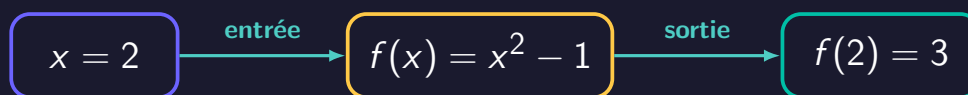


# Fonctions

## Images, antécédents & courbes

Dépendance ■ Représentations ■ Modélisation



une entrée autorisée produit une seule image

Seconde générale ■ Mathématiques ■ Programme officiel

 Cours complet

 15 exercices

 Problème défi

 Corrigés

## Table des matières

|           |                                                       |           |
|-----------|-------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>  | <b>❓ Pourquoi étudier les fonctions ?</b>             | <b>4</b>  |
| 1.1       | Décrire une dépendance . . . . .                      | 4         |
| 1.2       | Pourquoi plusieurs représentations ? . . . . .        | 4         |
| <b>2</b>  | <b>🧠 L'idée avant la formule</b>                      | <b>4</b>  |
| 2.1       | Entrée, règle, sortie . . . . .                       | 4         |
| 2.2       | Remonter la machine . . . . .                         | 5         |
| 2.3       | Le test de la droite verticale . . . . .              | 5         |
| <b>3</b>  | <b>📏 Définir une fonction</b>                         | <b>5</b>  |
| 3.1       | Notation complète . . . . .                           | 5         |
| 3.2       | Ensemble de définition . . . . .                      | 6         |
| 3.3       | Le domaine peut venir de la situation . . . . .       | 6         |
| <b>4</b>  | <b>↔ Calculer une image, chercher un antécédent</b>   | <b>7</b>  |
| 4.1       | Calculer une image . . . . .                          | 7         |
| 4.2       | Chercher un ou plusieurs antécédents . . . . .        | 7         |
| 4.3       | Lire dans un tableau de valeurs . . . . .             | 7         |
| <b>5</b>  | <b>📊 Les représentations d'une fonction</b>           | <b>8</b>  |
| 5.1       | Une même fonction, plusieurs langages . . . . .       | 8         |
| 5.2       | Construire un tableau de valeurs . . . . .            | 8         |
| 5.3       | Fonction continue ou fonction discrète . . . . .      | 8         |
| <b>6</b>  | <b>📈 Courbe représentative et lectures graphiques</b> | <b>9</b>  |
| 6.1       | L'équation $y = f(x)$ . . . . .                       | 9         |
| 6.2       | Lire une image : trajet vertical . . . . .            | 9         |
| 6.3       | Lire des antécédents : trajet horizontal . . . . .    | 9         |
| 6.4       | Résoudre une inéquation graphiquement . . . . .       | 10        |
| 6.5       | Lire le signe d'une fonction . . . . .                | 10        |
| 6.6       | Comparer deux fonctions . . . . .                     | 10        |
| <b>7</b>  | <b>🗺 Modéliser une situation par une fonction</b>     | <b>11</b> |
| 7.1       | Construire le modèle . . . . .                        | 11        |
| 7.2       | Un modèle n'est pas la réalité entière . . . . .      | 11        |
| <b>8</b>  | <b>🔗 Une fonction en Python</b>                       | <b>11</b> |
| 8.1       | Traduire une formule . . . . .                        | 11        |
| 8.2       | Construire un tableau de valeurs . . . . .            | 11        |
| <b>9</b>  | <b>📈 Pour aller plus loin – guidé et facultatif</b>   | <b>12</b> |
| 9.1       | Enchaîner deux fonctions . . . . .                    | 12        |
| 9.2       | Déplacer une courbe verticalement . . . . .           | 12        |
| 9.3       | Déplacer une courbe horizontalement . . . . .         | 13        |
| <b>10</b> | <b>🧰 Boîte à outils et erreurs à éviter</b>           | <b>13</b> |

|    |                                                                                                                                    |    |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 11 |  Exercices                                        | 15 |
| 12 |  Problème : <i>L'arche du jardin partagé</i> ★★ ★ | 19 |
| 13 |  Corrigés détaillés                               | 22 |

# 1 ? Pourquoi étudier les fonctions ?

## 1.1 Décrire une dépendance

Quand le temps passe, une température change. Quand le rayon d'un disque augmente, son aire change. Quand le nombre de kilomètres parcourus augmente, le prix d'une location peut changer. Une **fonction** sert à décrire précisément comment une grandeur dépend d'une autre.

La fonction n'est pas seulement une formule. Elle peut être donnée par une phrase, un tableau, une courbe, un programme ou une expression algébrique. Savoir passer d'une représentation à l'autre est essentiel : chacune montre une partie différente de l'information.

### Intuition | Une machine fiable

Une fonction ressemble à une machine : tu fournis une entrée autorisée, elle applique toujours la même règle et produit une unique sortie. Deux entrées différentes peuvent produire la même sortie, mais une même entrée ne produit jamais deux sorties différentes.

## 1.2 Pourquoi plusieurs représentations ?

Pour la fonction  $f(x) = x^2 - 1$  :

- la **formule** permet de calculer exactement  $f(2) = 3$  ;
- le **tableau** permet de comparer rapidement quelques valeurs ;
- la **courbe** permet de voir globalement les solutions de  $f(x) = 0$  ou le signe de  $f(x)$  ;
- le **programme** permet d'automatiser un grand nombre de calculs.

### Attention | Voir n'est pas toujours prouver

Une lecture graphique donne souvent une valeur approchée. Une résolution algébrique peut donner une valeur exacte. Il faut choisir la méthode adaptée à la question et annoncer clairement si la réponse est exacte ou approchée.

# 2 L'idée avant la formule

## 2.1 Entrée, règle, sortie

Considérons le programme de calcul suivant :



Le nombre choisi est la **variable**  $x$ . Le résultat est son **image** et se note  $f(x)$ . Ici,

$$f(x) = x^2 - 1.$$

## 2.2 Remonter la machine

Chercher l'image de 2, c'est partir de l'entrée :  $f(2) = 2^2 - 1 = 3$ . Chercher les antécédents de 3, c'est partir de la sortie et remonter la machine :

$$f(x) = 3 \text{ si et seulement si } x^2 - 1 = 3 \text{ si et seulement si } x^2 = 4 \text{ si et seulement si } x = -2 \text{ ou } x = 2.$$

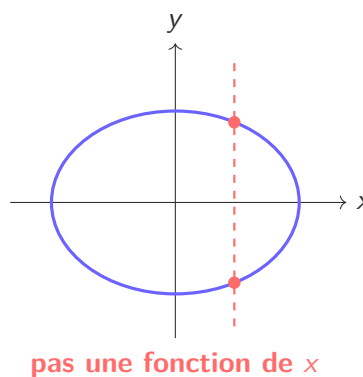
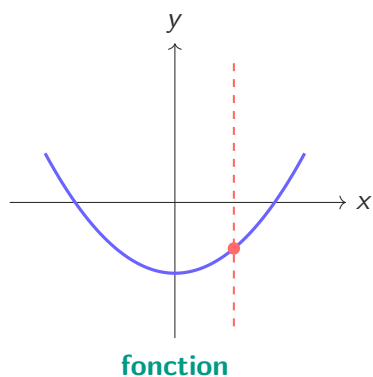
Le nombre 3 a donc deux antécédents par  $f$ .

### ⚠ Attention | Image et antécédent ne sont pas symétriques

Chaque entrée autorisée possède exactement une image. En revanche, une sortie peut avoir aucun antécédent, un seul ou plusieurs. On dit **l'image de  $x$** , mais **un antécédent de  $y$** .

## 2.3 Le test de la droite verticale

Une courbe représente une fonction de  $x$  si chaque droite verticale la rencontre au plus une fois. En effet, fixer une abscisse  $x$  ne doit jamais donner deux ordonnées différentes.



## 3 Définir une fonction

### 3.1 Notation complète

#### 📖 Définition | Fonction

Soit  $D$  un ensemble de nombres. Définir une fonction  $f$  sur  $D$ , c'est associer à chaque nombre  $x \in D$  un unique nombre réel noté  $f(x)$ .

On peut écrire

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

L'ensemble  $D$  est l'**ensemble de définition** de  $f$ .

Le symbole  $\longmapsto$  décrit ce que devient une entrée ; le symbole  $=$  compare deux nombres. Ainsi

$$x \longmapsto x^2 - 1$$

est une règle, tandis que  $f(2) = 3$  est une égalité.

### ⚠ Attention | La fonction n'est pas sa valeur

$f$  désigne la fonction entière ;  $f(x)$  désigne le nombre obtenu pour l'entrée  $x$ . On ne remplace pas  $f$  par une valeur numérique : c'est  $f(2)$ , par exemple, qui vaut 3.

## 3.2 Ensemble de définition

L'ensemble de définition contient exactement les entrées pour lesquelles la règle a un sens.

### ✂ Méthode | Chercher les valeurs autorisées

Examine successivement :

- les dénominateurs, qui doivent être non nuls ;
- les racines carrées, dont le contenu doit être positif ou nul ;
- les contraintes du contexte : une longueur, une durée ou un effectif ne peut pas prendre n'importe quelle valeur ;
- un domaine explicitement donné dans l'énoncé.

### 💡 Exemple | Trois domaines différents

- $f(x) = 3x - 2$  est définie pour tout réel :  $D_f = \mathbb{R}$ .
- $g(x) = \frac{5}{x-4}$  est définie lorsque  $x \neq 4$  :  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ .
- $h(x) = \sqrt{x+3}$  est définie lorsque  $x+3 \geq 0$ , donc  $D_h = [-3; +\infty[$ .

### ✎ Démonstration | Pourquoi ces restrictions ?

Une division par zéro n'est pas définie : aucune multiplication par 0 ne peut redonner 5. De plus, le carré d'un réel est toujours positif ou nul ; il n'existe donc pas de racine carrée réelle d'un nombre strictement négatif.

Ces restrictions ne sont pas des conventions arbitraires : elles garantissent que chaque calcul produit bien un nombre réel.

## 3.3 Le domaine peut venir de la situation

Un rectangle a un périmètre de 20 cm. Si l'un de ses côtés mesure  $x$  cm, l'autre mesure  $10 - x$  cm et son aire vaut

$$A(x) = x(10 - x).$$

La formule est calculable pour tout réel, mais les longueurs imposent  $x \geq 0$  et  $10 - x \geq 0$ . Le domaine pertinent est donc  $[0; 10]$ .

## 4 ⇔ Calculer une image, chercher un antécédent

### 4.1 Calculer une image

#### Méthode | Remplacer toute la variable

Pour calculer  $f(a)$  dans une formule :

1. vérifie que  $a$  appartient au domaine ;
2. remplace **chaque** occurrence de  $x$  par  $(a)$  ;
3. respecte les priorités de calcul ;
4. donne la valeur exacte avant une éventuelle approximation.

#### Exemple | Les parenthèses protègent les signes

Pour  $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ ,

$$\begin{aligned} f(-2) &= 2(-2)^2 - 3(-2) + 1 \\ &= 2 \times 4 + 6 + 1 \\ &= 15. \end{aligned}$$

Ainsi, l'image de  $-2$  par  $f$  est 15.

### 4.2 Chercher un ou plusieurs antécédents

Chercher les antécédents d'un nombre  $k$  revient à résoudre l'équation

$$f(x) = k$$

sur l'ensemble de définition de  $f$ .

#### Exemple | Deux antécédents

Pour  $f(x) = x^2 - 5$ , les antécédents de 4 vérifient

$$x^2 - 5 = 4 \text{ si et seulement si } x^2 = 9 \text{ si et seulement si } x = -3 \text{ ou } x = 3.$$

Le nombre 4 possède donc deux antécédents :  $-3$  et  $3$ .

#### Exemple | Aucun antécédent

Les antécédents de  $-7$  par  $f(x) = x^2 - 5$  vérifieraient  $x^2 = -2$ . Cette équation n'a aucune solution réelle. Le nombre  $-7$  n'a donc aucun antécédent par  $f$ .

### 4.3 Lire dans un tableau de valeurs

Considérons le tableau suivant :

|        |    |    |    |    |    |   |
|--------|----|----|----|----|----|---|
| $x$    | -3 | -2 | 0  | 1  | 2  | 4 |
| $f(x)$ | 5  | 1  | -3 | -4 | -3 | 5 |

On lit  $f(2) = -3$ . Dans les valeurs présentées, 5 a deux antécédents : -3 et 4.

### ⚠ Attention | Un tableau partiel ne dit pas tout

Si le tableau ne présente que quelques valeurs, il permet seulement de conclure pour ces valeurs. D'autres antécédents peuvent exister entre deux colonnes ou hors de la partie affichée.

## 5 Les représentations d'une fonction

### 5.1 Une même fonction, plusieurs langages

La fonction  $f(x) = x^2 - 1$  peut être présentée de quatre manières.

| Représentation | Exemple                                                  |
|----------------|----------------------------------------------------------|
| Phrase         | choisir un nombre, le mettre au carré, puis soustraire 1 |
| Formule        | $f(x) = x^2 - 1$                                         |
| Tableau        | couples comme $(-2; 3)$ , $(0; -1)$ , $(2; 3)$           |
| Courbe         | ensemble des points de coordonnées $(x; x^2 - 1)$        |
| Programme      | une fonction Python qui renvoie <code>x**2 - 1</code>    |

Chaque représentation a ses forces : la formule donne l'exactitude, la courbe donne une vue d'ensemble, le tableau organise des données et le programme automatise les calculs.

### 5.2 Construire un tableau de valeurs

Pour  $f(x) = x^2 - 1$ , on choisit des entrées et on calcule leurs images :

|        |    |    |    |    |   |   |   |
|--------|----|----|----|----|---|---|---|
| $x$    | -3 | -2 | -1 | 0  | 1 | 2 | 3 |
| $f(x)$ | 8  | 3  | 0  | -1 | 0 | 3 | 8 |

Chaque colonne fournit un point de la courbe : par exemple  $(2; 3)$ .

### ⚠ Attention | Relier les points n'est pas automatique

Quelques points ne déterminent pas toujours la courbe entre eux. Si le phénomène est discret, il ne faut pas les relier. Même pour une fonction définie sur un intervalle, une droite entre deux points n'est justifiée que si l'on sait que la fonction est affine sur cette portion.

### 5.3 Fonction continue ou fonction discrète

La hauteur d'eau au cours du temps peut être modélisée sur un intervalle : toutes les valeurs intermédiaires du temps ont un sens. En revanche, le prix de  $n$  billets avec  $n \in \mathbb{N}$  est une fonction discrète :  $n = 2,4$  billet



n'a pas de sens.

Sur un graphique, une fonction continue est souvent représentée par un trait ; une fonction discrète, par des points séparés.

## 6 Courbe représentative et lectures graphiques

### 6.1 L'équation $y = f(x)$

#### Définition | Courbe représentative

Dans un repère, la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  d'une fonction  $f$  est l'ensemble des points  $M(x; y)$  tels que

$$y = f(x).$$

Ainsi,

$$M(a; b) \in \mathcal{C}_f \text{ si et seulement si } a \in D_f \text{ et } b = f(a).$$

#### Démonstration | Pourquoi l'ordonnée vaut-elle l'image ?

Pour une abscisse  $a$  autorisée, la fonction fournit l'unique nombre  $f(a)$ . Le point de la courbe situé au-dessus ou au-dessous de  $a$  a donc pour coordonnées  $(a; f(a))$ . Réciproquement, tout point  $(a; b)$  de la courbe vérifie son équation  $b = f(a)$ .

#### Exemple | Tester l'appartenance d'un point

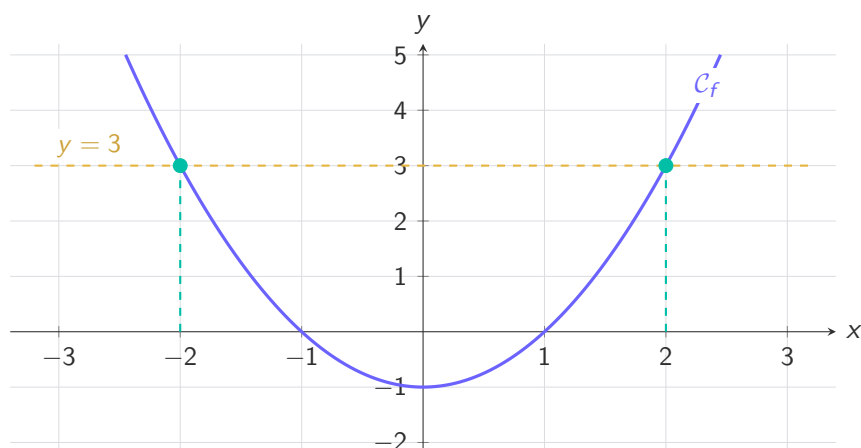
Soit  $f(x) = x^2 - 1$ . Le point  $A(2; 3)$  appartient à  $\mathcal{C}_f$  car  $f(2) = 3$ . Le point  $B(2; 4)$  n'y appartient pas car  $f(2) = 3 \neq 4$ .

### 6.2 Lire une image : trajet vertical

Pour lire  $f(a)$ , on part de  $a$  sur l'axe des abscisses, on rejoint verticalement la courbe, puis on lit horizontalement l'ordonnée.

### 6.3 Lire des antécédents : trajet horizontal

Pour chercher les antécédents de  $k$ , on trace mentalement la droite horizontale  $y = k$ . Les abscisses de ses points d'intersection avec la courbe sont les solutions de  $f(x) = k$ .



La droite  $y = 3$  coupe la courbe en deux points d'abscisses  $-2$  et  $2$ . Graphiquement, les antécédents de  $3$  sont donc  $-2$  et  $2$ .

## 6.4 Résoudre une inéquation graphiquement

### ✂ Méthode | Comparer la courbe à une hauteur

Pour résoudre  $f(x) \leq k$  :

1. repère la droite horizontale  $y = k$  ;
2. trouve les abscisses des intersections avec  $C_f$  ;
3. conserve les portions où la courbe est sous la droite ou sur elle ;
4. projette ces portions sur l'axe des abscisses.

Sur le graphique précédent,  $f(x) \leq 3$  pour  $x \in [-2; 2]$ , dans la partie du domaine représentée.

## 6.5 Lire le signe d'une fonction

Le signe de  $f(x)$  se lit par rapport à l'axe des abscisses :

- au-dessus de l'axe,  $f(x) > 0$  ;
- sur l'axe,  $f(x) = 0$  ;
- au-dessous de l'axe,  $f(x) < 0$ .

Pour  $f(x) = x^2 - 1$ , la courbe coupe l'axe en  $-1$  et  $1$ . Elle est sous l'axe pour  $x \in ]-1; 1[$ , et sur ou au-dessus pour  $x \in ]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ .

## 6.6 Comparer deux fonctions

Sur un même graphique,  $f(x) \leq g(x)$  lorsque la courbe de  $f$  est sous celle de  $g$ , ou confondue avec elle. Les abscisses des intersections résolvent  $f(x) = g(x)$ .

### ⚠ Attention | La fenêtre graphique peut tromper

Une courbe peut sortir de l'écran, des intersections peuvent être cachées et une graduation trop grossière peut faire croire qu'une valeur est exacte. Toujours lire les axes, le domaine affiché et l'unité des graduations.

## 7 Modéliser une situation par une fonction

### 7.1 Construire le modèle

#### Méthode | Cinq questions avant de calculer

1. Quelle grandeur joue le rôle de l'entrée ? Quelle est son unité ?
2. Quelles valeurs de cette entrée ont un sens ?
3. Quelle grandeur joue le rôle de la sortie ?
4. Quelle formule, quel tableau ou quelle courbe relie les deux grandeurs ?
5. La réponse finale respecte-t-elle le domaine et le contexte ?

#### Exemple | Le volume d'une boîte

Une boîte sans couvercle est obtenue en découpant des carrés de côté  $x$  dans les coins d'une feuille de 30 cm sur 20 cm, puis en relevant les bords. Ses dimensions sont  $30 - 2x$ ,  $20 - 2x$  et  $x$ . Son volume est

$$V(x) = x(30 - 2x)(20 - 2x).$$

Les longueurs imposent  $x \geq 0$ ,  $30 - 2x \geq 0$  et  $20 - 2x \geq 0$ . La contrainte la plus forte est  $x \leq 10$ , donc le domaine pertinent est  $[0; 10]$ .

### 7.2 Un modèle n'est pas la réalité entière

Une fonction retient les grandeurs jugées importantes et laisse de côté d'autres effets. Le modèle du volume précédent néglige l'épaisseur du carton et les pertes au pliage. Un bon travail mathématique précise donc les hypothèses, le domaine et le niveau de précision attendu.

## 8 Une fonction en Python

### 8.1 Traduire une formule

La fonction mathématique  $f(x) = x^2 - 1$  peut être programmée ainsi :

```
1 def f(x):  
2     return x**2 - 1  
3  
4 print(f(2))
```

Le mot `return` indique la valeur renvoyée. Le programme affiche 3.

#### Attention | `print` n'est pas `return`

`print` affiche une information à l'écran. `return` fournit une sortie réutilisable dans un autre calcul. Une fonction qui doit modéliser une fonction mathématique renvoie en général une valeur.

### 8.2 Construire un tableau de valeurs

```

1 def f(x):
2     return x**2 - 1
3
4 for x in range(-3, 4):
5     print(x, f(x))

```

La boucle utilise les entiers de  $-3$  à  $3$ . Elle produit automatiquement les colonnes du tableau de valeurs, mais elle ne calcule pas les images des nombres non entiers situés entre eux.

## 9 ▲ Pour aller plus loin – guidé et facultatif

Cette partie prolonge le socle officiel. Elle n'est pas réservée à quelques-uns : chaque idée est construite à partir de la notion de machine déjà comprise.

### 9.1 Enchaîner deux fonctions

Soient  $f(x) = 2x + 1$  et  $g(x) = x^2$ . Si l'on applique d'abord  $f$ , puis  $g$ , la sortie de la première machine devient l'entrée de la seconde :

$$x \mapsto f(x) = 2x + 1 \mapsto g(f(x)) = (2x + 1)^2.$$

#### Définition | Composition – notation facultative

La fonction obtenue en appliquant d'abord  $f$ , puis  $g$ , se note  $g \circ f$  et se lit «  $g$  rond  $f$  » :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

L'ordre se lit de droite à gauche :  $f$  agit en premier.

#### Exemple | L'ordre change le résultat

Avec les fonctions précédentes,

$$(g \circ f)(x) = (2x + 1)^2, \quad (f \circ g)(x) = 2x^2 + 1.$$

Pour  $x = 1$ , la première expression vaut 9 et la seconde vaut 3. En général,  $g \circ f \neq f \circ g$ .

### 9.2 Déplacer une courbe verticalement

Si  $g(x) = f(x) + k$ , chaque point  $(x; f(x))$  de  $\mathcal{C}_f$  devient le point  $(x; f(x) + k)$  de  $\mathcal{C}_g$ . L'abscisse ne change pas et l'ordonnée augmente de  $k$  : la courbe est translatée verticalement.

#### Démonstration | Justification coordonnée par coordonnée

Fixons une abscisse  $a$ . Le point de  $\mathcal{C}_f$  a pour ordonnée  $f(a)$ . Pour la fonction  $g$ , le point de même abscisse  $a$  pour ordonnée

$$g(a) = f(a) + k.$$

L'écart vertical est donc toujours  $k$ , quelle que soit l'abscisse.

### 9.3 Déplacer une courbe horizontalement

Si  $h(x) = f(x - a)$ , alors  $h(x + a) = f(x)$ . Le point  $(x; f(x))$  de  $\mathcal{C}_f$  correspond au point  $(x + a; f(x))$  de  $\mathcal{C}_h$ . La courbe est décalée de  $a$  unités vers la droite lorsque  $a > 0$ .

#### ⚠ Attention | Le signe semble inversé

Dans  $f(x - 3)$ , la courbe se déplace de 3 unités vers la droite. Pour retrouver l'ancienne entrée  $x$ , il faut fournir la nouvelle entrée  $x + 3$ , car  $(x + 3) - 3 = x$ .

## 10 Boîte à outils et erreurs à éviter

#### 🔧 Méthode | Image

Vérifie le domaine, puis remplace toutes les occurrences de  $x$  par la valeur entre parenthèses.

#### ⚠ Attention | Exact ou approché ?

Une intersection lue sur un dessin est souvent approchée. N'invente pas une exactitude que le graphique ne fournit pas.

#### 🔧 Méthode | Antécédent

Résous  $f(x) = k$ , ou lis les abscisses des intersections entre  $\mathcal{C}_f$  et la droite  $y = k$ .

#### 🔧 Méthode | Point sur une courbe

$M(a; b)$  appartient à  $\mathcal{C}_f$  si et seulement si  $a \in D_f$  et  $b = f(a)$ .

#### 🔧 Méthode | Signe

Au-dessus de l'axe des abscisses : positif. Sur l'axe : nul. Au-dessous : négatif.

#### ⚠ Attention | Axes et graduations

Avant toute lecture, identifie l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, leur unité et le domaine affiché.

**Intuition | Le protocole universel**

**Entrée** : quelle valeur choisit-on ?    **Domaine** : est-elle autorisée ?    **Règle** : comment calcule-t-on la sortie ?    **Représentation** : formule, tableau, courbe ou programme ?    **Interprétation** : que signifie le résultat ?

## 11 Exercices

Pour chaque exercice, commence par identifier le domaine et la représentation utilisée. Les étoiles indiquent une progression ; elles ne ferment la porte à personne.

### Exercice 1 : La machine et son vocabulaire

On considère la fonction  $p$  qui à tout réel  $x$  associe  $3x - 4$ .

- Écrire  $p(x)$ .
- Calculer l'image de 5, puis celle de  $-2$ .
- Chercher l'antécédent de 8 par  $p$ .
- Traduire la phrase « l'image de 7 par  $p$  est 17 » par une égalité, puis la vérifier.

### Exercice 2 : Calculer des images

Soient

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 3 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x+1}{x-2}.$$

- Calculer  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(-2)$  et  $f(1/2)$ .
- Préciser le domaine de  $g$ .
- Calculer  $g(3)$ ,  $g(0)$  et  $g(-1)$ .
- Expliquer pourquoi  $g(2)$  n'existe pas.

### Exercice 3 : Chercher des antécédents

On pose  $f(x) = x^2 - 4$  et  $h(x) = 3x + 7$ .

- Chercher les antécédents de 0, puis de 5, par  $f$ .
- Le nombre  $-5$  a-t-il un antécédent par  $f$  ?
- Chercher l'antécédent de  $-2$  par  $h$ .

### Exercice 4 : Ensembles de définition

Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction :

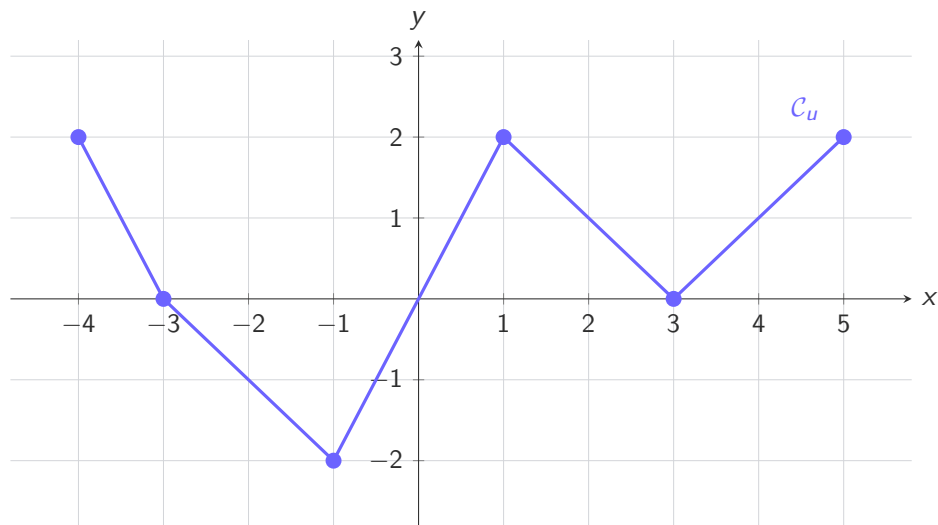
- $a(x) = 3x + 1$ ,
- $b(x) = \frac{5}{x+2}$ ,
- $c(x) = \sqrt{2x-6}$ ,
- $d(x) = \frac{x-1}{x^2-9}$ ,
- $e(x) = \frac{\sqrt{5-x}}{x+1}$ .

### Exercice 5 : Compléter un tableau

Soit  $f(x) = x^2 - 2x - 3$ . Compléter le tableau, puis relever les antécédents de 0 et de 5 parmi les valeurs présentées.

| $x$    | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------|----|----|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ |    |    |   |   |   |   |   |

**Graphique commun aux exercices 6, 7 et 8.** La courbe polygonale ci-dessous représente une fonction  $u$  ; ses sommets sont placés sur des points de la grille.



### Exercice 6 ★★☆☆ : Lire une courbe

- Donner l'ensemble de définition de  $u$ .
- Lire  $u(-4)$ ,  $u(-2)$ ,  $u(0)$  et  $u(4)$ .
- Donner tous les antécédents de 2, de  $-2$  et de 0.

### Exercice 7 ★★☆☆ : Équations et inéquations graphiques

À l'aide du graphique :

- résoudre  $u(x) = 1$  ;
- résoudre  $u(x) \leq 0$  ;
- résoudre  $u(x) > 1$ .

### Exercice 8 ★★☆☆ : Lire le signe

- Donner les zéros de  $u$ .
- Déterminer les ensembles sur lesquels  $u(x) > 0$  et  $u(x) < 0$ .
- Construire un tableau de signes de  $u$  sur son domaine.

### Exercice 9 ★★☆☆ : Un point appartient-il à la courbe ?

Soit  $f(x) = x^2 - 3x + 1$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

- Parmi les points  $A(0; 1)$ ,  $B(2; -1)$ ,  $C(-1; 5)$  et  $D(3; 0)$ , lesquels appartiennent à  $\mathcal{C}_f$  ?
- Déterminer l'ordonnée du point de  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse 4.
- Déterminer les abscisses des points de  $\mathcal{C}_f$  d'ordonnée 1.

### Exercice 10 ★★☆☆ : Une fonction discrète

Une carte annuelle coûte 12 euros, puis chaque atelier coûte 4 euros. On note  $C(n)$  le prix de  $n$  ateliers, avec  $n \in \mathbb{N}$ .

- Exprimer  $C(n)$ .



2. Construire le tableau de valeurs pour  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ .
3. Compléter la fonction Python suivante :

```
1 def cout(n):
2     return ...
```

4. Dans une représentation graphique, pourquoi ne faut-il pas relier les points obtenus ?

### Exercice 11 ★★☆☆ : Comparer deux fonctions

On considère  $f(x) = 2x + 1$  et  $g(x) = x^2 - 2$  sur  $\mathbb{R}$ .

1. Résoudre  $f(x) = g(x)$  et donner les coordonnées des points d'intersection de leurs courbes.
2. Factoriser  $g(x) - f(x)$ .
3. En déduire les solutions de  $f(x) \leq g(x)$ .
4. Traduire la réponse précédente en termes de position relative des deux courbes.

### Exercice 12 ★★☆☆ : Aire d'un rectangle

Un rectangle a un périmètre de 20 cm. L'un de ses côtés mesure  $x$  cm. Pour étudier aussi les positions limites d'aire nulle, on autorise un côté de longueur 0.

1. Montrer que l'autre côté mesure  $10 - x$  et préciser le domaine de  $x$ .
2. Exprimer l'aire  $A(x)$  du rectangle.
3. Calculer  $A(3)$ .
4. Déterminer les antécédents de 16 par  $A$ .
5. Montrer que  $A(x) = 25 - (x - 5)^2$ . En déduire que l'aire ne peut pas dépasser  $25 \text{ cm}^2$  et préciser quand cette valeur est atteinte.

### Exercice 13 ★★☆☆ : Fonction, budget et Python

Le prix de stationnement pour  $n$  heures entières est donné par  $P(n) = 5 + 1,8n$ , où  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Calculer  $P(6)$  et interpréter le résultat.
2. Avec 20 euros, combien d'heures entières peut-on payer au maximum ?
3. Écrire une fonction Python `prix(n)` qui renvoie  $P(n)$ .
4. Expliquer la différence entre le domaine mathématique de la formule  $5 + 1,8x$  et celui du modèle de stationnement.

### Exercice 14 ★★☆☆ : Enchaîner deux machines – pour aller plus loin

Soient  $f(x) = 3x - 2$  et  $g(x) = x^2 + 1$ .

1. Calculer  $f(2)$ , puis  $g(f(2))$ .
2. Calculer  $g(2)$ , puis  $f(g(2))$ . Comparer les deux résultats.
3. Déterminer les expressions de  $(g \circ f)(x)$  et de  $(f \circ g)(x)$ .
4. Résoudre  $(g \circ f)(x) = 1$ .

**Exercice 15** ★★☆☆ : Déplacer une courbe – pour aller plus loin

On pose  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = f(x) + 3$  et  $h(x) = f(x - 2)$ .

1. Donner les expressions développées de  $g(x)$  et  $h(x)$ .
2. Le point  $A(1; 1)$  appartient à  $\mathcal{C}_f$ . Quels points correspondants obtient-on sur  $\mathcal{C}_g$  et  $\mathcal{C}_h$  ?
3. Décrire les déplacements qui transforment  $\mathcal{C}_f$  en  $\mathcal{C}_g$ , puis en  $\mathcal{C}_h$ .
4. Résoudre  $g(x) = 3$  et  $h(x) = 0$ .

## 12 🦉 Problème : L'arche du jardin partagé ★★ ★

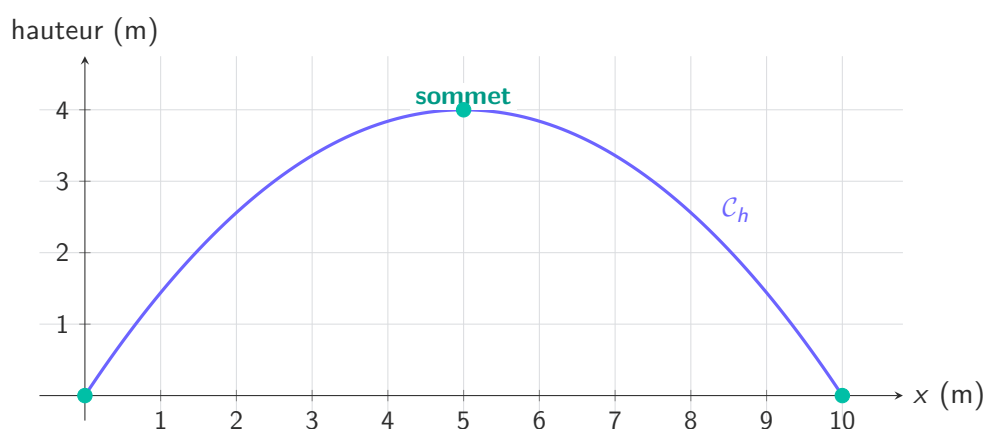
### 🧠 Intuition | Le défi

Un jardin partagé veut construire une arche d'entrée à la fois esthétique et accessible. Tu vas passer de la formule à la courbe, résoudre des contraintes de hauteur, comparer deux formes et approcher une longueur par un algorithme. Le problème est exigeant, mais chaque étape repose sur les outils de la fiche.

L'ouverture mesure 10 m de large. Pour  $x \in [0; 10]$ , sa hauteur en mètres est modélisée par

$$h(x) = 4 - \frac{4}{25}(x - 5)^2.$$

L'abscisse  $x = 0$  correspond au bord gauche et  $x = 10$  au bord droit.



### Partie A – Comprendre le modèle

1. Expliquer pourquoi le domaine retenu est  $[0; 10]$  et interpréter  $h(x)$ .
2. Calculer  $h(0)$ ,  $h(2,5)$ ,  $h(5)$ ,  $h(7,5)$  et  $h(10)$ . Organiser les résultats dans un tableau.
3. Pour tout  $t$  tel que  $5 - t$  et  $5 + t$  appartiennent au domaine, montrer que  $h(5 - t) = h(5 + t)$ . Interpréter cette égalité sur la courbe.
4. Vérifier par le calcul que les trois points signalés sur le graphique appartiennent à  $C_h$ .

### Partie B – Une zone haute d'au moins 3 m

5. Résoudre exactement  $h(x) = 3$  dans  $[0; 10]$ .
6. En utilisant la forme de  $h$ , montrer que

$$h(x) \geq 3 \text{ si et seulement si } |x - 5| \leq 2,5.$$

7. En déduire l'intervalle correspondant et la largeur de la zone où l'arche mesure au moins 3 m.

### Partie C – Vérifier l'accessibilité

Une voie de service exige une hauteur minimale de 2,40 m.

8. Montrer que  $h(x) \geq 2,4$  est équivalent à  $(x - 5)^2 \leq 10$ .

9. En déduire que la zone utilisable est

$$[5 - \sqrt{10}; 5 + \sqrt{10}].$$

Donner une valeur approchée de sa largeur au centimètre près.

10. Un véhicule de 6 m de large est centré sous l'arche. Ses bords sont donc aux abscisses 2 et 8. Peut-il passer en conservant la hauteur minimale de 2,40 m ? Justifier de deux manières.

### Partie D – Deux formules, une même arche

Un second bureau d'études propose la fonction

$$g(x) = \frac{4}{25}x(10 - x) \quad \text{pour } x \in [0; 10].$$

11. Développer  $h(x)$  et  $g(x)$ , puis montrer que  $h(x) = g(x)$  pour tout  $x \in [0; 10]$ .  
12. Expliquer pourquoi les deux fonctions ont exactement la même courbe sur le domaine.  
13. Indiquer une situation dans laquelle la forme factorisée de  $g$  est plus pratique, puis une situation dans laquelle la forme de  $h$  est plus pratique.

### Partie E – Comparer avec un toit triangulaire

Un toit triangulaire de même largeur et de même hauteur est modélisé par

$$t(x) = \begin{cases} 0,8x & \text{si } 0 \leq x \leq 5, \\ 0,8(10 - x) & \text{si } 5 \leq x \leq 10. \end{cases}$$

14. Pour  $x \in [0; 5]$ , montrer que

$$h(x) - t(x) = \frac{4}{25}x(5 - x) \geq 0.$$

15. Pour  $x \in [5; 10]$ , montrer que

$$h(x) - t(x) = \frac{4}{25}(10 - x)(x - 5) \geq 0.$$

16. En déduire la position relative des deux courbes et les abscisses de leurs points d'intersection.

### Partie F – Approcher la longueur de l'arche

On remplace la courbe par une ligne brisée joignant des points régulièrement espacés. Avec  $n$  intervalles, on pose  $\Delta x = 10/n$  et on additionne les longueurs des  $n$  segments.

17. Pour  $n = 2$ , les points utilisés sont  $(0; 0)$ ,  $(5; 4)$  et  $(10; 0)$ . Montrer que la longueur approchée vaut  $L_2 = 2\sqrt{41}$ .  
18. Pour  $n = 4$ , utiliser les valeurs de la partie A pour montrer que

$$L_4 = \sqrt{61} + \sqrt{29}.$$

Comparer  $L_2$  et  $L_4$  numériquement.

19. Expliquer chaque ligne du programme suivant et préciser ce que calcule longueur(100).

```
1 from math import sqrt
2
3 def h(x):
4     return 4 - 4/25 * (x - 5)**2
5
6 def longueur(n):
7     dx = 10 / n
8     total = 0
9     for k in range(n):
10         x1 = k * dx
11         x2 = (k + 1) * dx
12         dy = h(x2) - h(x1)
13         total = total + sqrt(dx**2 + dy**2)
14     return total
```

20. Sans utiliser d'intégrale, expliquer pourquoi chaque longueur approchée est supérieure à 10 m.

## 13 Corrigés détaillés

### Corrigé 1

 *Démonstration / Distinguer l'entrée et la sortie*

a) La phrase « associer  $3x - 4$  à  $x$  » se traduit par

$$p(x) = 3x - 4.$$

b)

$$p(5) = 3 \times 5 - 4 = 11, \quad p(-2) = 3 \times (-2) - 4 = -10.$$

L'image de 5 est 11 et l'image de  $-2$  est  $-10$ .

c) Chercher l'antécédent de 8 revient à résoudre

$$p(x) = 8 \text{ si et seulement si } 3x - 4 = 8 \text{ si et seulement si } 3x = 12 \text{ si et seulement si } x = 4.$$

L'unique antécédent de 8 est  $\boxed{4}$ .

d) La phrase se note  $\boxed{p(7) = 17}$ . En effet,

$$p(7) = 3 \times 7 - 4 = 21 - 4 = 17.$$

### Corrigé 2

 *Démonstration / Remplacer toute la variable*

a)

$$f(0) = 3,$$

$$f(1) = 2 - 5 + 3 = 0,$$

$$f(-2) = 2(-2)^2 - 5(-2) + 3 = 8 + 10 + 3 = 21,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{4} - 5 \times \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 3 = 1.$$

b) Le dénominateur  $x - 2$  doit être non nul. Ainsi

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

c) Les trois entrées sont autorisées :

$$g(3) = \frac{4}{1} = 4, \quad g(0) = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}, \quad g(-1) = \frac{0}{-3} = 0.$$

d) Pour  $x = 2$ , le dénominateur vaut  $2 - 2 = 0$ . Une division par zéro n'est pas définie, donc  $g(2)$  n'existe pas.

## Corrigé 3

 *Démonstration / Transformer la recherche en équation*

a) Les antécédents de 0 par  $f$  vérifient

$$x^2 - 4 = 0 \text{ si et seulement si } x^2 = 4 \text{ si et seulement si } x = -2 \text{ ou } x = 2.$$

Ils sont  $\boxed{-2 \text{ et } 2}$ .

Pour les antécédents de 5,

$$x^2 - 4 = 5 \text{ si et seulement si } x^2 = 9 \text{ si et seulement si } x = -3 \text{ ou } x = 3.$$

Ils sont  $\boxed{-3 \text{ et } 3}$ .

b) Il faudrait résoudre

$$x^2 - 4 = -5 \text{ si et seulement si } x^2 = -1.$$

Un carré réel ne peut pas être négatif :  $-5$  n'a donc  $\boxed{\text{aucun antécédent}}$  par  $f$ .

c)

$$h(x) = -2 \text{ si et seulement si } 3x + 7 = -2 \text{ si et seulement si } 3x = -9 \text{ si et seulement si } x = -3.$$

L'unique antécédent cherché est  $\boxed{-3}$ .

## Corrigé 4

 *Démonstration / Lister toutes les restrictions*

a) La formule  $3x + 1$  est calculable pour tout réel :  $\boxed{D_a = \mathbb{R}}$ .

b) On impose  $x + 2 \neq 0$ , donc  $x \neq -2$  :

$$\boxed{D_b = \mathbb{R} \setminus \{-2\}}.$$

c) Le contenu de la racine doit être positif ou nul :

$$2x - 6 \geq 0 \text{ si et seulement si } x \geq 3.$$

Ainsi  $\boxed{D_c = [3; +\infty[}$ .

d) Le dénominateur se factorise :

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3).$$

Il s'annule pour  $x = -3$  et  $x = 3$ . Donc

$$\boxed{D_d = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}}.$$

e) Il faut simultanément  $5 - x \geq 0$ , donc  $x \leq 5$ , et  $x + 1 \neq 0$ , donc  $x \neq -1$ . Par intersection,

$$\boxed{D_e = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 5]}.$$

## Corrigé 5

 *Démonstration / Calculer colonne par colonne*

On remplace  $x$  par chaque valeur :

|        |    |    |    |    |    |   |   |
|--------|----|----|----|----|----|---|---|
| $x$    | -2 | -1 | 0  | 1  | 2  | 3 | 4 |
| $f(x)$ | 5  | 0  | -3 | -4 | -3 | 0 | 5 |

Parmi les valeurs présentées, les antécédents de 0 sont  $-1$  et  $3$  ; ceux de 5 sont  $-2$  et  $4$  .

Le tableau seul permet cette conclusion pour les entrées affichées. Ici, la formule permettrait en plus de prouver qu'il n'y en a pas d'autres.

## Corrigé 6

 *Démonstration / Verticale pour l'image, horizontale pour les antécédents*

a) La courbe commence à l'abscisse  $-4$  et se termine à l'abscisse  $5$ , avec les deux extrémités incluses :

$$D_u = [-4; 5] .$$

b) On lit

$$u(-4) = 2 , \quad u(-2) = -1 , \quad u(0) = 0 , \quad u(4) = 1 .$$

c) La droite  $y = 2$  rencontre la courbe aux abscisses  $-4$ ,  $1$  et  $5$ . Le nombre  $-2$  a pour unique antécédent  $-1$ . Enfin, les points de la courbe situés sur l'axe des abscisses ont pour abscisses  $-3$ ,  $0$  et  $3$ . Donc

$$u(x) = 2 \text{ si et seulement si } x \in \{-4; 1; 5\} ,$$

$$u(x) = -2 \text{ si et seulement si } x = -1, \quad u(x) = 0 \text{ si et seulement si } x \in \{-3; 0; 3\} .$$

## Corrigé 7

 *Démonstration / Projeter les portions utiles sur l'axe*

a) La droite horizontale  $y = 1$  coupe les quatre segments concernés aux abscisses  $-3,5$ ,  $0,5$ ,  $2$  et  $4$  :

$$S = \{-3,5; 0,5; 2; 4\} .$$

b) La courbe est sous l'axe, ou sur lui, de  $-3$  à  $0$ . Elle touche aussi l'axe au point isolé d'abscisse  $3$  :

$$S = [-3; 0] \cup \{3\} .$$

c) La courbe est strictement au-dessus de  $y = 1$  sur trois zones. Les extrémités  $-4$  et  $5$  appartiennent au domaine et leurs images valent  $2$ , donc elles sont incluses :

$$S = [-4; -3,5[ \cup ]0,5; 2[ \cup ]4; 5] .$$

Les quatre points où  $u(x) = 1$  sont exclus car l'inégalité est stricte.



## Corrigé 8

 Démonstration / Comparer la courbe à l'axe des abscisses

a) Les zéros sont les abscisses des intersections avec l'axe :

$$-3, 0 \text{ et } 3.$$

b) La courbe est au-dessus de l'axe sur

$$[-4; -3[ \cup ]0; 3[ \cup ]3; 5].$$

Elle est au-dessous de l'axe sur

$$]-3; 0[.$$

c) Le tableau de signes est donc :

| $x$    | -4 | -3 | 0 | 3 | 5 |
|--------|----|----|---|---|---|
| $u(x)$ | +  | 0  | - | 0 | + |

## Corrigé 9

 Démonstration / Vérifier l'équation  $y = f(x)$

a)

$$f(0) = 1, \quad f(2) = 4 - 6 + 1 = -1, \quad f(-1) = 1 + 3 + 1 = 5.$$

Ainsi  $A$ ,  $B$  et  $C$  appartiennent à  $\mathcal{C}_f$ . En revanche,

$$f(3) = 9 - 9 + 1 = 1 \neq 0,$$

donc  $D(3; 0)$  n'appartient pas à la courbe.

b)

$$f(4) = 16 - 12 + 1 = 5.$$

Le point cherché est  $(4; 5)$ .

c) Les abscisses cherchées vérifient

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \text{ si et seulement si } x^2 - 3x + 1 = 1 \\ &\text{si et seulement si } x^2 - 3x = 0 \\ &\text{si et seulement si } x(x - 3) = 0. \end{aligned}$$

Donc  $x = 0$  ou  $x = 3$ . On remarque que  $D(3; 0)$  n'était pas sur la courbe, mais le point  $(3; 1)$  y est bien.

## Corrigé 10

 Démonstration / Respecter le caractère discret

1. Le coût comprend 12 euros fixes puis 4 euros par atelier :

$$C(n) = 12 + 4n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.

| $n$    | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  |
|--------|----|----|----|----|----|
| $C(n)$ | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 |

3.

```
1 def cout(n):
2     return 12 + 4*n
```

 Démonstration / Pourquoi ne pas relier les points ?

4. Le nombre d'ateliers est entier : il n'existe pas, dans ce modèle, de prix pour 2,4 ateliers. Relier les points ferait croire que toutes les entrées réelles intermédiaires sont autorisées. La représentation correcte est un ensemble de points séparés.

## Corrigé 11

 Démonstration / Une égalité pour les intersections, une inégalité pour la position

1.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \text{ si et seulement si } 2x + 1 = x^2 - 2 \\ &\text{si et seulement si } x^2 - 2x - 3 = 0 \\ &\text{si et seulement si } (x - 3)(x + 1) = 0 \\ &\text{si et seulement si } x = -1 \text{ ou } x = 3. \end{aligned}$$

Pour  $x = -1$ , l'ordonnée vaut  $f(-1) = -1$ . Pour  $x = 3$ , elle vaut  $f(3) = 7$ . Les points d'intersection sont

$$(-1; -1) \text{ et } (3; 7).$$

2.

$$g(x) - f(x) = x^2 - 2 - (2x + 1) = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1).$$

3.

$$f(x) \leq g(x) \text{ si et seulement si } g(x) - f(x) \geq 0 \text{ si et seulement si } (x - 3)(x + 1) \geq 0.$$

Le produit est positif ou nul à l'extérieur des deux racines :

$$S = ]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[.$$

4. Sur ces deux intervalles, la courbe de  $f$  est sous celle de  $g$ , ou confondue avec elle aux abscisses

−1 et 3. Entre −1 et 3, la courbe de  $f$  est strictement au-dessus de celle de  $g$ .

## Corrigé 12

 *Démonstration / Du domaine à l'optimisation*

1. Si l'autre côté mesure  $y$ , alors

$$2x + 2y = 20 \text{ si et seulement si } x + y = 10 \text{ si et seulement si } y = 10 - x.$$

Les longueurs sont positives ou nulles dans le modèle élargi, donc  $x \geq 0$  et  $10 - x \geq 0$ . Ainsi

$$x \in [0; 10].$$

2.

$$A(x) = x(10 - x).$$

3.

$$A(3) = 3(10 - 3) = 3 \times 7 = 21 \text{ cm}^2.$$

4.

$$\begin{aligned} A(x) = 16 \text{ si et seulement si } x(10 - x) &= 16 \\ \text{si et seulement si } x^2 - 10x + 16 &= 0 \\ \text{si et seulement si } (x - 2)(x - 8) &= 0. \end{aligned}$$

Les deux solutions appartiennent au domaine : les antécédents de 16 sont 2 et 8.

5. On développe :

$$25 - (x - 5)^2 = 25 - (x^2 - 10x + 25) = 10x - x^2 = x(10 - x) = A(x).$$

Comme  $(x - 5)^2 \geq 0$ ,

$$A(x) = 25 - (x - 5)^2 \leq 25.$$

L'égalité est obtenue si et seulement si  $(x - 5)^2 = 0$ , donc pour  $x = 5$ . L'aire maximale est  $25 \text{ cm}^2$ , atteinte par le carré de côté 5 cm.

## Corrigé 13

 *Démonstration / Calculer puis revenir au contexte*

1.

$$P(6) = 5 + 1,8 \times 6 = 5 + 10,8 = 15,80 \text{ euros}.$$

C'est le prix de six heures entières de stationnement.

2.

$$5 + 1,8n \leq 20$$

$$1,8n \leq 15$$

$$n \leq \frac{15}{1,8} = \frac{25}{3} \approx 8,33.$$

Comme  $n$  est entier, le maximum est 8 heures. En effet,  $P(8) = 19,40$  euros et  $P(9) = 21,20$  euros.

3.

```
1 def prix(n):
2     return 5 + 1.8*n
```



*Démonstration / Deux domaines à distinguer*

4. L'expression algébrique  $5 + 1,8x$  est calculable pour tout réel  $x$ . Dans le modèle, l'entrée compte des heures entières et ne peut pas être négative : le domaine est  $\mathbb{N}$ . Une formule seule ne suffit donc pas à fixer le domaine d'une situation concrète.

## Corrigé 14



*Démonstration / Respecter l'ordre des machines*

1.

$$f(2) = 3 \times 2 - 2 = 4, \quad g(f(2)) = g(4) = 4^2 + 1 = 17.$$

2.

$$g(2) = 2^2 + 1 = 5, \quad f(g(2)) = f(5) = 3 \times 5 - 2 = 13.$$

Les résultats 17 et 13 sont différents : changer l'ordre des machines change en général la sortie.

3.

$$(g \circ f)(x) = g(3x - 2) = (3x - 2)^2 + 1 = \boxed{9x^2 - 12x + 5},$$

$$(f \circ g)(x) = f(x^2 + 1) = 3(x^2 + 1) - 2 = \boxed{3x^2 + 1}.$$

4.

$$(g \circ f)(x) = 1 \text{ si et seulement si } (3x - 2)^2 + 1 = 1$$

$$\text{si et seulement si } (3x - 2)^2 = 0$$

$$\text{si et seulement si } 3x - 2 = 0.$$

Donc  $S = \{2/3\}$ .

## Corrigé 15

 Démonstration / Suivre un point repère

1.

$$g(x) = x^2 + 3 \quad \text{et} \quad h(x) = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4.$$

2. Ajouter 3 à l'image transforme  $(1; 1)$  en  $(1; 4)$  sur  $\mathcal{C}_g$ . Remplacer  $x$  par  $x - 2$  décale l'abscisse de 2 vers la droite : le point correspondant sur  $\mathcal{C}_h$  est  $(3; 1)$ .

3. La courbe  $\mathcal{C}_g$  est obtenue en déplaçant  $\mathcal{C}_f$  de 3 unités vers le haut. La courbe  $\mathcal{C}_h$  est obtenue en déplaçant  $\mathcal{C}_f$  de 2 unités vers la droite.

4.

$$g(x) = 3 \text{ si et seulement si } x^2 + 3 = 3 \text{ si et seulement si } x^2 = 0 \text{ si et seulement si } x = 0,$$

donc  $S = \{0\}$ . De même,

$$h(x) = 0 \text{ si et seulement si } (x - 2)^2 = 0 \text{ si et seulement si } x = 2,$$

donc  $S = \{2\}$ .

## Corrigé du problème : L'arche du jardin partagé

 *Démonstration / Partie A – Comprendre le modèle*

1. L'abscisse mesure la distance horizontale depuis le bord gauche. L'ouverture commence à  $x = 0$  et se termine à  $x = 10$ , donc le domaine physique est  $[0; 10]$ . Pour chaque  $x$  de cet intervalle,  $h(x)$  est la hauteur de l'arche en mètres.

2.

$$\begin{aligned}h(0) &= 4 - \frac{4}{25} \times 25 = 0, \\h(2,5) &= 4 - \frac{4}{25} \times 6,25 = 3, \\h(5) &= 4, \\h(7,5) &= 3, \\h(10) &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi :

| $x$    | 0 | 2,5 | 5 | 7,5 | 10 |
|--------|---|-----|---|-----|----|
| $h(x)$ | 0 | 3   | 4 | 3   | 0  |

3.

$$\begin{aligned}h(5 - t) &= 4 - \frac{4}{25}((5 - t) - 5)^2 = 4 - \frac{4}{25}t^2, \\h(5 + t) &= 4 - \frac{4}{25}((5 + t) - 5)^2 = 4 - \frac{4}{25}t^2.\end{aligned}$$

Donc  $h(5 - t) = h(5 + t)$ . Deux points situés à la même distance horizontale de  $x = 5$  ont la même hauteur : la courbe est symétrique par rapport à la droite verticale  $x = 5$ .

4. Les calculs précédents donnent  $h(0) = 0$ ,  $h(5) = 4$  et  $h(10) = 0$ . Ainsi  $(0; 0)$ ,  $(5; 4)$  et  $(10; 0)$  vérifient bien l'équation  $y = h(x)$  et appartiennent à  $\mathcal{C}_h$ .

 *Démonstration / Partie B – Une zone haute d'au moins 3 m*

5.

$$\begin{aligned}h(x) &= 3 \text{ si et seulement si } 4 - \frac{4}{25}(x - 5)^2 = 3 \\&\text{si et seulement si } \frac{4}{25}(x - 5)^2 = 1 \\&\text{si et seulement si } (x - 5)^2 = \frac{25}{4} \\&\text{si et seulement si } x - 5 = -\frac{5}{2} \text{ ou } x - 5 = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Les deux solutions sont  $x = 2,5$  et  $x = 7,5$ .

6.

$$\begin{aligned}
 h(x) \geq 3 & \text{ si et seulement si } 4 - \frac{4}{25}(x-5)^2 \geq 3 \\
 & \text{ si et seulement si } -\frac{4}{25}(x-5)^2 \geq -1 \\
 & \text{ si et seulement si } (x-5)^2 \leq \frac{25}{4}.
 \end{aligned}$$

La dernière équivalence renverse le sens car on multiplie par  $-25/4 < 0$ . Or

$$(x-5)^2 \leq \left(\frac{5}{2}\right)^2 \text{ si et seulement si } |x-5| \leq 2,5.$$

7. La distance entre  $x$  et 5 doit être au plus 2,5, donc

$$x \in [2,5; 7,5].$$

La largeur de cette zone est  $7,5 - 2,5 = 5 \text{ m}$ .

 *Démonstration / Partie C – Vérifier l'accessibilité*

8. Comme  $2,4 = 12/5$ ,

$$\begin{aligned}
 h(x) \geq 2,4 & \text{ si et seulement si } 4 - \frac{4}{25}(x-5)^2 \geq \frac{12}{5} \\
 & \text{ si et seulement si } -\frac{4}{25}(x-5)^2 \geq -\frac{8}{5} \\
 & \text{ si et seulement si } (x-5)^2 \leq 10.
 \end{aligned}$$

9.

$$(x-5)^2 \leq 10 \text{ si et seulement si } |x-5| \leq \sqrt{10} \text{ si et seulement si } -\sqrt{10} \leq x-5 \leq \sqrt{10}.$$

Ainsi

$$x \in [5 - \sqrt{10}; 5 + \sqrt{10}].$$

La largeur vaut

$$2\sqrt{10} \approx 6,3249 \text{ m},$$

soit  $6,32 \text{ m}$  au centimètre près.

10. Première justification : la voie du véhicule occupe  $[2; 8]$ . Or

$$5 - \sqrt{10} \approx 1,84 < 2 \quad \text{et} \quad 8 < 8,16 \approx 5 + \sqrt{10}.$$

Ainsi  $[2; 8]$  est contenu dans la zone accessible.

Seconde justification : pour tout  $x \in [2; 8]$ , on a  $|x-5| \leq 3$ , donc  $(x-5)^2 \leq 9$  et

$$h(x) \geq 4 - \frac{4}{25} \times 9 = \frac{64}{25} = 2,56 > 2,40.$$

Le véhicule peut donc passer avec la marge demandée.

 *Démonstration / Partie D – Deux formules, une même arche*

11.

$$\begin{aligned} h(x) &= 4 - \frac{4}{25}(x^2 - 10x + 25) \\ &= 4 - \frac{4}{25}x^2 + \frac{40}{25}x - 4 \\ &= -\frac{4}{25}x^2 + \frac{8}{5}x, \end{aligned}$$

tandis que

$$g(x) = \frac{4}{25}(10x - x^2) = -\frac{4}{25}x^2 + \frac{8}{5}x.$$

Ainsi  $h(x) = g(x)$  pour tout  $x \in [0; 10]$ .

12. Pour chaque abscisse du domaine, les deux fonctions donnent exactement la même ordonnée. Elles produisent donc les mêmes points  $(x; y)$  et ont exactement la même courbe.

13. La forme factorisée

$$g(x) = \frac{4}{25}x(10 - x)$$

fait apparaître immédiatement les zéros 0 et 10. La forme

$$h(x) = 4 - \frac{4}{25}(x - 5)^2$$

fait apparaître le centre  $x = 5$ , la symétrie et la hauteur maximale 4.

 *Démonstration / Partie E – Comparer avec un toit triangulaire*

14. Pour  $x \in [0; 5]$ , on utilise la forme factorisée de  $h = g$  :

$$\begin{aligned} h(x) - t(x) &= \frac{4}{25}x(10 - x) - 0,8x \\ &= \frac{4}{25}x(10 - x) - \frac{20}{25}x \\ &= \frac{4}{25}x(5 - x). \end{aligned}$$

Sur  $[0; 5]$ , les deux facteurs  $x$  et  $5 - x$  sont positifs ou nuls. Donc

$$h(x) - t(x) \geq 0.$$

15. Pour  $x \in [5; 10]$ ,

$$\begin{aligned} h(x) - t(x) &= \frac{4}{25}x(10 - x) - 0,8(10 - x) \\ &= (10 - x) \left( \frac{4}{25}x - \frac{20}{25} \right) \\ &= \frac{4}{25}(10 - x)(x - 5). \end{aligned}$$



Sur  $[5; 10]$ , les facteurs  $10 - x$  et  $x - 5$  sont positifs ou nuls. Donc

$$h(x) - t(x) \geq 0.$$

**16.** Sur tout  $[0; 10]$ , on a  $h(x) \geq t(x)$  : la courbe de l'arche est au-dessus de celle du toit triangulaire, ou confondue avec elle. Dans la première moitié, l'égalité a lieu pour  $x = 0$  ou  $x = 5$  ; dans la seconde, pour  $x = 5$  ou  $x = 10$ . Les points d'intersection ont donc pour abscisses

$$0, 5 \text{ et } 10.$$

 *Démonstration / Partie F – Approcher la longueur de l'arche*

**17.** Pour  $n = 2$ , chacun des deux segments a un déplacement horizontal de 5 m et un déplacement vertical de 4 m. Par le théorème de Pythagore, sa longueur est  $\sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$ . Donc

$$L_2 = 2\sqrt{41} \approx 12,806 \text{ m}.$$

**18.** Les cinq points sont

$$(0; 0), \quad (2,5; 3), \quad (5; 4), \quad (7,5; 3), \quad (10; 0).$$

Chacun des deux segments extérieurs mesure

$$\sqrt{2,5^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{61}}{2},$$

et chacun des deux segments intérieurs mesure

$$\sqrt{2,5^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}.$$

Ainsi

$$L_4 = \sqrt{61} + \sqrt{29} \approx 13,195 \text{ m}.$$

Cette approximation est environ 0,389 m plus grande que  $L_2$ .

**19.** La fonction  $h$  traduit la formule de la hauteur. Dans `longueur(n)`, la variable `dx` est la largeur de chaque petit intervalle. La boucle construit ses deux extrémités `x1` et `x2`, calcule la différence verticale `dy`, puis ajoute la longueur du segment obtenue par Pythagore.

L'appel `longueur(100)` utilise 100 segments et renvoie environ

$$13,3368 \text{ m}.$$

Il s'agit d'une approximation numérique de la longueur de la courbe, pas d'une valeur exacte.

**20.** Pour chaque segment,

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \geq \sqrt{(\Delta x)^2} = \Delta x,$$

car  $\Delta x > 0$ . En additionnant les  $n$  segments,

$$L_n \geq n\Delta x = n \times \frac{10}{n} = 10.$$

Au moins un déplacement vertical est non nul, donc au moins une inégalité est stricte. Par conséquent

$$L_n > 10 \text{ m}.$$



### Intuition | Ce que le problème nous a appris

Une même fonction peut changer de visage sans changer de valeurs : la forme centrée montre la symétrie et la hauteur maximale, tandis que la forme factorisée montre les points d'appui. Une inéquation transforme une exigence concrète de hauteur en un intervalle utilisable. Enfin, une courbe peut être approchée par une ligne brisée : augmenter le nombre de segments affine le dessin, mais le résultat reste numérique.

## 📌 Carte mémoire de la fiche

### 🔧 Méthode | Image

$f(a)$  est la sortie obtenue pour l'entrée  $a$ . Vérifie le domaine, puis remplace chaque  $x$  par  $(a)$ .

### 🔧 Méthode | Courbe

$M(a; b) \in \mathcal{C}_f$  si et seulement si  $a \in D_f$  et  $b = f(a)$ . Au-dessus de l'axe :  $f > 0$ ; au-dessous :  $f < 0$ .

### 🔧 Méthode | Antécédent

Les antécédents de  $k$  sont les solutions de  $f(x) = k$ , ou les abscisses des intersections avec la droite  $y = k$ .

### ⚠️ Attention | Toujours contrôler

Domaine, axes, graduations, caractère discret ou continu, valeur exacte ou approchée : ces cinq informations sécurisent toute lecture.

### Fin de la Fiche 6 – Fonctions et courbes représentatives

Tu sais maintenant définir une fonction, calculer des images, chercher des antécédents et exploiter une courbe sans confondre lecture et preuve.

*Tu sais aussi choisir un domaine, modéliser une dépendance, comparer deux courbes et enchaîner deux machines simples.*

➔ Prochaine fiche : Fonctions de référence.

« Une fonction raconte comment une grandeur dépend d'une autre. »