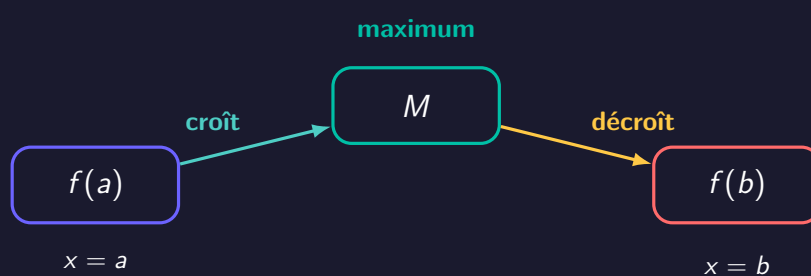


Variations et extrêmes

Lire, démontrer, optimiser

Croissance ■ Maximum ■ Modélisation



Seconde générale ■ Mathématiques ■ Programme officiel

 Cours complet

 15 exercices

 Problème défi

 Corrigés

Table des matières

1	❓ Pourquoi étudier les variations ?	4
1.1	Une valeur ne raconte pas toute l'histoire	4
1.2	Trois usages essentiels	4
2	↕ Croissance et décroissance	4
2.1	Définitions rigoureuses	4
2.2	Le signe d'une différence	5
3	📈 Courbe et tableau de variations	5
3.1	Lire la courbe de gauche à droite	5
3.2	Construire un tableau de variations	6
3.3	Exploiter un tableau	6
4	↑↓ Maximum et minimum	6
4.1	Définitions	6
4.2	L'intervalle change la réponse	7
5	↘ Variations d'une fonction affine	7
5.1	Le coefficient directeur mesure un changement	7
6	📊 Variations des fonctions de référence	8
6.1	Les tableaux à connaître	8
6.2	Démonstration pour le carré	8
6.3	Démonstration pour l'inverse	8
6.4	Démonstrations pour la racine et le cube	8
7	🧮 Démontrer avec l'algèbre	9
7.1	La forme centrée d'un carré	9
7.2	Transformer sans changer ou en inversant les variations	9
7.3	Somme de fonctions croissantes	10
8	🎯 Résoudre un problème d'optimisation	10
8.1	Le protocole complet	10
8.2	Exemple : un rectangle de périmètre fixé	10
9	⚖ Exploiter les variations	11
9.1	Comparer des images	11
9.2	Nombre de solutions de $f(x) = k$	11
9.3	Encadrer sans calculer exactement	11
10	🔗 Approcher un extremum avec Python	12
10.1	Le balayage	12
10.2	Précision et coût	12
11	📌 Pour aller plus loin - guidé et facultatif	12
11.1	Composer deux fonctions monotones	12
11.2	Mesurer la perte près d'un optimum	13

12	 Boîte à outils et erreurs à éviter	14
13	 Exercices	15
14	 Problème : <i>Le jardin au bord de la rivière</i> ★★ ★	18
15	 Corrigés détaillés	20
16	 Corrigé du problème	28
17	 Fiche-mémoire	32

1 ? Pourquoi étudier les variations ?

1.1 Une valeur ne raconte pas toute l'histoire

Savoir que $f(2) = 5$ donne une photographie. Savoir que f est croissante autour de 2 raconte un mouvement : lorsque l'entrée augmente, la sortie augmente aussi. Les variations permettent de comparer sans calculer toutes les images, de prévoir l'allure d'une courbe et de chercher la meilleure valeur possible.

Intuition | Monter, descendre, atteindre un sommet

Imagine que tu parcoures la courbe de gauche à droite. Si ton altitude augmente, la fonction croît ; si elle diminue, la fonction décroît. Un maximum est la plus haute altitude atteinte sur la portion étudiée, un minimum la plus basse.

1.2 Trois usages essentiels

- **Comparer** : de $a < b$, déduire l'ordre de $f(a)$ et $f(b)$.
- **Encadrer** : déterminer toutes les valeurs possibles de $f(x)$ sur un intervalle.
- **Optimiser** : choisir une longueur, un prix ou une durée qui rend une grandeur maximale ou minimale.

Attention | Croissante ne signifie pas positive

Le signe décrit la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses. La croissance décrit son mouvement de gauche à droite. La fonction $f(x) = x - 10$ est croissante sur $\mathbb{R}$, mais elle est négative pour $x < 10$.

2 ↗ Croissance et décroissance

2.1 Définitions rigoureuses

Définition | Fonction croissante

Une fonction f est **croissante** sur un intervalle I lorsque, pour tous $a, b \in I$,

$$a < b \implies f(a) \leq f(b).$$

Elle est **strictement croissante** si l'on obtient toujours $f(a) < f(b)$.

Définition | Fonction décroissante

Une fonction f est **décroissante** sur un intervalle I lorsque, pour tous $a, b \in I$,

$$a < b \implies f(a) \geq f(b).$$

Elle est **strictement décroissante** si l'on obtient toujours $f(a) > f(b)$.

Une fonction croissante ou décroissante sur un intervalle est dite **monotone** sur cet intervalle.

Intuition | Conserver ou inverser l'ordre

Une fonction croissante conserve l'ordre des entrées. Une fonction décroissante l'inverse. Les mots « croissante » et « décroissante » concernent toujours un intervalle précisé.

2.2 Le signe d'une différence

Pour prouver une variation, on choisit $a < b$ et on étudie

$$f(b) - f(a).$$

- Si cette différence est toujours positive ou nulle, f est croissante.
- Si elle est toujours négative ou nulle, f est décroissante.

Exemple | Une preuve courte

Soit $f(x) = 3x - 7$. Pour $a < b$,

$$f(b) - f(a) = 3b - 7 - (3a - 7) = 3(b - a) > 0.$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

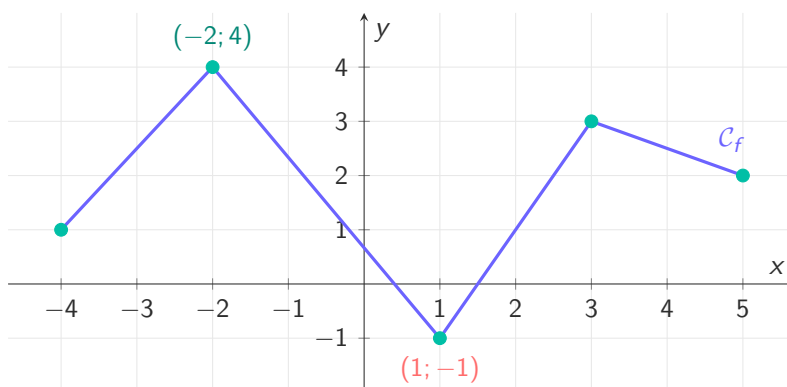
Attention | Deux exemples ne prouvent pas une variation

Calculer $f(0) < f(1) < f(2)$ montre seulement trois comparaisons. Une preuve doit traiter tous les couples $a < b$ de l'intervalle.

3 Courbe et tableau de variations

3.1 Lire la courbe de gauche à droite

Considérons la fonction f représentée ci-dessous sur $[-4; 5]$.



On lit successivement :

x	-4	-2	1	3	5
$f(x)$	1	4	-1	3	2
		↗	↘	↗	↘

3.2 Construire un tableau de variations

Méthode | Les quatre étapes

1. Repère le domaine et ses bornes.
2. Parcours la courbe de gauche à droite.
3. Note chaque abscisse où le sens change.
4. Inscris les valeurs de la fonction et relie-les par des flèches.

Le tableau précédent dit que f est croissante sur $[-4; -2]$, décroissante sur $[-2; 1]$, croissante sur $[1; 3]$, puis décroissante sur $[3; 5]$.

Attention | Une flèche ne remplace pas ses bornes

Dire « la fonction monte » ne suffit pas. Il faut annoncer précisément : « f est croissante sur $[-4; -2]$ ».

3.3 Exploiter un tableau

Sur $[-2; 1]$, f est décroissante. Comme $-1 < 0$, on peut écrire

$$f(-1) > f(0).$$

En revanche, le tableau seul ne permet pas de comparer directement $f(-3)$ et $f(2)$: les deux entrées appartiennent à des intervalles de monotonie différents.

Propriété | Encadrer une image

Si $x \in [-2; 1]$, la fonction décroît de 4 à -1 . Donc

$$-1 \leq f(x) \leq 4.$$

4 Maximum et minimum

4.1 Définitions

Définition | Maximum sur un intervalle

Le nombre M est le **maximum** de f sur I s'il existe $a \in I$ tel que

$$f(a) = M$$

et si, pour tout $x \in I$,

$$f(x) \leq M.$$

Définition | Minimum sur un intervalle

Le nombre m est le **minimum** de f sur I s'il existe $b \in I$ tel que

$$f(b) = m$$

et si, pour tout $x \in I$,

$$f(x) \geq m.$$

Pour la courbe précédente sur $[-4; 5]$, le maximum vaut 4, atteint en $x = -2$, et le minimum vaut -1 , atteint en $x = 1$.

Attention | Valeur et endroit

Le maximum est une **valeur de sortie**. On écrit : « le maximum vaut 4 et il est atteint pour $x = -2$ ». Dire « le maximum est $x = -2$ » confond l'abscisse et l'ordonnée.

4.2 L'intervalle change la réponse

Sur $[-4; 5]$, le maximum de f vaut 4. Mais sur $[1; 5]$, le maximum vaut 3, atteint en $x = 3$. Un extremum dépend toujours de l'intervalle étudié.

Intuition | Les extrémités comptent

Le maximum ou le minimum peut être atteint au milieu de l'intervalle, mais aussi à une extrémité. Il faut comparer toutes les valeurs indiquées dans le tableau, y compris celles des bornes.

5 \ Variations d'une fonction affine

5.1 Le coefficient directeur mesure un changement

Pour $f(x) = mx + p$ et $a \neq b$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m.$$

Le coefficient directeur m est le **taux d'accroissement** : lorsque l'entrée augmente de 1, la sortie varie de m .

Démonstration | Variations des fonctions affines

Prenons $a < b$. Alors $b - a > 0$ et

$$f(b) - f(a) = m(b - a).$$

Cette différence a le signe de m . Donc :

- si $m > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- si $m < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$;
- si $m = 0$, f est constante.

💡 Exemple | Interpréter une pente

Une cuve contient 120 L et perd 4 L par minute :

$$V(t) = 120 - 4t.$$

Le coefficient -4 indique une diminution de 4 L par minute. Sur le domaine physique $[0; 30]$, la fonction est décroissante.

6 Variations des fonctions de référence

6.1 Les tableaux à connaître

Fonction	Domaine et variations	Extremum
x^2	décroît sur $] -\infty; 0]$, croît sur $[0; +\infty[$	minimum 0 en 0
$ x $	décroît sur $] -\infty; 0]$, croît sur $[0; +\infty[$	minimum 0 en 0
$1/x$	décroît sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$	aucun sur son domaine entier
$\sqrt{x}$	croît sur $[0; +\infty[$	minimum 0 en 0
x^3	croît sur $\mathbb{R}$	aucun sur $\mathbb{R}$

6.2 Démonstration pour le carré

Si $0 \leq a < b$, alors

$$b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) > 0,$$

donc la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$.

Si $a < b \leq 0$, les nombres $a - b$ et $a + b$ sont négatifs, donc

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) > 0.$$

Ainsi $a^2 > b^2$: la fonction carré est décroissante sur $] -\infty; 0]$.

6.3 Démonstration pour l'inverse

Si $a < b$ sont dans un même intervalle de son domaine, alors $ab > 0$ et

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a - b}{ab} < 0.$$

Ainsi $1/b < 1/a$: l'inverse est décroissante sur chacune des deux parties de son domaine.

6.4 Démonstrations pour la racine et le cube

Pour $0 \leq a < b$,

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} > 0,$$

donc la racine carrée est croissante.

Pour $a < b$,

$$b^3 - a^3 = (b - a)(a^2 + ab + b^2) > 0,$$

car $b - a > 0$ et

$$a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 > 0.$$

La fonction cube est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

⚠ Attention | L'inverse possède deux intervalles

On ne dit pas que $1/x$ est décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. La fonction est décroissante séparément sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, car 0 coupe le domaine en deux.

7 📊 Démontrer avec l'algèbre

7.1 La forme centrée d'un carré

★ Théorème | Lire un extremum immédiatement

Pour

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

on a $(x - \alpha)^2 \geq 0$.

- Si $a > 0$, $f(x) \geq \beta$: le minimum vaut β , atteint en $x = \alpha$.
- Si $a < 0$, $f(x) \leq \beta$: le maximum vaut β , atteint en $x = \alpha$.

✎ Démonstration | Pourquoi l'égalité n'arrive-t-elle qu'au centre ?

Le carré $(x - \alpha)^2$ est nul si et seulement si $x = \alpha$. Dans tous les autres cas, il est strictement positif. C'est donc en $x = \alpha$ que $a(x - \alpha)^2 + \beta$ atteint exactement β .

💡 Exemple | Un maximum exact

$$g(x) = -2(x - 3)^2 + 7.$$

Comme $-2(x - 3)^2 \leq 0$, on a $g(x) \leq 7$. Le maximum de g sur $\mathbb{R}$ vaut 7 et il est atteint en $x = 3$.

7.2 Transformer sans changer ou en inversant les variations

✓ Propriété | Ajouter et multiplier

Si f est croissante sur I :

- $f + k$ est croissante sur I ;
- cf est croissante si $c > 0$;

— cf est décroissante si $c < 0$.

Les mêmes règles s'appliquent en partant d'une fonction décroissante.

 *Démonstration / Suivre une inégalité*

Si $a < b$ et $f(a) \leq f(b)$, alors

$$f(a) + k \leq f(b) + k.$$

Si $c > 0$, multiplier conserve le sens : $cf(a) \leq cf(b)$. Si $c < 0$, multiplier inverse le sens : $cf(a) \geq cf(b)$.

7.3 Somme de fonctions croissantes

Si f et g sont croissantes sur le même intervalle I , alors $f + g$ est croissante sur I . En effet, pour $a < b$,

$$f(a) \leq f(b) \quad \text{et} \quad g(a) \leq g(b).$$

En additionnant,

$$f(a) + g(a) \leq f(b) + g(b).$$

 **Attention | Une différence n'a pas de règle automatique**

Même si f et g sont croissantes, $f - g$ peut croître, décroître ou changer de sens. Il faut étudier l'expression obtenue.

8 Résoudre un problème d'optimisation

8.1 Le protocole complet

 **Méthode | De la situation au résultat**

1. Choisis une variable et indique son unité.
2. Détermine son domaine à partir des contraintes.
3. Exprime la grandeur à optimiser comme une fonction.
4. Transforme la formule ou utilise un tableau de variations.
5. Donne l'extremum, l'endroit où il est atteint et son interprétation.

8.2 Exemple : un rectangle de périmètre fixé

Un rectangle a un périmètre de 40 m. Si un côté mesure x m, l'autre mesure $20 - x$ m. Le domaine est $[0; 20]$ et l'aire vaut

$$A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2.$$

Complétons le carré :

$$A(x) = 100 - (x - 10)^2.$$

Comme $(x - 10)^2 \geq 0$,

$$A(x) \leq 100.$$

L'aire maximale vaut donc 100 m^2 , atteinte pour $x = 10$. Le rectangle optimal est un carré de côté 10 m .

Intuition | La preuve donne plus qu'un dessin

La courbe suggère le sommet. L'identité $A(x) = 100 - (x - 10)^2$ prouve que personne ne peut dépasser 100 et explique exactement pourquoi l'égalité a lieu pour $x = 10$.

9 = Exploiter les variations

9.1 Comparer des images

Méthode | Toujours vérifier l'intervalle

1. Place les deux entrées dans le domaine.
2. Vérifie qu'elles appartiennent à un même intervalle de monotonie.
3. Compare les entrées.
4. Conserve ou inverse l'ordre selon la variation.

9.2 Nombre de solutions de $f(x) = k$

Graphiquement, les solutions de $f(x) = k$ sont les abscisses des intersections avec la droite horizontale $y = k$. Un tableau de variations permet souvent de prévoir zéro, une ou plusieurs intersections.

Exemple | Une parabole tournée vers le bas

Pour $f(x) = 5 - (x - 2)^2$, le maximum vaut 5. Donc :

- si $k > 5$, l'équation $f(x) = k$ n'a aucune solution ;
- si $k = 5$, elle a une solution : $x = 2$;
- si $k < 5$, elle a deux solutions sur $\mathbb{R}$.

9.3 Encadrer sans calculer exactement

Si f est croissante sur $[a; b]$ et $x \in [a; b]$, alors

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Si f est décroissante, les bornes sont inversées :

$$f(b) \leq f(x) \leq f(a).$$

10 Approcher un extremum avec Python

10.1 Le balayage

On évalue la fonction sur une grille régulière et on conserve la meilleure valeur rencontrée.

```

1 def f(x):
2     return -(x - 1.73)**2 + 5.2
3
4 meilleur_x = 0
5 meilleur_y = f(0)
6
7 for k in range(51):
8     x = k/10
9     if f(x) > meilleur_y:
10         meilleur_x = x
11         meilleur_y = f(x)
12
13 print(meilleur_x, meilleur_y)

```

Avec un pas de 0,1, le programme affiche 1,7 et 5,1991. Le maximum exact vaut 5,2 en $x = 1,73$.

Attention | Une approximation n'est pas une preuve

Le programme ne teste que 51 nombres. Une valeur meilleure peut se cacher entre deux points de la grille. Réduire le pas améliore la précision mais ne transforme pas le balayage en démonstration.

10.2 Précision et coût

Sur un intervalle de longueur L , un pas h demande environ L/h évaluations. Diviser le pas par 10 donne environ dix fois plus de calculs. Il faut annoncer le pas utilisé et distinguer valeur exacte et valeur approchée.

11 Pour aller plus loin - guidé et facultatif

Cette partie dépasse le socle strict de la fiche, mais elle ne cache aucun prérequis. Elle prolonge la notion de composition rencontrée dans la fiche 06.

11.1 Composer deux fonctions monotones

★ Théorème | Règle des deux sens

Supposons que f soit monotone sur I et que g soit monotone sur les valeurs produites par f .

	g croissante	g décroissante
f croissante	$g \circ f$ croissante	$g \circ f$ décroissante
f décroissante	$g \circ f$ décroissante	$g \circ f$ croissante

Deux inversions de l'ordre se compensent.

 Démonstration | Cas croissante puis décroissante

Prenons $a < b$. Comme f est croissante,

$$f(a) \leq f(b).$$

Comme g est décroissante, elle inverse cet ordre :

$$g(f(a)) \geq g(f(b)).$$

Ainsi $g \circ f$ est décroissante.

 Exemple | Une composée simple

Sur $[0; +\infty[$, $f(x) = x^2$ est croissante et $g(u) = 1/(u + 1)$ est décroissante pour $u \geq 0$. Donc

$$h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

est décroissante sur $[0; +\infty[$.

11.2 Mesurer la perte près d'un optimum

Si

$$F(x) = M - a(x - \alpha)^2 \quad (a > 0),$$

alors

$$M - F(x) = a(x - \alpha)^2.$$

La perte par rapport au maximum dépend du carré de l'erreur sur x . Une petite imprécision autour de α peut donc avoir un effet très limité.

 Intuition | L'exigence n'exclut personne

Une idée avancée devient accessible lorsqu'on suit les inégalités une par une. Le niveau vient de la profondeur du raisonnement, pas d'un vocabulaire caché.

12 Boîte à outils et erreurs à éviter

Méthode | Comparer

Vérifie le même intervalle, puis conserve l'ordre si la fonction croît et inverse-le si elle décroît.

Méthode | Extremum

Donne la valeur, l'abscisse où elle est atteinte et l'intervalle étudié.

Méthode | Optimiser

Variable, domaine, fonction, preuve de l'extremum, interprétation avec unité.

Méthode | Forme centrée

$a(x - \alpha)^2 + \beta$ atteint β en $x = \alpha$: minimum si $a > 0$, maximum si $a < 0$.

Attention | Tableau partiel

Un tableau ne décrit que le domaine annoncé. N'invente aucune information en dehors.

Attention | Maximum et majorant

Un majorant n'est un maximum que s'il est réellement atteint par la fonction.

13 Exercices

Pour chaque exercice, justifie les comparaisons et précise les intervalles. Les étoiles indiquent une progression : elles ne ferment la porte à personne.

Exercice 1 : Le vocabulaire

Indique si chaque affirmation est vraie ou fausse, puis corrige les affirmations fausses.

1. Une fonction croissante est toujours positive.
2. Si f est décroissante et $2 < 5$, alors $f(2) \geq f(5)$.
3. Le maximum d'une fonction est une abscisse.
4. Une fonction peut être croissante sur un intervalle et décroissante sur un autre.

Exercice 2 : Lire un tableau

On donne :

x	-3	0	2	6
$f(x)$	1	5	-2	4

$\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$

1. Donne les intervalles de croissance et de décroissance.
2. Donne le maximum et le minimum sur $[-3; 6]$.
3. Compare $f(1)$ et $f(2)$, puis $f(3)$ et $f(5)$.
4. Encadre $f(x)$ lorsque $x \in [0; 2]$.

Exercice 3 : Comparer des images

Sans calculatrice, compare :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (-5)^2 \text{ et } (-3)^2, & \text{b) } \sqrt{7} \text{ et } \sqrt{11}, \\ \text{c) } \frac{1}{-6} \text{ et } \frac{1}{-2}, & \text{d) } (-4)^3 \text{ et } 2^3. \end{array}$$

Pour chaque comparaison, nomme l'intervalle de monotonie utilisé.

Exercice 4 : De la courbe au tableau

La courbe polygonale passe par

$$A(-3; -1), \quad B(-1; 2), \quad C(2; -2), \quad D(4; 1)$$

et relie ces points dans cet ordre.

1. Trace un repère et la courbe.
2. Construis le tableau de variations.
3. Donne les extrémums sur $[-3; 4]$.
4. Donne les extrémums sur $[0; 4]$.

Exercice 5 : Une fonction affine

Soit $f(x) = 7 - 2x$.

1. Calcule son taux d'accroissement entre 1 et 4.

2. Démontre que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. Encadre $f(x)$ si $x \in [-2; 3]$.
4. Détermine le maximum et le minimum de f sur $[-2; 3]$.

Exercice 6 ★★☆☆ : Une forme centrée

On pose $g(x) = 3(x - 2)^2 - 5$.

1. Détermine son minimum sur $\mathbb{R}$.
2. Compare $g(3)$ et $g(5)$ en utilisant la fonction carré.
3. Donne les variations de g .
4. Résous $g(x) \leq 7$.

Exercice 7 ★★☆☆ : Transformer les variations

On sait que f est croissante sur $[-1; 4]$. Donne, en justifiant, les variations sur cet intervalle de

$$u(x) = f(x) + 3, \quad v(x) = 5f(x), \quad w(x) = -2f(x), \quad z(x) = 7 - f(x).$$

Exercice 8 ★★☆☆ : Un extremum selon l'intervalle

Soit $h(x) = 9 - (x + 1)^2$.

1. Donne son maximum sur $\mathbb{R}$.
2. Donne ses variations sur $\mathbb{R}$.
3. Détermine ses extrémums sur $[-4; 0]$.
4. Détermine ses extrémums sur $[1; 5]$.

Exercice 9 ★★☆☆ : Encadrer une image

1. Si $x \in [2; 5]$, encadre x^2 , $\sqrt{x}$ et $1/x$.
2. Si $x \in [-5; -2]$, encadre x^2 et $1/x$.
3. Explique pourquoi le sens de variation de $1/x$ sur chaque intervalle est indispensable.

Exercice 10 ★★☆☆ : Aire sous contrainte

Un rectangle a un périmètre de 60 cm. Un côté mesure x cm.

1. Donne le domaine de x et exprime l'aire $A(x)$.
2. Montre que $A(x) = 225 - (x - 15)^2$.
3. Détermine l'aire maximale et les dimensions correspondantes.
4. Résous $A(x) \geq 200$.

Exercice 11 ★★☆☆ : Exploiter un tableau

Une fonction p est décroissante de 6 à -1 sur $[-2; 1]$, puis croissante de -1 à 5 sur $[1; 4]$.

1. Construis son tableau de variations.
2. Combien l'équation $p(x) = -1$ possède-t-elle de solutions indiquées par le tableau ?
3. Pour quelles valeurs de k la droite $y = k$ peut-elle couper les deux branches ?
4. Encadre $p(x)$ sur $[-2; 4]$.

Exercice 12 ★★☆☆ : Balayage Python

On veut approcher le maximum de

$$f(x) = 4 - (x - 2,37)^2$$

sur $[0; 5]$.

1. Complète un programme de balayage avec un pas de 0,1.
2. Quelle abscisse sera retenue ? Donne la valeur correspondante.
3. Quel est le maximum exact ?
4. Explique la différence entre les réponses aux questions 2 et 3.

Exercice 13 ★★★☆☆ : Prouver une variation par factorisation

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 7$.

1. Montre que $f(x) = (x - 2)^2 + 3$.
2. Pour $2 \leq a < b$, factorise $f(b) - f(a)$ et prouve que f est croissante sur $[2; +\infty[$.
3. Pour $a < b \leq 2$, prouve que f est décroissante sur $] -\infty; 2]$.
4. Donne le minimum de f .

Exercice 14 ★★★☆☆ : Composer - pour aller plus loin

Sur $[0; +\infty[$, pose

$$F(x) = \frac{1}{x^2 + 4}.$$

1. Décompose F comme une succession de fonctions simples.
2. Démontre que F est décroissante sur $[0; +\infty[$.
3. Encadre $F(x)$ si $x \in [1; 3]$.
4. Résous $F(x) \geq 1/8$ sur $[0; +\infty[$.

Exercice 15 ★★★☆☆ : Une fonction à quatre phases

On définit sur $\mathbb{R}$

$$F(x) = 5 - (|x - 2| - 1)^2.$$

1. Calcule $F(1)$, $F(2)$ et $F(3)$.
2. Étudie successivement F sur

$$]-\infty; 1], \quad [1; 2], \quad [2; 3], \quad [3; +\infty[.$$

3. Construis le tableau de variations complet.
4. Donne le maximum de F sur $\mathbb{R}$.
5. Donne le minimum et le maximum de F sur $[0; 4]$.

14 🐼 Problème : Le jardin au bord de la rivière ★★ ★

🧠 Intuition | Le défi

Une association dispose de 80 m de clôture pour aménager un jardin rectangulaire au bord d'une rivière. Le côté longeant l'eau n'a pas besoin de clôture. Une allée de sécurité sera ensuite ajoutée à l'intérieur. Tu vas construire deux modèles, prouver leurs maxima exacts, étudier une contrainte et mesurer l'effet d'une erreur de construction.

On note x la largeur, en mètres, perpendiculaire à la rivière, et L la longueur parallèle à la rivière.

Partie A - Le jardin sans allée

1. Explique pourquoi $2x + L = 80$ et exprime L en fonction de x .
2. Détermine le domaine physique de x .
3. Montre que l'aire totale est

$$A(x) = x(80 - 2x).$$

4. Vérifie l'identité

$$A(x) = 800 - 2(x - 20)^2.$$

5. Dédus l'aire maximale et les dimensions du jardin correspondant.

Partie B - Ajouter une allée intérieure

Une allée de sécurité de 2 m de large longe les quatre côtés à l'intérieur du rectangle. La zone cultivable restante est donc un rectangle de dimensions $x - 4$ et $L - 4$.

6. Justifie que le nouveau domaine est $x \in [4; 38]$.
7. Montre que l'aire cultivable vaut

$$U(x) = (x - 4)(76 - 2x).$$

8. Développe $U(x)$, puis montre que

$$U(x) = 578 - 2(x - 21)^2.$$

9. Détermine l'aire cultivable maximale et les dimensions extérieures correspondantes.
10. Compare ces dimensions avec celles qui maximisaient l'aire totale sans allée.

Partie C - Une surface minimale exigée

L'association souhaite au moins 550 m² de zone cultivable.

11. Montre que $U(x) \geq 550$ équivaut à

$$(x - 21)^2 \leq 14.$$

12. Donne l'intervalle exact des largeurs possibles.
13. Donne l'intervalle correspondant pour la longueur L .
14. Fournis des valeurs approchées au centimètre près.

Partie D - Robustesse de la construction

On vise la largeur optimale 21 m, mais la réalisation peut produire une erreur t :

$$x = 21 + t.$$

15. Montre que

$$U(21 + t) = 578 - 2t^2.$$

16. Si $|t| \leq 0,5$, prouve que l'aire cultivable reste au moins égale à 577,5 m².

17. Interprète : pourquoi dit-on que l'optimum est robuste à une petite erreur ?

Partie E - Vérification numérique

```
1 def utile(x):  
2     return (x - 4)*(76 - 2*x)  
3  
4 meilleur_x = 4  
5 meilleure_aire = utile(4)  
6  
7 for k in range(341):  
8     x = 4 + k/10  
9     if utile(x) > meilleure_aire:  
10        meilleur_x = x  
11        meilleure_aire = utile(x)  
12  
13 print(meilleur_x, meilleure_aire)
```

18. Explique pourquoi la boucle teste exactement les largeurs de 4 à 38 par pas de 0,1.

19. Prévois l'affichage du programme.

20. Compare la force de la vérification numérique et celle de l'identité démontrée à la question 8.

15 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Vrai ou faux : revenir aux définitions*

1. **Faux.** Une fonction croissante conserve l'ordre des nombres, mais ses valeurs peuvent être négatives. Par exemple, $x \mapsto x - 10$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et pourtant $f(0) = -10$.
2. **Vrai.** Si f est décroissante sur un intervalle et si $a < b$, la définition donne bien $f(a) \geq f(b)$.
3. **Faux.** Un maximum est une *valeur* de la fonction. On dit par exemple : « le maximum de f vaut 5 et il est atteint pour $x = 2$ ».
4. **Vrai.** Pour avoir un minimum m sur un intervalle I , il faut qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a) = m$, puis que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in I$.

Corrigé 2

 *Démonstration / Lire toutes les informations du tableau*

Le tableau indique que f est croissante sur $[-3; 0]$, décroissante sur $[0; 2]$, puis croissante sur $[2; 6]$. Sur l'intervalle entier $[-3; 6]$, la plus grande valeur affichée est 5 : le maximum est donc 5, atteint pour $x = 0$. La plus petite valeur est -2 : le minimum est -2 , atteint pour $x = 2$. Comme $1 < 2$ et que f est décroissante sur $[0; 2]$,

$$f(1) > f(2).$$

De même, $3 < 5$ et f est croissante sur $[2; 6]$, donc

$$f(3) < f(5).$$

Enfin, sur $[0; 2]$, la fonction descend de 5 à -2 . Ainsi,

$$\boxed{-2 \leq f(x) \leq 5}.$$

Corrigé 3

 *Démonstration / Comparer sans calculatrice*

- a) La fonction carré est décroissante sur $] -\infty; 0]$. Comme $-5 < -3$, l'ordre est inversé :

$$(-5)^2 > (-3)^2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 25 > 9.$$

- b) La fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$. Puisque $7 < 11$,

$$\sqrt{7} < \sqrt{11}.$$

c) La fonction inverse est décroissante sur $] -\infty; 0[$. Comme $-6 < -2$,

$$-\frac{1}{6} = \frac{1}{-6} > \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

d) La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $-4 < 2$,

$$(-4)^3 < 2^3, \quad \text{donc} \quad -64 < 8.$$

Corrigé 4

 *Démonstration / Du graphique au tableau*

La ligne brisée monte de $A(-3; -1)$ à $B(-1; 2)$, descend jusqu'à $C(2; -2)$, puis remonte jusqu'à $D(4; 1)$. Son tableau de variations est donc :

x	-3	-1	2	4
$f(x)$	-1	2	-2	1

Sur $[-3; 4]$, le maximum est 2, atteint en -1 , et le minimum est -2 , atteint en 2.

Pour étudier $[0; 4]$, il faut aussi connaître la valeur au bord $x = 0$. Entre B et C , la pente vaut

$$\frac{-2 - 2}{2 - (-1)} = -\frac{4}{3},$$

donc $f(0) = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$. Sur $[0; 2]$, la fonction décroît de $\frac{2}{3}$ à -2 , puis elle croît de -2 à 1 sur $[2; 4]$. Ainsi, sur $[0; 4]$:

$$\boxed{\max f = 1 \text{ en } x = 4} \quad \text{et} \quad \boxed{\min f = -2 \text{ en } x = 2}.$$

Corrigé 5

 *Démonstration / Fonction affine : le signe du coefficient directeur*

Pour $f(x) = 7 - 2x$, le taux de variation entre 1 et 4 est

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{-1 - 5}{3} = -2.$$

Plus généralement, si $a < b$, alors

$$f(b) - f(a) = (7 - 2b) - (7 - 2a) = -2(b - a) < 0.$$

Donc $f(b) < f(a)$: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Sur $[-2; 3]$, une fonction décroissante prend sa plus grande valeur au bord gauche et sa plus petite au bord droit :

$$f(-2) = 11, \quad f(3) = 1.$$

Ainsi, pour tout $x \in [-2; 3]$,

$$\boxed{1 \leq f(x) \leq 11}.$$

Le maximum est 11, atteint en -2 , et le minimum est 1, atteint en 3.

Corrigé 6

 *Démonstration / Reconnaître une forme centrée*

On a

$$g(x) = 3(x - 2)^2 - 5.$$

Comme $(x - 2)^2 \geq 0$, alors $3(x - 2)^2 \geq 0$, d'où

$$g(x) \geq -5.$$

L'égalité est obtenue lorsque $x - 2 = 0$, donc le minimum de g est -5 , atteint pour $x = 2$.

De plus,

$$g(3) = 3 \times 1^2 - 5 = -2, \quad g(5) = 3 \times 3^2 - 5 = 22,$$

donc $g(3) < g(5)$. La fonction décroît jusqu'à son centre 2, puis croît après ce centre :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$		-5	
		$\searrow$	$\nearrow$

Enfin,

$$g(x) \leq 7 \text{ si et seulement si } 3(x - 2)^2 \leq 12$$

$$\text{si et seulement si } (x - 2)^2 \leq 4$$

$$\text{si et seulement si } |x - 2| \leq 2.$$

Par conséquent,

$$x \in [0; 4].$$

Corrigé 7

 *Démonstration / Effet des transformations sur les variations*

On sait que f est croissante sur I .

- $u = f + 3$ est croissante : ajouter la même constante aux deux membres d'une inégalité ne change pas son sens.
- $v = 5f$ est croissante : multiplier par $5 > 0$ conserve le sens d'une inégalité.
- $w = -2f$ est décroissante : multiplier par $-2 < 0$ inverse le sens d'une inégalité.
- $z = 7 - f = -f + 7$ est décroissante : l'opposé inverse l'ordre, puis l'ajout de 7 ne modifie plus les variations.

Ainsi,

$$u \text{ et } v \text{ sont croissantes ; } w \text{ et } z \text{ sont décroissantes.}$$

Corrigé 8

 *Démonstration / Lire un maximum dans une forme canonique*

La fonction est donnée par

$$h(x) = 9 - (x + 1)^2.$$

Comme $(x + 1)^2 \geq 0$, on a $h(x) \leq 9$. L'égalité est atteinte lorsque $x = -1$. Le maximum de h sur $\mathbb{R}$ est donc 9, atteint en -1 .

Lorsque x se rapproche de -1 par la gauche, $(x + 1)^2$ diminue et $h(x)$ augmente. Après -1 , le carré augmente et $h(x)$ diminue. Ainsi, h est croissante sur $] -\infty; -1]$ et décroissante sur $[-1; +\infty[$.

Sur $[-4; 0]$, on calcule

$$h(-4) = 0, \quad h(-1) = 9, \quad h(0) = 8.$$

Le maximum est 9 en -1 et le minimum est 0 en -4 .

Sur $[1; 5]$, h est décroissante. Donc

$$h(1) = 5 \quad \text{et} \quad h(5) = -27.$$

Le maximum est 5 en 1 et le minimum est -27 en 5.

Corrigé 9

 *Démonstration / Encadrer sur un même intervalle de monotonie*

Si $x \in [2; 5]$, la fonction carré et la fonction racine carrée sont croissantes, tandis que la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$. On obtient

$$\boxed{4 \leq x^2 \leq 25}, \quad \boxed{\sqrt{2} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{5}}, \quad \boxed{\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}}.$$

Si $x \in [-5; -2]$, la fonction carré est décroissante sur $] -\infty; 0]$, donc

$$\boxed{4 \leq x^2 \leq 25}.$$

La fonction inverse est elle aussi décroissante sur $] -\infty; 0[$. Or

$$\frac{1}{-5} = -\frac{1}{5} \quad \text{et} \quad \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

Il faut ranger les bornes dans l'ordre croissant :

$$\boxed{-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{5}}.$$

Corrigé 10

 *Démonstration / Rectangle de périmètre fixé*

Si un côté mesure x , l'autre mesure $30 - x$ car le demi-périmètre vaut 30. Pour que les longueurs soient positives ou nulles,

$$x \in [0; 30].$$

L'aire vaut

$$A(x) = x(30 - x) = 30x - x^2.$$

Complétons le carré :

$$A(x) = 225 - (x - 15)^2.$$

Comme $(x - 15)^2 \geq 0$, on a $A(x) \leq 225$, avec égalité pour $x = 15$. L'aire maximale est donc 225 unités d'aire, obtenue pour un carré de dimensions 15×15 .

Enfin,

$$A(x) \geq 200 \text{ si et seulement si } 225 - (x - 15)^2 \geq 200$$

$$\text{si et seulement si } (x - 15)^2 \leq 25$$

$$\text{si et seulement si } |x - 15| \leq 5.$$

Ainsi,

$$x \in [10; 20].$$

Pour toutes ces largeurs, l'aire est au moins égale à 200.

Corrigé 11

 *Démonstration / Variations et nombre de solutions*

Le tableau montre que p décroît de 6 à -1 sur $[-2; 1]$, puis croît de -1 à 5 sur $[1; 4]$.

La valeur -1 est atteinte au point de raccordement $x = 1$ et nulle part ailleurs d'après les variations strictes indiquées. L'équation

$$p(x) = -1$$

admet donc exactement une solution : $x = 1$.

Une droite horizontale $y = k$ peut rencontrer chacune des deux branches lorsque k appartient aux deux ensembles de valeurs, donc lorsque

$$k \in [-1; 5].$$

Pour $-1 < k \leq 5$, elle rencontre effectivement une fois chaque branche. Pour $k = -1$, les deux branches se rejoignent au même point : il n'y a qu'une seule intersection.

Sur $[-2; 4]$, toutes les valeurs de p sont comprises entre le minimum -1 et le maximum 6 :

$$-1 \leq p(x) \leq 6.$$

Corrigé 12

 *Démonstration / Approcher sans confondre avec démontrer*

Voici un programme possible :

```
1 def f(x):
2     return 4 - (x - 2.37)**2
3
4 meilleur_x = 0
5 meilleure_valeur = f(0)
6
7 for k in range(51):
8     x = k/10
9     if f(x) > meilleure_valeur:
10        meilleur_x = x
11        meilleure_valeur = f(x)
12
13 print(meilleur_x, meilleure_valeur)
```

Les valeurs testées sont 0, 0,1, 0,2, ..., 5. La plus proche de 2,37 est 2,4 : sa distance au centre est 0,03, contre 0,07 pour 2,3. Le programme affiche donc approximativement

2,4	3,9991
-----	--------

En effet,

$$f(2,4) = 4 - 0,03^2 = 3,9991.$$

Mais la forme $4 - (x - 2,37)^2$ démontre davantage : le maximum exact vaut 4 et il est atteint exactement pour $x = 2,37$. Le programme ne donne qu'une approximation dépendant du pas choisi.

Corrigé 13

 *Démonstration / Une démonstration complète par différence*

Soit

$$f(x) = (x - 2)^2 + 3.$$

Prenons $a < b$. Alors

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= (b - 2)^2 - (a - 2)^2 \\ &= [(b - 2) - (a - 2)][(b - 2) + (a - 2)] \\ &= (b - a)(a + b - 4). \end{aligned}$$

Si $2 \leq a < b$, alors $b - a > 0$ et $a + b - 4 > 0$. Ainsi $f(b) - f(a) > 0$, donc $f(a) < f(b)$: f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$.

Si $a < b \leq 2$, alors $b - a > 0$ mais $a + b - 4 < 0$. Ainsi $f(b) - f(a) < 0$, donc $f(b) < f(a)$: f est strictement décroissante sur $] -\infty; 2]$.

Enfin, $(x - 2)^2 \geq 0$, donc $f(x) \geq 3$. Le minimum est

3, atteint pour $x = 2$.

Corrigé 14

 *Démonstration / Composer des variations pas à pas*

Sur $[0; +\infty[$, lorsque x augmente :

- x^2 augmente ;
- $x^2 + 4$ augmente et reste strictement positif ;
- prendre l'inverse d'un nombre positif inverse l'ordre.

Donc

$$F(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$$

est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

Pour $x \in [1; 3]$, le maximum est atteint à gauche et le minimum à droite :

$$F(1) = \frac{1}{5}, \quad F(3) = \frac{1}{13}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{13} \leq F(x) \leq \frac{1}{5}.$$

Enfin, le dénominateur étant positif,

$$F(x) \geq \frac{1}{8} \text{ si et seulement si } \frac{1}{x^2 + 4} \geq \frac{1}{8} \text{ si et seulement si } x^2 + 4 \leq 8 \text{ si et seulement si } x^2 \leq 4.$$

Comme $x \geq 0$, on obtient

$$x \in [0; 2].$$

Corrigé 15

 *Démonstration / Une fonction à quatre phases*

On étudie

$$F(x) = 5 - (|x - 2| - 1)^2.$$

Les trois valeurs centrales sont

$$F(1) = 5, \quad F(2) = 4, \quad F(3) = 5.$$

Pour comprendre les variations, on suit successivement la distance $|x - 2|$, puis la distance de celle-ci à 1.

- Sur $] -\infty; 1]$, F est croissante.
- Sur $[1; 2]$, F est décroissante.

- Sur $[2; 3]$, F est croissante.
- Sur $[3; +\infty[$, F est décroissante.

On peut résumer sans attribuer de « valeur en l'infini » :

x	$\dots$	1	2	3	$\dots$
$F(x)$		$\nearrow$ 5 $\searrow$	4 $\nearrow$	5 $\searrow$	

Le maximum sur $\mathbb{R}$ vaut 5 et il est atteint pour $x = 1$ et $x = 3$. La fonction n'a pas de minimum sur $\mathbb{R}$: en choisissant $|x - 2|$ de plus en plus grand, $(|x - 2| - 1)^2$ devient aussi grand que l'on veut et $F(x)$ devient aussi négatif que l'on veut.

Sur $[0; 4]$, on ajoute

$$F(0) = 4 \quad \text{et} \quad F(4) = 4.$$

Ainsi, le maximum vaut 5, atteint en 1 et en 3, tandis que le minimum vaut 4, atteint en 0, en 2 et en 4.

16 Corrigé du problème

Partie A - Sans allée

 *Démonstration / Modéliser puis faire apparaître un carré*

1. La clôture couvre deux largeurs x et une longueur L . Ainsi,

$$2x + L = 80, \quad \text{donc} \quad \boxed{L = 80 - 2x}.$$

2. Les longueurs doivent être positives ou nulles : $x \geq 0$ et $80 - 2x \geq 0$. Par conséquent,

$$\boxed{x \in [0; 40]}.$$

3. L'aire totale du rectangle est

$$A(x) = xL = x(80 - 2x) = 80x - 2x^2.$$

4. Vérifions l'identité demandée en complétant le carré :

$$\begin{aligned} A(x) &= -2(x^2 - 40x) \\ &= -2[(x - 20)^2 - 400] \\ &= \boxed{800 - 2(x - 20)^2}. \end{aligned}$$

5. Puisque $(x - 20)^2 \geq 0$, on a $A(x) \leq 800$. L'égalité est atteinte pour $x = 20$. Alors

$$L = 80 - 2 \times 20 = 40.$$

L'aire maximale est donc

$$\boxed{800 \text{ m}^2}$$

pour des dimensions 20 m par 40 m.

Partie B - Ajouter une allée intérieure

 *Démonstration / Optimiser l'aire réellement cultivable*

6. L'allée retire 2 m sur chacun des deux côtés de chaque dimension. Il faut donc $x - 4 \geq 0$ et $L - 4 \geq 0$. Or

$$L - 4 = 76 - 2x \geq 0 \text{ si et seulement si } x \leq 38.$$

D'où le nouveau domaine

$$\boxed{x \in [4; 38]}.$$

7. Les dimensions cultivables sont $x - 4$ et

$$L - 4 = (80 - 2x) - 4 = 76 - 2x.$$

Ainsi,

$$U(x) = (x - 4)(76 - 2x).$$

8. Développons, puis complétons le carré :

$$\begin{aligned} U(x) &= -2x^2 + 84x - 304 \\ &= -2(x^2 - 42x) - 304 \\ &= -2[(x - 21)^2 - 441] - 304 \\ &= 578 - 2(x - 21)^2. \end{aligned}$$

9. Comme $(x - 21)^2 \geq 0$, on a $U(x) \leq 578$, avec égalité pour $x = 21$. La longueur extérieure vaut alors

$$L = 80 - 2 \times 21 = 38.$$

L'aire cultivable maximale est

$$578 \text{ m}^2$$

pour des dimensions extérieures 21 m par 38 m.

10. Sans allée, les dimensions optimales étaient 20 m par 40 m. Avec l'allée, elles deviennent 21 m par 38 m. L'allée ne retire pas la même *proportion* aux deux dimensions : il faut donc refaire l'optimisation, et pas simplement reprendre l'ancien rectangle optimal.

Partie C - Une surface minimale exigée

 *Démonstration / Transformer une contrainte d'aire en intervalle*

11. À partir de la forme centrée,

$$\begin{aligned} U(x) &\geq 550 \text{ si et seulement si } 578 - 2(x - 21)^2 \geq 550 \\ &\text{si et seulement si } -2(x - 21)^2 \geq -28 \\ &\text{si et seulement si } (x - 21)^2 \leq 14. \end{aligned}$$

Dans la dernière étape, on divise par -2 : il faut donc inverser le sens de l'inégalité.

12. La condition $(x - 21)^2 \leq 14$ signifie

$$|x - 21| \leq \sqrt{14}.$$

Ainsi,

$$x \in [21 - \sqrt{14}; 21 + \sqrt{14}].$$

Cet intervalle est bien inclus dans $[4; 38]$.

13. Comme $L = 80 - 2x$, l'ordre des bornes s'inverse lorsque x augmente. On obtient

$$L \in [38 - 2\sqrt{14}; 38 + 2\sqrt{14}].$$

14. Avec $\sqrt{14} \approx 3,741657$,

$$x \in [17,258 \dots; 24,741 \dots]$$

et

$$L \in [30,516 \dots; 45,483 \dots].$$

Au centimètre près, on peut écrire

$$x \in [17,26; 24,74] \text{ m} \quad \text{et} \quad L \in [30,52; 45,48] \text{ m}.$$

Partie D - Robustesse de la construction

 *Démonstration / Mesurer l'effet d'une petite erreur*

15. En remplaçant x par $21 + t$ dans la forme centrée,

$$U(21 + t) = 578 - 2[(21 + t) - 21]^2 = 578 - 2t^2.$$

16. Si $|t| \leq 0,5$, alors $t^2 \leq 0,25$. Par conséquent,

$$-2t^2 \geq -0,5$$

et donc

$$U(21 + t) \geq 577,5 \text{ m}^2.$$

17. Une erreur de largeur allant jusqu'à 50 cm fait perdre au maximum 0,5 m² sur 578 m². La perte est très petite, car elle dépend de t^2 et non directement de $|t|$. C'est en ce sens que l'optimum est robuste à une petite erreur.

Partie E - Vérification numérique

 *Démonstration / Ce que confirme le programme*

18. Lorsque k parcourt les entiers de 0 à 340, le nombre

$$x = 4 + \frac{k}{10}$$

parcourt 4, 4,1, 4,2, ..., 38. Il y a bien 341 valeurs, bornes comprises.

19. La largeur exacte optimale 21 appartient à la liste testée. Le programme doit donc afficher

$$21,0 \quad 578,0$$

à la présentation des nombres près selon Python.

20. Le programme confirme le résultat parmi les valeurs espacées de 0,1 m. L'identité

$$U(x) = 578 - 2(x - 21)^2$$

est plus forte : elle prouve le résultat pour *toutes* les valeurs réelles de l'intervalle, donne l'optimum exact et explique pourquoi il est unique.

17 Fiche-mémoire

Définition | Mots essentiels

Sur un intervalle I :

- f croissante : $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$;
- f décroissante : $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$;
- maximum M : $f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$ et M est atteint ;
- minimum m : $f(x) \geq m$ pour tout $x \in I$ et m est atteint.

Propriété | Fonction affine

Pour $f(x) = mx + p$:

- si $m > 0$, f est croissante ;
- si $m < 0$, f est décroissante ;
- si $m = 0$, f est constante.

La preuve repose sur

$$f(b) - f(a) = m(b - a).$$

Propriété | Références

- x^2 : décroissante sur $] - \infty; 0]$, croissante sur $[0; +\infty[$;
- $1/x$: décroissante sur chacun des intervalles $] - \infty; 0[$ et $]0; +\infty[$;
- $\sqrt{x}$: croissante sur $[0; +\infty[$;
- x^3 : croissante sur $\mathbb{R}$.

Attention | Trois réflexes

- Ne pas comparer avec des variations si les nombres ne sont pas dans un même intervalle de monotonie.
- Ne pas confondre l'extremum, qui est une valeur, et l'abscisse où il est atteint.
- Le numérique suggère ou confirme ; seule une démonstration prouve.

Méthode | Optimiser

1. Choisir l'inconnue.
2. Déterminer son domaine.
3. Exprimer la grandeur à optimiser.
4. Étudier ses variations ou faire apparaître un carré.
5. Donner la valeur optimale, l'endroit où elle est atteinte et l'unité.

Intuition | La phrase qui guide

Un tableau de variations raconte le trajet des *valeurs* de la fonction quand les *abscisses* avancent de gauche à droite.

Tu sais maintenant lire, démontrer et optimiser.

La difficulté n'est pas un verdict : c'est une étape que l'on peut détailler.