📌 Carte mémoire de la fiche

🔧 Méthode | Équation

Ajoute ou soustrais la même expression aux deux membres. Multiplie ou divise par un nombre non nul. Termine par S et vérifie.

🔧 Méthode | Inéquation

Ajouter conserve le sens. Multiplier ou diviser par un nombre négatif renverse le sens. Donne la réponse sous forme d'intervalle.

🔧 Méthode | Produit et quotient

Produit nul : annule chaque facteur. Quotient : commence par les valeurs interdites, puis utilise un tableau de signes si une inégalité est demandée.

⚠️ Attention | Trois contrôles

Le domaine autorise-t-il la valeur ? Chaque transformation est-elle réversible ? La réponse respecte-t-elle le contexte ?

Fin de la Fiche 5 – Équations et inéquations

Tu sais maintenant transformer une équation sans perdre ses solutions, résoudre une inéquation en surveillant les signes et traduire une situation concrète.

Tu sais aussi traiter un produit nul, un quotient, un tableau de signes et discuter une équation simple avec un paramètre.

→ Prochaine fiche : Fonctions et courbes représentatives.