

FICHE 07

Fonctions de référence

Les courbes à reconnaître

Formules ▪ Signes ▪ Variations

x

x^2

$|x|$

$\frac{1}{x}$

$\sqrt{x}$

x^3

Seconde générale ▪ Mathématiques ▪ Programme officiel

 Cours complet

 15 exercices

 Problème défi

 Corrigés

Table des matières

1	❓ Pourquoi étudier les fonctions de référence ?	4
1.1	Construire une bibliothèque mentale	4
1.2	Les questions toujours posées	4
2	👤 La carte d'identité d'une fonction	4
2.1	Domaine, signe et variations	4
2.2	Fonction paire : symétrie par rapport à l'axe des ordonnées	5
2.3	Fonction impaire : symétrie par rapport à l'origine	5
3	↘ La fonction affine	6
3.1	Formule et droite représentative	6
3.2	Variations	6
3.3	Signe	6
4	■ La fonction carré	7
4.1	Définition, signe et symétrie	7
4.2	Variations	7
4.3	Équations et inéquations	8
5	↔ La fonction valeur absolue	8
5.1	Distance à zéro	8
5.2	Variations et résolutions	9
6	÷ La fonction inverse	9
6.1	Domaine, signe et symétrie	9
6.2	Variations	10
6.3	Équations et inéquations	10
7	√ La fonction racine carrée	11
7.1	Domaine et courbe	11
7.2	Variations	11
7.3	Résoudre	11
7.4	Lien avec la fonction carré	12
8	📦 La fonction cube	12
8.1	Définition, signe et symétrie	12
8.2	Variations	13
9	📁 Le répertoire des courbes	13
9.1	Une vue d'ensemble	13
9.2	Comparer x^2 , x et $\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$	14
10	✂ Résoudre avec une fonction de référence	15
10.1	Le protocole fiable	15
10.2	Comparer sans calculatrice	15
11	⌕ Fonctions de référence en Python	15

11.1	Définir les fonctions	15
11.2	Construire une table de comparaison	16
12	 Pour aller plus loin - guidé et facultatif	16
12.1	La forme $a f(x - h) + k$	16
12.2	Exemple : une parabole transformée	17
13	 Boîte à outils et erreurs à éviter	17
14	 Exercices	18
15	 Problème : <i>Le relais de secours</i> ★★ ★	21
16	 Corrigés détaillés	23

1 ? Pourquoi étudier les fonctions de référence ?

1.1 Construire une bibliothèque mentale

Quand tu lis un mot courant, tu ne redécouvres pas chaque lettre : tu reconnais le mot. En mathématiques, les fonctions de référence jouent le même rôle. Reconnaître la forme de x^2 , de $|x|$ ou de $1/x$ permet de prévoir un domaine, un signe, une symétrie et l'allure d'une courbe avant même de calculer.

Intuition | Des briques, pas des recettes

Une fonction de référence est une brique élémentaire. L'objectif n'est pas de réciter six dessins, mais de comprendre pourquoi ils ont cette forme. Une démonstration algébrique protège contre les erreurs lorsque la courbe est déplacée, étirée ou utilisée dans un problème.

1.2 Les questions toujours posées

Pour chaque fonction, nous répondrons dans le même ordre :

1. quelles entrées sont autorisées ?
2. quelles valeurs la fonction peut-elle produire ?
3. où est-elle positive, nulle ou négative ?
4. possède-t-elle une symétrie ?
5. comment varie-t-elle ?
6. comment résoudre $f(x) = k$ ou $f(x) \leq k$?

Attention | Un dessin aide, une preuve décide

Une courbe permet de conjecturer. Pour une réponse exacte, il faut revenir à la formule, respecter le domaine et justifier chaque équivalence. La lecture graphique et le calcul sont deux outils complémentaires.

2 La carte d'identité d'une fonction

2.1 Domaine, signe et variations

Définition | Trois informations différentes

- Le **domaine** D_f contient les nombres x pour lesquels $f(x)$ existe.
- Le **signe** compare $f(x)$ à 0.
- Les **variations** comparent $f(a)$ et $f(b)$ lorsque $a < b$.

Ces informations ne doivent pas être confondues. Par exemple, la fonction carré est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas croissante sur tout $\mathbb{R}$.

2.2 Fonction paire : symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

Définition | Parité

Une fonction f définie sur un domaine symétrique par rapport à 0 est **paire** lorsque

$$f(-x) = f(x)$$

pour tout x de son domaine.

Démonstration | Pourquoi la courbe est-elle symétrique ?

Si $M(x; f(x))$ appartient à $\mathcal{C}_f$, alors le point d'abscisse $-x$ a pour ordonnée $f(-x) = f(x)$. Le point $M'(-x; f(x))$ appartient donc aussi à la courbe. Les points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

2.3 Fonction impaire : symétrie par rapport à l'origine

Définition | Imparité

Une fonction f définie sur un domaine symétrique par rapport à 0 est **impaire** lorsque

$$f(-x) = -f(x)$$

pour tout x de son domaine.

Démonstration | Pourquoi la courbe est-elle symétrique ?

Si $M(x; f(x))$ appartient à $\mathcal{C}_f$, alors $f(-x) = -f(x)$. Le point $M'(-x; -f(x))$ appartient aussi à la courbe. Or M' est le symétrique de M par rapport à l'origine.

Attention | Paire ou impaire n'est pas obligatoire

Une fonction peut être paire, impaire, ou ni l'une ni l'autre. De plus, on ne cherche pas la parité si le domaine n'est pas symétrique par rapport à 0. Par exemple, la fonction racine carrée est définie sur $[0; +\infty[$: on ne la classe ni paire ni impaire.

3 \ La fonction affine

3.1 Formule et droite représentative

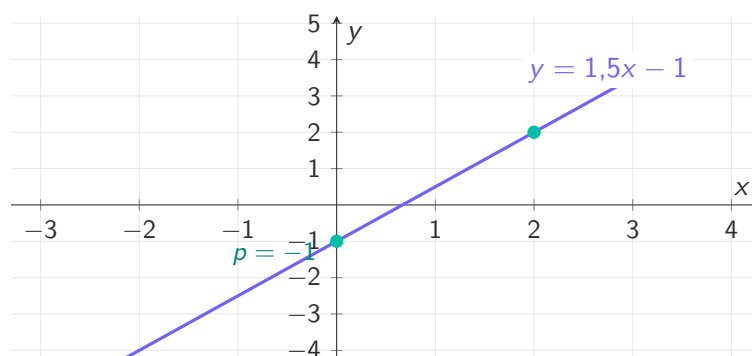
Définition | Fonction affine

Une fonction affine est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = mx + p,$$

où m et p sont des nombres réels. Sa courbe est une droite :

- m est le **coefficient directeur** ;
- $p = f(0)$ est l'**ordonnée à l'origine**.



3.2 Variations

Théorème | Le signe de m décide

- Si $m > 0$, la fonction affine est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $m < 0$, elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $m = 0$, elle est constante.

Démonstration | Comparer $f(a)$ et $f(b)$

Prenons $a < b$. Alors

$$f(b) - f(a) = (mb + p) - (ma + p) = m(b - a).$$

Comme $b - a > 0$, le signe de $f(b) - f(a)$ est exactement celui de m . Si $m > 0$, alors $f(b) > f(a)$; si $m < 0$, alors $f(b) < f(a)$; si $m = 0$, alors $f(b) = f(a)$.

3.3 Signe

Supposons $m \neq 0$. La fonction s'annule une seule fois :

$$mx + p = 0 \text{ si et seulement si } x = -\frac{p}{m}.$$

Si $m > 0$, elle est négative à gauche de cette racine et positive à droite. Si $m < 0$, c'est l'inverse.

✂ Méthode | Retrouver le signe sans réciter

Place d'abord la racine $\alpha = -p/m$. Puis regarde le sens de la droite : une droite montante traverse l'axe de bas en haut ; une droite descendante le traverse de haut en bas.

4 ■ La fonction carré

4.1 Définition, signe et symétrie

📖 Définition | Fonction carré

La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par

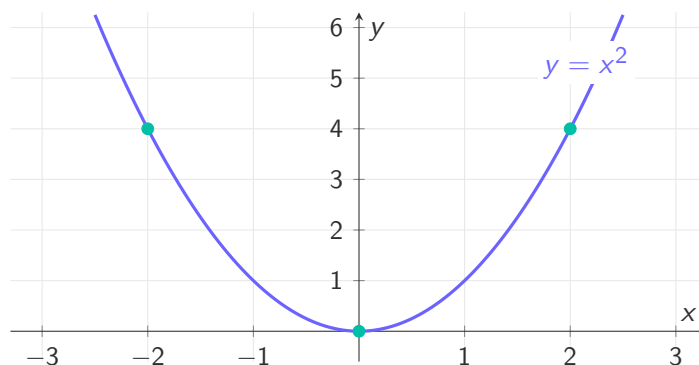
$$q(x) = x^2.$$

Sa courbe est une parabole de sommet $O(0;0)$.

Pour tout réel x , $x^2 \geq 0$, et $x^2 = 0$ si et seulement si $x = 0$. De plus,

$$q(-x) = (-x)^2 = x^2 = q(x),$$

donc q est paire.



4.2 Variations

★ Théorème | Variations de la fonction carré

La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$, puis strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Son minimum sur $\mathbb{R}$ est 0, atteint en $x = 0$.

🔧 Démonstration | Démonstration sur les deux demi-droites

Si $0 \leq a < b$, alors

$$b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) > 0,$$

donc $a^2 < b^2$: la fonction est croissante sur $[0; +\infty[$.

Si $a < b \leq 0$, alors $a - b < 0$ et $a + b < 0$. Ainsi

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) > 0,$$

donc $a^2 > b^2$: la fonction est décroissante sur $] -\infty; 0]$.

4.3 Équations et inéquations

Pour $k \in \mathbb{R}$:

$$x^2 = k \begin{cases} \text{n'a aucune solution} & \text{si } k < 0, \\ \text{a pour unique solution } 0 & \text{si } k = 0, \\ \text{a pour solutions } -\sqrt{k} \text{ et } \sqrt{k} & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

Pour $a \geq 0$, la distance de x à 0 est $|x|$. On obtient :

$$x^2 \leq a^2 \text{ si et seulement si } |x| \leq a \text{ si et seulement si } x \in [-a; a],$$

$$x^2 \geq a^2 \text{ si et seulement si } |x| \geq a \text{ si et seulement si } x \in]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[.$$

⚠ Attention | Ne pas prendre la racine membre à membre sans réfléchir

De $x^2 = 9$, on obtient $x = -3$ ou $x = 3$, pas seulement $x = 3$. Le carré efface le signe ; il faut donc retrouver toutes les possibilités.

5 ↔ La fonction valeur absolue

5.1 Distance à zéro

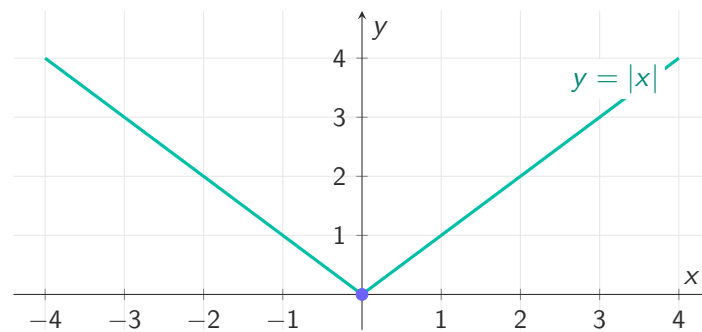
📖 Définition | Valeur absolue

La valeur absolue de x est sa distance à 0 :

$$v(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $|-4| = 4$, car la distance entre -4 et 0 vaut 4. Pour tout x , $|x| \geq 0$, et $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$. De plus, $|-x| = |x|$: la fonction valeur absolue est paire.



5.2 Variations et résolutions

Sur $] -\infty; 0]$, $|x| = -x$: c'est une fonction affine de coefficient -1 , donc elle est décroissante. Sur $[0; +\infty[$, $|x| = x$: elle est croissante. Son minimum est 0.

Pour $a \geq 0$:

$$|x| = a \text{ si et seulement si } x = -a \text{ ou } x = a,$$

$$|x| \leq a \text{ si et seulement si } x \in [-a; a], \quad |x| \geq a \text{ si et seulement si } x \in]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[.$$

Exemple | Une distance à un autre centre

$$|x - 3| \leq 2$$

signifie que la distance entre x et 3 est au plus 2. Donc

$$x \in [3 - 2; 3 + 2] = [1; 5].$$

6 La fonction inverse

6.1 Domaine, signe et symétrie

Définition | Fonction inverse

La fonction inverse est définie par

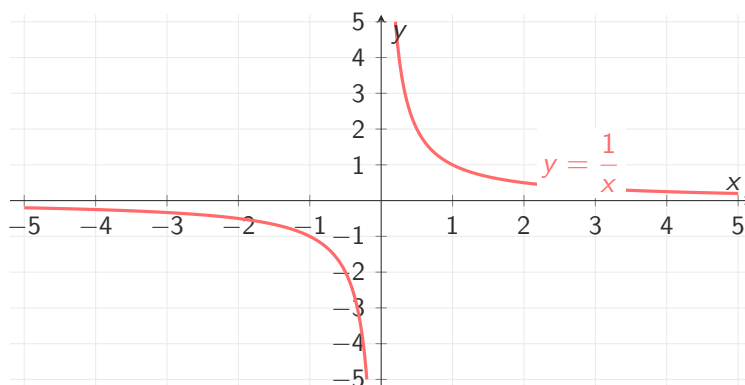
$$i(x) = \frac{1}{x}$$

sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Le nombre 0 est interdit car une division par zéro n'est pas définie.

Le numérateur 1 est positif : $1/x$ a donc le signe de x . La fonction ne s'annule jamais. Enfin,

$$i(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -i(x),$$

donc la fonction inverse est impaire.



6.2 Variations

★ Théorème | Deux intervalles séparés

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Démonstration | Démonstration officielle

Prenons $a < b$ dans un même intervalle, donc a et b ont le même signe et $ab > 0$. Alors

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a - b}{ab}.$$

Le numérateur $a - b$ est négatif et le dénominateur ab est positif. Ainsi $1/b - 1/a < 0$, donc $1/b < 1/a$.

⚠ Attention | Décroissante sur chaque intervalle, pas sur tout le domaine

On ne traverse jamais 0 dans la preuve. Par exemple $-1 < 1$, mais $i(-1) = -1 < 1 = i(1)$: cette comparaison ne correspond pas à une décroissance sur tout $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

6.3 Équations et inéquations

L'équation $1/x = k$ n'a aucune solution si $k = 0$. Si $k \neq 0$, elle a l'unique solution $x = 1/k$.

✂ Méthode | Pour une inéquation, tout ramener d'un côté

On ne multiplie pas directement par x , car son signe est inconnu. On écrit un seul quotient, puis on utilise un tableau de signes. Par exemple,

$$\frac{1}{x} \leq 2 \text{ si et seulement si } \frac{1 - 2x}{x} \leq 0.$$

Les nombres critiques sont 0 (interdit) et $1/2$ (zéro). Le tableau de signes donne

$$x \in]-\infty; 0[\cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[.$$

7 $\sqrt{x}$ La fonction racine carrée

7.1 Domaine et courbe

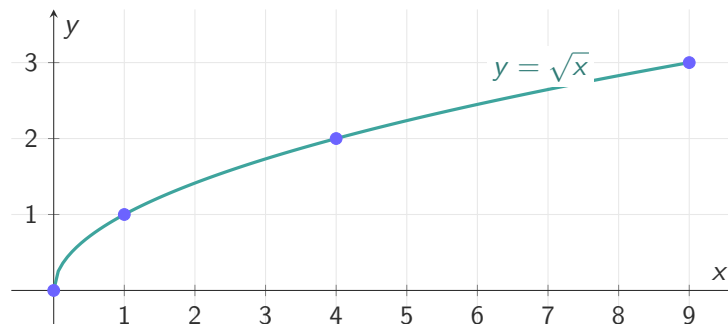
Définition | Fonction racine carrée

La fonction racine carrée est définie par

$$r(x) = \sqrt{x}$$

sur $[0; +\infty[$. Par définition, $\sqrt{x}$ est l'unique nombre positif ou nul dont le carré vaut x .

La racine carrée est toujours positive ou nulle et $\sqrt{x} = 0$ si et seulement si $x = 0$.



7.2 Variations

Théorème | La racine carrée est croissante

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Démonstration | Rationaliser la différence

Prenons $0 \leq a < b$. Comme $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$,

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} > 0.$$

Donc $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

7.3 Résoudre

L'équation $\sqrt{x} = k$ impose d'abord $k \geq 0$. Si $k \geq 0$,

$$\sqrt{x} = k \text{ si et seulement si } x = k^2.$$

Pour $k \geq 0$, la croissance de la fonction donne

$$\sqrt{x} \leq k \text{ si et seulement si } 0 \leq x \leq k^2.$$

⚠ Attention | Vérifier le signe avant d'élever au carré

L'équation $\sqrt{x} = -2$ n'a aucune solution, même si $x = 4$ apparaît après une élévation au carré. Une racine carrée n'est jamais négative.

7.4 Lien avec la fonction carré

Sur $[0; +\infty[$, les fonctions carré et racine carrée annulent leurs effets :

$$(\sqrt{x})^2 = x \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2} = x \quad \text{si } x \geq 0.$$

Démonstration | Symétrie par rapport à $y = x$

Un point $(a; a^2)$ de la parabole avec $a \geq 0$ devient le point $(a^2; a)$ lorsqu'on échange ses coordonnées. Or $a = \sqrt{a^2}$: ce nouveau point appartient à la courbe de la racine carrée. Échanger les coordonnées réalise une symétrie par rapport à la droite $y = x$.

8 La fonction cube

8.1 Définition, signe et symétrie

Définition | Fonction cube

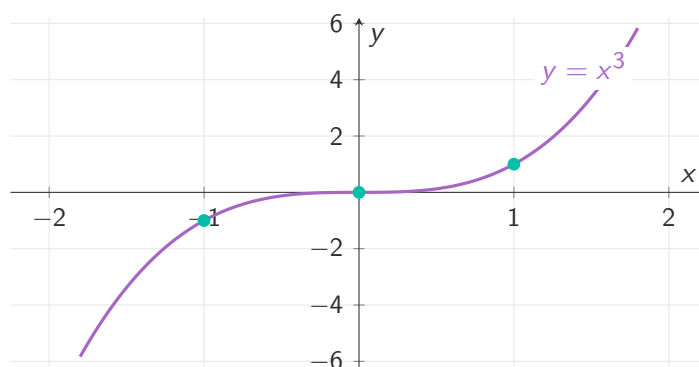
La fonction cube est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$c(x) = x^3.$$

Le cube conserve le signe : $x^3 < 0$ si $x < 0$, $x^3 = 0$ si $x = 0$, et $x^3 > 0$ si $x > 0$. De plus,

$$c(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -c(x),$$

donc la fonction cube est impaire.



8.2 Variations

★ Théorème | La fonction cube est croissante

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

 Démonstration | Factoriser une différence de cubes

Prenons $a < b$. Alors

$$b^3 - a^3 = (b - a)(a^2 + ab + b^2).$$

Le premier facteur est positif. Le second vérifie

$$a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0.$$

Il ne peut être nul que si $a = b = 0$, ce qui contredit $a < b$. Il est donc strictement positif, et $b^3 > a^3$.

Pour tout réel k , l'équation $x^3 = k$ possède une unique solution, notée $\sqrt[3]{k}$. La croissance donne aussi

$$x^3 \leq k \text{ si et seulement si } x \leq \sqrt[3]{k}.$$

9 Le répertoire des courbes

9.1 Une vue d'ensemble

Fonction	Formule	Domaine	Symétrie	Signe
Affine	$mx + p$	$\mathbb{R}$	cas particulier	dépend de m, p
Carré	x^2	$\mathbb{R}$	paire	positif ou nul
Valeur absolue	$ x $	$\mathbb{R}$	paire	positif ou nul
Inverse	$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	impaire	signe de x
Racine carrée	$\sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	aucune parité	positif ou nul
Cube	x^3	$\mathbb{R}$	impaire	signe de x

 Intuition | Reconnaître sans confondre

- x^2 forme un U arrondi ; $|x|$ forme un V.
- $1/x$ possède deux branches et n'atteint jamais les axes.
- $\sqrt{x}$ commence à l'origine et n'existe qu'à droite.
- x^3 traverse l'origine avec une forme en S.

9.2 Comparer x^2 , x et $\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$

★ Théorème | Position relative des trois courbes

Pour $0 \leq x \leq 1$,

$$x^2 \leq x \leq \sqrt{x}.$$

Pour $x \geq 1$,

$$\sqrt{x} \leq x \leq x^2.$$

Les trois courbes se rencontrent en $(0;0)$ et $(1;1)$.

Démonstration | Démonstration officielle

Si $0 \leq x \leq 1$, alors $x \geq 0$ et $1 - x \geq 0$, donc

$$x - x^2 = x(1 - x) \geq 0,$$

d'où $x^2 \leq x$. Comme $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$,

$$\sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) \geq 0,$$

d'où $x \leq \sqrt{x}$.

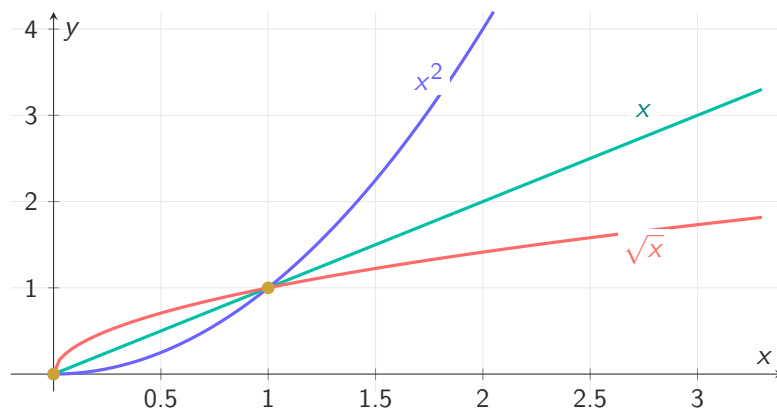
Si $x \geq 1$, alors

$$x^2 - x = x(x - 1) \geq 0$$

et

$$x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \geq 0.$$

Ainsi $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$.



10 Résoudre avec une fonction de référence

10.1 Le protocole fiable

Méthode | Domaine, forme, résolution, contrôle

1. Écris le domaine avant de transformer l'égalité ou l'inégalité.
2. Isole la fonction de référence : carré, valeur absolue, inverse, racine ou cube.
3. Utilise sa propriété exacte.
4. Intersecte avec le domaine et vérifie les bornes.

Exemple | Isoler un carré

Réolvons $2x^2 - 3 = 5$:

$$2x^2 - 3 = 5 \text{ si et seulement si } x^2 = 4 \text{ si et seulement si } x = -2 \text{ ou } x = 2.$$

Exemple | Isoler une valeur absolue

$$3|x - 1| + 2 \leq 8 \text{ si et seulement si } |x - 1| \leq 2 \text{ si et seulement si } x \in [-1; 3].$$

Exemple | Une racine carrée

Réolvons $\sqrt{2x - 1} = 3$. Le domaine impose $2x - 1 \geq 0$. Comme $3 \geq 0$,

$$\sqrt{2x - 1} = 3 \text{ si et seulement si } 2x - 1 = 9 \text{ si et seulement si } x = 5.$$

La valeur 5 appartient au domaine et vérifie l'équation.

10.2 Comparer sans calculatrice

Pour comparer deux images, on utilise le domaine où l'on se trouve et le sens de variation. Par exemple, $3 < 5$ et la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$, donc

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{5}.$$

De même, $-4 < -2 \leq 0$ et la fonction carré est décroissante sur $] -\infty; 0]$, donc

$$(-4)^2 > (-2)^2.$$

11 Fonctions de référence en Python

11.1 Définir les fonctions

```
1 from math import sqrt
2
```

```

3 def carre(x):
4     return x**2
5
6 def inverse(x):
7     return 1/x
8
9 def racine(x):
10    return sqrt(x)

```

⚠ Attention | Le programme doit aussi respecter le domaine

`inverse(0)` provoque une division par zéro et `racine(-1)` n'est pas un réel. Le code n'efface pas les restrictions mathématiques.

11.2 Construire une table de comparaison

```

1 from math import sqrt
2
3 for k in range(0, 9):
4     x = k/4
5     print(x, x**2, x, sqrt(x))

```

Ce programme observe les positions relatives pour $x = 0, 0,25, \dots, 2$. Il fournit des exemples, mais la démonstration algébrique prouve le résultat pour une infinité de réels.

12 Pour aller plus loin - guidé et facultatif

Cette section prolonge explicitement le programme officiel. Elle est accessible à tous : elle n'utilise que les fonctions de référence et les transformations déjà comprises dans la fiche précédente.

12.1 La forme $af(x - h) + k$

Partons d'une courbe $y = f(x)$ et considérons

$$g(x) = af(x - h) + k.$$

- $x - h$ déplace horizontalement la courbe de h unités ;
- multiplier par a multiplie toutes les ordonnées par a ; si $a < 0$, la courbe est aussi retournée ;
- ajouter k déplace verticalement la courbe de k unités.

 *Démonstration | Suivre un point sans magie*

Si $(u; f(u))$ appartient à $\mathcal{C}_f$, choisissons $x = u + h$. Alors $x - h = u$ et

$$g(u + h) = af(u) + k.$$

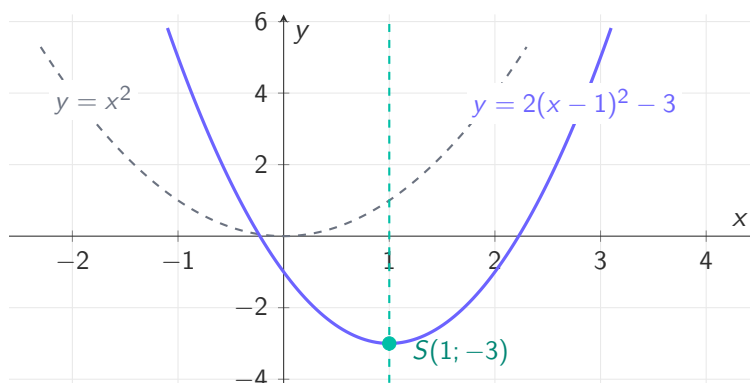
Le point correspondant de $\mathcal{C}_g$ est donc $(u + h; af(u) + k)$.

12.2 Exemple : une parabole transformée

Pour

$$g(x) = 2(x - 1)^2 - 3,$$

on part de x^2 , on déplace la courbe d'une unité vers la droite, on double les ordonnées puis on descend de 3. Le sommet devient $S(1; -3)$ et l'axe de symétrie est $x = 1$.



Intuition | L'approfondissement appartient à tout le monde

Une transformation compliquée devient une suite de gestes simples. Tu peux toujours repartir d'un point connu de la courbe de référence et suivre ses coordonnées étape par étape.

13 Boîte à outils et erreurs à éviter

Méthode | Carré

$x^2 = k$: regarde d'abord le signe de k , puis pense aux deux signes lorsque $k > 0$.

Méthode | Racine

Impose le domaine et vérifie que l'autre membre est positif avant d'élever au carré.

Méthode | Valeur absolue

$|x - a| \leq r$ décrit les points situés à une distance au plus r de a .

Attention | Carré d'une racine

Pour $x \geq 0$, $(\sqrt{x})^2 = x$. Mais pour tout réel x ,

$$\sqrt{x^2} = |x|,$$

et non toujours x .

Méthode | Inverse

Écris un seul quotient et construis son signe. Ne multiplie jamais par une inconnue de signe inconnu.

Attention | Comparer les entrées

Le sens de variation n'est utilisable que sur un même intervalle de monotonie.

14 Exercices

Pour chaque exercice, commence par identifier le domaine et la fonction de référence. Les étoiles indiquent une progression : elles ne ferment la porte à personne.

Exercice 1 : Reconnaître la famille

Pour chaque fonction, donne son domaine, son nom de référence et une propriété essentielle :

$$a(x) = x^2, \quad b(x) = \frac{1}{x}, \quad c(x) = |x|, \quad d(x) = \sqrt{x}, \quad e(x) = x^3, \quad f(x) = -2x + 5.$$

Exercice 2 : Calculer des images

Calcule exactement :

$$q(-3), \quad q\left(\frac{1}{2}\right), \quad v(-7), \quad i(-4), \quad r(49), \quad c(-2).$$

On utilise respectivement $q(x) = x^2$, $v(x) = |x|$, $i(x) = 1/x$, $r(x) = \sqrt{x}$ et $c(x) = x^3$.

Exercice 3 : Une fonction affine

Soit $f(x) = -3x + 6$.

1. Donne le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.
2. Calcule $f(-1)$ et $f(4)$.
3. Détermine la racine de f .
4. Donne son sens de variation et son signe.

Exercice 4 : Carrés et distances

1. Résous $x^2 = 25$, puis $x^2 = -4$.
2. Résous $x^2 \leq 16$.
3. Résous $x^2 > 9$.
4. Explique graphiquement le nombre de solutions de $x^2 = k$ selon k .

Exercice 5 : Valeur absolue

1. Résous $|x| = 6$.
2. Résous $|x - 2| \leq 3$.
3. Résous $|2x + 1| > 5$.
4. Traduis $|x + 4| \leq 1,5$ par une phrase de distance.

Exercice 6 : La fonction inverse

1. Compare sans décimales $1/3$ et $1/5$, puis $-1/4$ et $-1/7$.
2. Résous $1/x = -2$.
3. Résous $1/x \geq 1$ à l'aide d'un tableau de signes.
4. Pourquoi l'équation $1/x = 0$ n'a-t-elle aucune solution ?

Exercice 7 ★★☆☆ : La racine carrée

1. Donne le domaine de $x \mapsto \sqrt{3x-6}$.
2. Résous $\sqrt{x+5} = 4$.
3. Résous $\sqrt{2x-1} \leq 3$.
4. Explique pourquoi $\sqrt{x^2} = |x|$.

Exercice 8 ★★☆☆ : La fonction cube

1. Compare $(-3)^3$ et $(-2)^3$ sans tout développer.
2. Résous $x^3 = -27$.
3. Résous $2x^3 + 1 \leq 17$.
4. Montre que $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ et donne son signe.

Exercice 9 ★★☆☆ : Comparer trois fonctions

1. Range dans l'ordre croissant $0,4^2$, $0,4$ et $\sqrt{0,4}$ sans calculatrice.
2. Range dans l'ordre croissant 3^2 , 3 et $\sqrt{3}$.
3. Résous sur $[0; +\infty[$ l'inéquation $x^2 \leq x$.
4. Résous sur $[0; +\infty[$ l'inéquation $\sqrt{x} \leq x$.

Exercice 10 ★★☆☆ : Équations mélangées

Résous dans $\mathbb{R}$:

$$\text{a) } 3x^2 - 12 = 0, \quad \text{b) } 2|x+1| - 6 = 0, \quad \text{c) } \frac{4}{x} = 5, \quad \text{d) } \sqrt{5x-1} = 2.$$

Exercice 11 ★★★☆☆ : Inéquations mélangées

Résous :

$$\text{a) } 2x^2 - 8 \leq 0, \quad \text{b) } |3x-2| \geq 4, \quad \text{c) } \frac{1}{x} < -\frac{1}{2}, \quad \text{d) } \sqrt{x+1} > 2.$$

Exercice 12 ★★☆☆ : Distance de freinage

À la vitesse v en km/h, une estimation de la distance de freinage sur route sèche est

$$d(v) = \frac{v^2}{200}, \quad v \in [0; 130].$$

1. Calcule $d(50)$ et $d(90)$.
2. À partir de quelle vitesse cette distance atteint-elle 50 m ?
3. Montre que doubler la vitesse multiplie la distance de freinage par 4.
4. Explique pourquoi le domaine du modèle n'est pas $\mathbb{R}$.

Exercice 13 ★★☆☆ : Table de valeurs en Python

Complète le programme afin d'afficher x , x^2 , $\sqrt{x}$ et $1/x$ pour $x \in \{0,25; 0,5; 1; 2; 4\}$.

```
1 from math import sqrt
2
```

```
3 valeurs = [0.25, 0.5, 1, 2, 4]
4 for x in valeurs:
5     print(...)
```

Explique pourquoi cette expérience numérique ne remplace pas une démonstration.

Exercice 14 ★★☆☆ : Une parabole transformée - pour aller plus loin

On pose $g(x) = -2(x+1)^2 + 4$.

1. Décris les transformations qui font passer de $y = x^2$ à $\mathcal{C}_g$.
2. Donne le sommet et l'axe de symétrie.
3. Résous $g(x) = 2$.
4. Résous $g(x) \geq 0$.

Exercice 15 ★★☆☆ : Synthèse sans calculatrice

Soit

$$F(x) = |x-2| + \frac{4}{|x-2|+1}.$$

1. Justifie que F est définie sur $\mathbb{R}$ et que $F(2-t) = F(2+t)$.
2. Calcule $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$ et $F(4)$.
3. En posant $u = |x-2|+1$, montre que

$$F(x) - 3 = \frac{(u-2)^2}{u}.$$

4. Détermine les solutions de $F(x) = 3$.

15 🦋 Problème : *Le relais de secours* ★★ ★

🧠 Intuition | Le défi

Une route de 8 km traverse une zone isolée. Il faut choisir l'emplacement d'un relais de secours. Le modèle combine une distance, représentée par une valeur absolue, et un coût de transmission, représenté par une fonction inverse. Le problème est difficile, mais chaque étape utilise une brique déjà démontrée.

On repère la route par l'intervalle $[0; 8]$. Son centre a pour abscisse 4. Pour un relais placé à l'abscisse x , on pose

$$d(x) = |x - 4|$$

et

$$C(x) = d(x) + 1 + \frac{9}{d(x) + 1}.$$

Le nombre $C(x)$ est un indice de coût : plus il est petit, meilleur est le compromis.

Partie A - Comprendre la distance

1. Donne le domaine physique de x et l'ensemble des valeurs possibles de $d(x)$.
2. Calcule $d(0)$, $d(2)$, $d(4)$, $d(6)$ et $d(8)$.
3. Montre que, pour tout $t \in [0; 4]$, $d(4 - t) = d(4 + t)$.
4. Dédus-en que $C(4 - t) = C(4 + t)$. Interprète cette égalité.

Partie B - Transformer le problème

On pose

$$u = d(x) + 1.$$

5. Montre que $u \in [1; 5]$ et que

$$C(x) = u + \frac{9}{u}.$$

6. Vérifie l'identité

$$u + \frac{9}{u} - 6 = \frac{(u - 3)^2}{u}.$$

7. Pourquoi le membre de droite est-il toujours positif ou nul ?
8. Dédus la valeur minimale de $C(x)$ et tous les emplacements où elle est atteinte.

Partie C - Une exigence de coût

Le service impose $C(x) \leq 6,5$.

9. Montre que cette inéquation équivaut à

$$2u^2 - 13u + 18 \leq 0.$$

10. Factorise $2u^2 - 13u + 18$.
11. Résous l'inéquation en u , en tenant compte de $u \in [1; 5]$.
12. Reviens à $d(x)$ puis à x . Donne l'ensemble exact des emplacements acceptables.

Partie D - Comparer deux modèles

Un second bureau propose l'indice affine par morceaux

$$A(x) = 6 + \frac{1}{2}|x - 4|.$$

13. En fonction de u , montre que

$$C(x) - A(x) = \frac{(u - 2)(u - 9)}{2u}.$$

14. Détermine les emplacements où les deux modèles donnent le même indice.

15. Sur quelles parties de la route le modèle C est-il plus avantageux que le modèle A ?

Partie E - Vérification numérique

```
1 def cout(x):  
2     d = abs(x - 4)  
3     return d + 1 + 9/(d + 1)  
4  
5 meilleur_x = 0  
6 meilleur_cout = cout(0)  
7  
8 for k in range(81):  
9     x = k/10  
10    if cout(x) < meilleur_cout:  
11        meilleur_x = x  
12        meilleur_cout = cout(x)  
13  
14 print(meilleur_x, meilleur_cout)
```

16. Explique le rôle de chaque variable et ce que cherche la boucle.

17. Quel emplacement le programme affiche-t-il en premier ? Pourquoi ne montre-t-il pas, à lui seul, qu'il existe un second emplacement optimal ?

18. Explique pourquoi la preuve de la partie B est plus forte que le balayage numérique.

16 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Identifier avant de calculer*

Fonction	Famille	Domaine	Propriété essentielle
$a(x) = x^2$	carré	$\mathbb{R}$	paire, positive ou nulle
$b(x) = 1/x$	inverse	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	impaire, signe de x
$c(x) = x $	valeur absolue	$\mathbb{R}$	distance à 0, paire
$d(x) = \sqrt{x}$	racine carrée	$[0; +\infty[$	croissante, positive ou nulle
$e(x) = x^3$	cube	$\mathbb{R}$	impaire et croissante
$f(x) = -2x + 5$	affine	$\mathbb{R}$	décroissante car $-2 < 0$

Corrigé 2

 *Démonstration / Respecter les parenthèses et les signes*

$$q(-3) = (-3)^2 = 9, \quad q\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$$v(-7) = |-7| = 7, \quad i(-4) = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}.$$

$$r(49) = \sqrt{49} = 7, \quad c(-2) = (-2)^3 = -8.$$

Le carré efface le signe, tandis que le cube le conserve.

Corrigé 3

 *Démonstration / Lire puis exploiter $mx + p$*

1. Dans $f(x) = -3x + 6$, le coefficient directeur est $m = -3$ et l'ordonnée à l'origine est $p = 6$.

2.

$$f(-1) = -3(-1) + 6 = 9, \quad f(4) = -12 + 6 = -6.$$

3.

$$f(x) = 0 \text{ si et seulement si } -3x + 6 = 0 \text{ si et seulement si } x = 2.$$

4. Comme $m = -3 < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. La droite descend et coupe l'axe en 2 :

$$f(x) > 0 \text{ si et seulement si } x < 2,$$

$$f(x) = 0 \text{ si et seulement si } x = 2,$$

$$f(x) < 0 \text{ si et seulement si } x > 2.$$

Corrigé 4

 *Démonstration / Utiliser la distance à zéro*

1.

$$x^2 = 25 \text{ si et seulement si } x = -5 \text{ ou } x = 5.$$

Comme un carré est positif ou nul, $x^2 = -4$ n'a aucune solution réelle.

2.

$$x^2 \leq 16 \text{ si et seulement si } |x| \leq 4 \text{ si et seulement si } x \in [-4; 4].$$

3.

$$x^2 > 9 \text{ si et seulement si } |x| > 3 \text{ si et seulement si } x \in]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[.$$

4. La droite horizontale $y = k$ ne coupe pas la parabole si $k < 0$, la touche au sommet si $k = 0$, et la coupe en deux points symétriques si $k > 0$.

Corrigé 5

 *Démonstration / Traduire une valeur absolue en distance*

1.

$$|x| = 6 \text{ si et seulement si } x = -6 \text{ ou } x = 6.$$

2.

$$|x - 2| \leq 3 \text{ si et seulement si } x \in [2 - 3; 2 + 3] = [-1; 5].$$

3. Pour être à une distance strictement supérieure à 5 de 0,

$$|2x + 1| > 5 \text{ si et seulement si } 2x + 1 < -5 \text{ ou } 2x + 1 > 5.$$

Donc

$$x < -3 \text{ ou } x > 2.$$

4. $|x + 4| = |x - (-4)|$. L'inégalité signifie : « la distance entre x et -4 est au plus 1,5 ».

Corrigé 6

 *Démonstration / Raisonner sur chaque intervalle de l'inverse*

1. Sur $]0; +\infty[$, l'inverse est décroissante. Comme $3 < 5$,

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{5}.$$

De plus, $-7 < -4 < 0$ et l'inverse est décroissante sur $] -\infty; 0[$, donc

$$-\frac{1}{7} > -\frac{1}{4}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad -\frac{1}{4} < -\frac{1}{7}.$$

2.

$$\frac{1}{x} = -2 \text{ si et seulement si } x = -\frac{1}{2}.$$

3. On écrit

$$\frac{1}{x} \geq 1 \text{ si et seulement si } \frac{1-x}{x} \geq 0.$$

Les valeurs critiques sont 0, interdit, et 1, zéro du numérateur. Le quotient est positif ou nul seulement sur

$$\boxed{]0; 1]}. \quad .$$

4. Le numérateur d'une fraction $1/x$ vaut toujours 1, jamais 0. La fonction inverse ne s'annule donc pas.

Corrigé 7

 *Démonstration / Domaine avant élévation au carré*

1. Il faut $3x - 6 \geq 0$, donc

$$D = [2; +\infty[.$$

2. Le membre de droite est positif :

$$\sqrt{x+5} = 4 \text{ si et seulement si } x+5 = 16 \text{ si et seulement si } x = 11.$$

La valeur 11 appartient bien au domaine.

3. Le domaine impose $2x - 1 \geq 0$, soit $x \geq 1/2$. Comme les deux membres sont positifs ou nuls,

$$\sqrt{2x-1} \leq 3 \text{ si et seulement si } 2x-1 \leq 9 \text{ si et seulement si } x \leq 5.$$

Par intersection,

$$\boxed{x \in \left[\frac{1}{2}; 5\right]}.$$

4. $|x|$ est positif ou nul et son carré vaut x^2 . C'est donc, par définition, l'unique racine carrée de x^2 :

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Corrigé 8

 *Démonstration / Exploiter la croissance du cube*

1. Comme $-3 < -2$ et que le cube est croissant,

$$(-3)^3 < (-2)^3.$$

2.

$$x^3 = -27 \text{ si et seulement si } x = -3.$$

3.

$$2x^3 + 1 \leq 17 \text{ si et seulement si } x^3 \leq 8 \text{ si et seulement si } x \leq 2.$$

4.

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1).$$

Les changements de signe se font en -1 , 0 et 1 :

$$x^3 - x \begin{cases} < 0 & \text{sur }]-\infty; -1[\cup]0; 1[, \\ = 0 & \text{pour } x \in \{-1; 0; 1\}, \\ > 0 & \text{sur }]-1; 0[\cup]1; +\infty[. \end{cases}$$

Corrigé 9

 *Démonstration* / Repérer si l'entrée est avant ou après 1

1. Comme $0 < 0,4 < 1$,

$$0,4^2 < 0,4 < \sqrt{0,4}.$$

2. Comme $3 > 1$,

$$\sqrt{3} < 3 < 3^2.$$

3. Sur $[0; +\infty[$,

$$x^2 \leq x \text{ si et seulement si } x(x - 1) \leq 0 \text{ si et seulement si } x \in [0; 1].$$

4. D'après la position relative, $\sqrt{x} \leq x$ pour $x = 0$ ou $x \geq 1$. Ainsi

$$S = \{0\} \cup [1; +\infty[.$$

Corrigé 10

 *Démonstration* / Isoler la fonction de référence

a)

$$3x^2 - 12 = 0 \text{ si et seulement si } x^2 = 4 \text{ si et seulement si } x = -2 \text{ ou } x = 2.$$

b)

$$2|x + 1| - 6 = 0 \text{ si et seulement si } |x + 1| = 3 \text{ si et seulement si } x + 1 = -3 \text{ ou } x + 1 = 3.$$

Donc $x = -4$ ou $x = 2$.

c)

$$\frac{4}{x} = 5 \text{ si et seulement si } x = \frac{4}{5}.$$

Cette valeur est non nulle, donc autorisée.

d) Le domaine impose $x \geq 1/5$. Comme $2 \geq 0$,

$$\sqrt{5x-1} = 2 \text{ si et seulement si } 5x-1 = 4 \text{ si et seulement si } x = 1.$$

Corrigé 11

 *Démonstration / Traiter les bornes avec soin*

a)

$$2x^2 - 8 \leq 0 \text{ si et seulement si } x^2 \leq 4 \text{ si et seulement si } x \in [-2; 2].$$

b)

$$|3x - 2| \geq 4 \text{ si et seulement si } 3x - 2 \leq -4 \text{ ou } 3x - 2 \geq 4.$$

Donc

$$x \leq -\frac{2}{3} \text{ ou } x \geq 2.$$

c)

$$\frac{1}{x} < -\frac{1}{2} \text{ si et seulement si } \frac{x+2}{2x} < 0.$$

Les valeurs critiques sont -2 et 0 . Le quotient est strictement négatif sur

$$]-2; 0[.$$

d) Le domaine est $[-1; +\infty[$. Les deux membres étant positifs,

$$\sqrt{x+1} > 2 \text{ si et seulement si } x+1 > 4 \text{ si et seulement si } x > 3.$$

Corrigé 12

 *Démonstration / Revenir aux unités et au domaine*

1.

$$d(50) = \frac{50^2}{200} = 12,5 \text{ m}, \quad d(90) = \frac{90^2}{200} = 40,5 \text{ m}.$$

2.

$$d(v) = 50 \text{ si et seulement si } v^2 = 10\,000.$$

Comme une vitesse du modèle est positive ou nulle, $v = 100 \text{ km/h}$.

3. Lorsque v et $2v$ appartiennent au domaine,

$$d(2v) = \frac{(2v)^2}{200} = 4 \frac{v^2}{200} = 4d(v).$$

4. Une vitesse négative n'a pas de sens ici, et le modèle annoncé n'est calibré que jusqu'à 130 km/h . Le domaine physique est donc $[0; 130]$, même si la formule algébrique existe pour tout réel.

Corrigé 13

 *Démonstration / Écrire les quatre sorties*

```
1 from math import sqrt
2
3 valeurs = [0.25, 0.5, 1, 2, 4]
4 for x in valeurs:
5     print(x, x**2, sqrt(x), 1/x)
```

Les cinq lignes suggèrent les positions relatives, mais elles ne testent qu'un nombre fini de valeurs. Une démonstration algébrique établit le résultat pour tous les réels d'un intervalle.

Corrigé 14

 *Démonstration / Suivre les transformations dans l'ordre*

1. Dans $g(x) = -2(x+1)^2 + 4$, remplacer x par $x+1$ déplace la parabole d'une unité vers la gauche. Multiplier les ordonnées par -2 les double et retourne la courbe. Ajouter 4 la monte de quatre unités.

2. Le sommet est

$$S(-1; 4),$$

et l'axe de symétrie est la droite $x = -1$.

- 3.

$$-2(x+1)^2 + 4 = 2 \text{ si et seulement si } (x+1)^2 = 1 \text{ si et seulement si } x+1 = -1 \text{ ou } x+1 = 1.$$

Donc $x = -2$ ou $x = 0$.

- 4.

$$-2(x+1)^2 + 4 \geq 0 \text{ si et seulement si } (x+1)^2 \leq 2 \text{ si et seulement si } |x+1| \leq \sqrt{2}.$$

Ainsi

$$x \in [-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}].$$

Corrigé 15

 *Démonstration / Ramener la valeur absolue à une variable positive*

1. $|x-2| \geq 0$, donc $|x-2| + 1 \geq 1$: le dénominateur n'est jamais nul. Ainsi $D_F = \mathbb{R}$. Pour tout réel t ,

$$|(2-t)-2| = |-t| = |t| = |(2+t)-2|,$$

donc $F(2-t) = F(2+t)$.

- 2.

$$F(0) = F(4) = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3},$$

$$F(1) = F(3) = 1 + \frac{4}{2} = 3, \quad F(2) = 4.$$

3. Posons $u = |x - 2| + 1$. Alors $|x - 2| = u - 1$ et $u > 0$. Donc

$$F(x) - 3 = u - 1 + \frac{4}{u} - 3 = u - 4 + \frac{4}{u} = \frac{u^2 - 4u + 4}{u} = \frac{(u - 2)^2}{u}.$$

4. Comme $u > 0$,

$$F(x) = 3 \text{ si et seulement si } \frac{(u - 2)^2}{u} = 0 \text{ si et seulement si } u = 2.$$

Ainsi $|x - 2| + 1 = 2$, donc $|x - 2| = 1$ et

$$\boxed{x = 1 \text{ ou } x = 3}.$$

Corrigé du problème : Le relais de secours

Démonstration / Partie A - Comprendre la distance

1. Le relais est placé sur la route, donc

$$x \in [0; 8].$$

La distance au centre varie de 0 km, au point $x = 4$, à 4 km, aux extrémités. Ainsi

$$d(x) \in [0; 4].$$

- 2.

x	0	2	4	6	8
$d(x)$	4	2	0	2	4

3. Pour $t \in [0; 4]$,

$$d(4 - t) = |(4 - t) - 4| = |-t| = t$$

et

$$d(4 + t) = |(4 + t) - 4| = |t| = t.$$

Donc $d(4 - t) = d(4 + t)$.

4. La formule de C ne dépend de x qu'à travers $d(x)$. Deux distances égales donnent donc

$$C(4 - t) = C(4 + t).$$

Deux emplacements symétriques par rapport au centre de la route ont le même indice de coût.

Démonstration / Partie B - Transformer le problème

5. Comme $d(x) \in [0; 4]$,

$$u = d(x) + 1 \in [1; 5].$$

En remplaçant $d(x) + 1$ par u ,

$$C(x) = u + \frac{9}{u}.$$

- 6.

$$u + \frac{9}{u} - 6 = \frac{u^2 - 6u + 9}{u} = \frac{(u - 3)^2}{u}.$$

7. Sur $[1; 5]$, le dénominateur u est strictement positif et le numérateur $(u - 3)^2$ est positif ou nul. Ainsi

$$\frac{(u - 3)^2}{u} \geq 0.$$

8. L'identité précédente donne $C(x) \geq 6$. L'égalité est obtenue si et seulement si

$$(u - 3)^2 = 0 \text{ si et seulement si } u = 3.$$

Alors $d(x) + 1 = 3$, donc $|x - 4| = 2$. Les deux emplacements optimaux et le coût minimal sont

$x = 2 \text{ km}$	ou	$x = 6 \text{ km},$	$C_{\min} = 6$
--------------------	----	---------------------	----------------

 Démonstration / Partie C - Une exigence de coût

9. Puisque $u > 0$, on peut multiplier par $2u > 0$ sans changer le sens :

$$u + \frac{9}{u} \leq \frac{13}{2} \text{ si et seulement si } 2u^2 + 18 \leq 13u \text{ si et seulement si } 2u^2 - 13u + 18 \leq 0.$$

10.

$$2u^2 - 13u + 18 = (2u - 9)(u - 2).$$

11. Les racines sont 2 et $9/2$. Le coefficient de u^2 est positif, donc le produit est négatif ou nul entre les racines :

$$u \in \left[2; \frac{9}{2}\right].$$

Cet intervalle est déjà contenu dans $[1; 5]$.

12. Comme $u = d(x) + 1$,

$$1 \leq d(x) \leq \frac{7}{2}.$$

Ainsi

$$1 \leq |x - 4| \leq 3,5.$$

Sur $[0; 8]$, cela donne exactement

$$x \in [0,5; 3] \cup [5; 7,5].$$

 Démonstration / Partie D - Comparer deux modèles

13. Comme $d(x) = u - 1$,

$$A(x) = 6 + \frac{1}{2}(u - 1) = \frac{11}{2} + \frac{u}{2}.$$

Donc

$$C(x) - A(x) = u + \frac{9}{u} - \frac{11}{2} - \frac{u}{2} = \frac{u^2 - 11u + 18}{2u} = \frac{(u - 2)(u - 9)}{2u}.$$

14. Dans le domaine $u \in [1; 5]$, le dénominateur $2u$ est positif et $u - 9$ est négatif. L'égalité est donc possible seulement pour $u = 2$. Alors $d(x) = 1$, donc

$$x = 3 \text{ ou } x = 5.$$

15. Sur $[1; 2[$, $u - 2 < 0$ et $u - 9 < 0$, donc $C - A > 0$: A est plus petit. Sur $]2; 5]$, les deux facteurs ont des signes opposés, donc $C - A < 0$: C est plus petit.

Or $u > 2$ si et seulement si $d(x) > 1$ si et seulement si $|x - 4| > 1$. Le modèle C est donc strictement plus avantageux sur

$$[0; 3[\cup]5; 8].$$

Les deux modèles sont égaux en 3 et 5.

 Démonstration | Partie E - Vérification numérique

16. x est l'emplacement testé, d sa distance au centre, `meilleur_x` le meilleur emplacement déjà rencontré et `meilleur_cout` son indice. La boucle teste 81 positions, de 0 à 8 par pas de 0,1, et conserve une position lorsqu'elle améliore strictement le coût.

17. Le programme affiche d'abord

2,0	6,0
-----	-----

Le point $x = 6$ possède le même coût, mais la condition utilise le signe strict $<$. Une égalité ne remplace donc pas la première position mémorisée.

18. Le balayage ne teste qu'un nombre fini de positions et dépend du pas 0,1. La preuve

$$C(x) - 6 = \frac{(u - 3)^2}{u} \geq 0$$

traite tous les réels de la route, donne la valeur minimale exacte et caractérise les deux cas d'égalité. Elle est donc plus forte.

 Intuition | Ce que le problème nous a appris

Une valeur absolue transforme une position en distance, puis la substitution $u = d + 1$ simplifie toute l'étude. Une identité avec un carré prouve un minimum exact ; un tableau de signes résout un seuil et compare deux modèles. Les fonctions de référence ne sont pas des dessins isolés : elles coopèrent dans un raisonnement complet.

Carte mémoire de la fiche

Méthode | Carré et valeur absolue

x^2 et $|x|$ sont paires, positives ou nulles. Pour $a \geq 0$:

$$x^2 \leq a^2 \text{ si et seulement si } |x| \leq a,$$

$$|x| \leq a \text{ si et seulement si } x \in [-a; a].$$

Méthode | Inverse

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La fonction est impaire et décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

Méthode | Racine carrée

$D = [0; +\infty[$. Elle est croissante. Vérifie le signe avant d'élever une égalité au carré.

Méthode | Cube

$D = \mathbb{R}$. La fonction est impaire, conserve le signe et est strictement croissante.

Attention | Le contrôle universel

Domaine, intervalle de variation, signe des multiplicateurs et bornes incluses : quatre contrôles empêchent la majorité des erreurs.

Intuition | Comparer sur $\mathbb{R}_+$

$$0 \leq x \leq 1 : x^2 \leq x \leq \sqrt{x},$$

$$x \geq 1 : \sqrt{x} \leq x \leq x^2.$$

Fin de la Fiche 7 - Fonctions de référence

Tu sais maintenant reconnaître les courbes usuelles, démontrer leurs signes et leurs variations, résoudre des équations ou inéquations et combiner plusieurs fonctions dans un problème.

Tu sais aussi transformer une courbe sans perdre le lien avec la fonction de départ.

Prochaine fiche : Variations et extrémums.