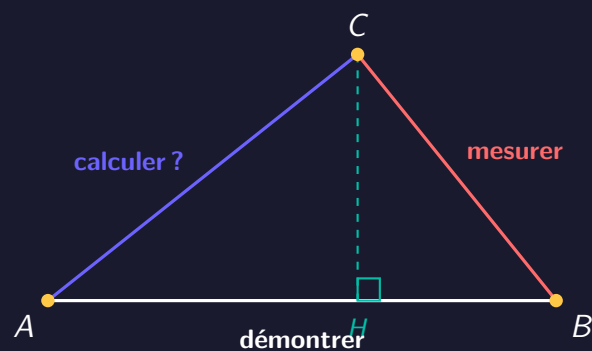


FICHE 09

Configurations géométriques

Voir, calculer, démontrer

Pythagore ■ Thalès ■ Trigonométrie



Seconde générale ■ Mathématiques ■ Programme officiel

 Cours complet

 15 exercices

 Problème défi

 Corrigés

Table des matières

1	❓ Pourquoi étudier les configurations géométriques ?	4
1.1	Une figure cache des relations	4
1.2	Trois rôles essentiels	4
2	🔍 Lire, coder et démontrer	4
2.1	Hypothèses, propriété, conclusion	4
2.2	Lire les codages	5
3	📐 Angles et parallélisme	5
3.1	Sommes d'angles à connaître	5
3.2	Angles formés par deux parallèles	6
4	📐 Triangles et lignes remarquables	6
4.1	Quatre droites à ne pas confondre	6
4.2	La médiatrice comme ensemble de points	7
5	√× Théorème de Pythagore	7
5.1	Calculer une longueur	7
5.2	Démonstration par les aires	8
5.3	Prouver qu'un triangle est rectangle	8
6	✂ Triangles semblables et théorème de Thalès	9
6.1	Reconnaître des triangles semblables	9
6.2	Le théorème de Thalès	9
6.3	La réciproque de Thalès	10
7	📐 Trigonométrie dans le triangle rectangle	10
7.1	Les trois rapports	10
7.2	Calculer une longueur ou un angle	11
8	● Cercles et triangles rectangles	12
8.1	Le cercle de diamètre donné	12
9	📐 Échelles, périmètres et aires	13
9.1	Effet d'un agrandissement	13
9.2	Aire d'un triangle	13
10	🧐 Choisir une stratégie	13
11	📐 Pour aller plus loin - guidé et facultatif	14
11.1	Triangles remarquables et valeurs exactes	14
11.2	La formule d'aire avec un sinus	15
11.3	Le théorème de Ceva : trois droites concourantes	15
12	📦 Boîte à outils et erreurs à éviter	17
13	✍ Exercices	18

14	 Problème : <i>Le téléphérique du vallon</i> ★★ ★	21
15	 Corrigés détaillés	23
16	 Corrigé du problème	31
17	 Fiche-mémoire	35

1 ? Pourquoi étudier les configurations géométriques ?

1.1 Une figure cache des relations

Une figure géométrique n'est pas seulement un dessin. Elle rassemble des longueurs, des angles, des alignements et des parallélismes. Le but n'est pas de tout calculer, mais de reconnaître la relation qui débloque le problème.

Intuition | La question avant la formule

Demande-toi toujours : « Qu'est-ce que je sais exactement ? Qu'est-ce que je cherche ? Quel théorème relie les deux ? » Cette pause de quelques secondes évite la majorité des erreurs de méthode.

1.2 Trois rôles essentiels

- **Calculer** une longueur ou un angle inaccessible.
- **Prouver** qu'un triangle est rectangle, que deux droites sont parallèles ou que des points sont alignés.
- **Modéliser** une situation réelle : pente, hauteur, distance, échelle, construction.

Attention | Le dessin ne prouve rien

Une droite qui *semble* perpendiculaire ou deux longueurs qui *semblent* égales ne le sont pas sans donnée, codage ou démonstration. Une figure aide à chercher ; le raisonnement permet de conclure.

2 Lire, coder et démontrer

2.1 Hypothèses, propriété, conclusion

Une démonstration courte possède presque toujours cette structure :

Méthode | Le squelette d'une preuve

1. Écris les **hypothèses** utiles.
2. Nomme le **théorème** ou la propriété utilisée.
3. Vérifie que ses conditions sont satisfaites.
4. Donne une **conclusion précise**.

Exemple | Une phrase complète

On sait que $AB = AC$. Donc le triangle ABC est isocèle en A . Par conséquent, ses angles à la base sont égaux :

$$\widehat{ABC} = \widehat{BCA}.$$

La conclusion ne vient pas du dessin, mais de la propriété des triangles isocèles.

2.2 Lire les codages

Codage	Signification
Même nombre de petits traits	longueurs égales
Petit carré dans un angle	angle droit, donc droites perpendiculaires
Même nombre d'arcs	angles égaux
Flèches identiques sur deux droites	droites parallèles
Points sur un même trait	alignement seulement si cela est donné ou démontré

⚠ Attention | Ne pas ajouter une hypothèse

Si l'énoncé donne seulement $AB = AC$, tu ne peux pas supposer que l'angle en A est droit, que BC est horizontal ou que la hauteur issue de A est tracée à l'échelle.

3 Angles et parallélisme

3.1 Sommes d'angles à connaître

✓ Propriété | Repères immédiats

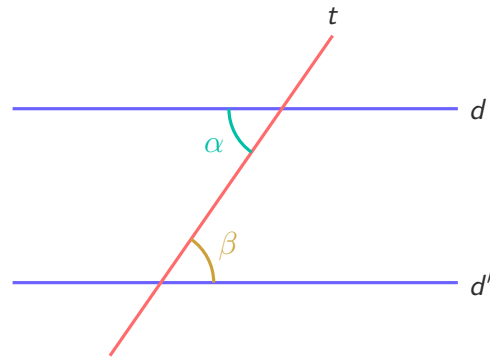
- deux angles complémentaires ont une somme de 90° ;
- deux angles supplémentaires ont une somme de 180° ;
- les trois angles d'un triangle ont une somme de 180° ;
- les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux.

Démonstration | Somme des angles d'un triangle

Dans un triangle ABC , traçons par A la droite parallèle à (BC) . Les angles alternes-internes formés en A sont égaux aux angles en B et en C . Les trois angles placés autour de A forment un angle plat. Ainsi,

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180^\circ.$$

3.2 Angles formés par deux parallèles



$d \parallel d'$: les angles alternes-internes α et β sont égaux.

★ Théorème | Direct et réciproque

Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes correspondants sont égaux.

Réciproquement, si deux angles alternes-internes sont égaux, alors les deux droites sont parallèles.

✂ Méthode | Prouver un parallélisme avec des angles

Repère une sécante, nomme deux angles alternes-internes, prouve qu'ils sont égaux, puis utilise la réciproque.

4 🏠 Triangles et lignes remarquables

4.1 Quatre droites à ne pas confondre

Droite	Définition	Point de concours
Médiane	passé par un sommet et le milieu du côté opposé	centre de gravité
Hauteur	passé par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé	orthocentre
Médiatrice	est perpendiculaire à un côté en son milieu	centre du cercle circonscrit
Bissectrice	partage un angle en deux angles égaux	centre du cercle inscrit

⚠ Attention | Le mot « milieu » ne suffit pas

Une médiane passe par un *sommet*. Une médiatrice est perpendiculaire au *côté* en son milieu et ne passe pas, en général, par un sommet.

4.2 La médiatrice comme ensemble de points

★ Théorème | Équidistance

Un point M appartient à la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si

$$MA = MB.$$

Démonstration | Les deux sens

Soit I le milieu de $[AB]$.

Si M est sur la médiatrice, alors les triangles rectangles MIA et MIB ont MI en commun et $IA = IB$.

Par Pythagore,

$$MA^2 = MI^2 + IA^2 = MI^2 + IB^2 = MB^2,$$

donc $MA = MB$.

Réciproquement, si $MA = MB$, les triangles MIA et MIB ont trois côtés de mêmes longueurs. Ils sont superposables; les angles $\widehat{MIA}$ et $\widehat{MIB}$ sont égaux et supplémentaires, donc droits. Ainsi $(MI) \perp (AB)$: M est sur la médiatrice.

✓ Propriété | Centre du cercle circonscrit

Les médiatrices d'un triangle se coupent en un point O . Comme O est équidistant des extrémités de deux côtés,

$$OA = OB = OC.$$

Le cercle de centre O passant par un sommet passe donc par les trois sommets.

5 Théorème de Pythagore

5.1 Calculer une longueur

★ Théorème | Pythagore

Si le triangle ABC est rectangle en A , alors $[BC]$ est l'hypoténuse et

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Méthode | Ne jamais deviner l'hypoténuse

L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit. C'est toujours le plus long côté du triangle rectangle.

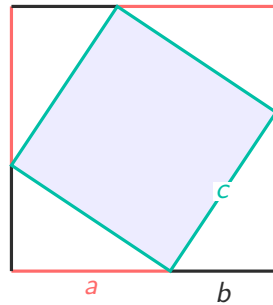
💡 Exemple | Calcul exact puis valeur approchée

Un triangle ABC est rectangle en A , avec $AB = 6$ et $AC = 8$. Alors

$$BC^2 = 6^2 + 8^2 = 100, \quad BC = \sqrt{100} = 10.$$

Une longueur étant positive, on retient la racine positive.

5.2 Démonstration par les aires



quatre triangles
rectangles identiques

✎ Démonstration | Comparer deux calculs d'une même aire

Le grand carré a pour côté $a + b$, donc pour aire $(a + b)^2$. Il est formé de quatre triangles rectangles d'aire $ab/2$ et d'un carré central de côté c . Ainsi,

$$(a + b)^2 = 4 \times \frac{ab}{2} + c^2.$$

En développant,

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2,$$

d'où

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}.$$

5.3 Prouver qu'un triangle est rectangle

★ Théorème | Réciproque de Pythagore

Dans un triangle, si le carré du plus long côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle. L'angle droit est opposé au plus long côté.

⚠ Attention | Comparer dans le bon ordre

Commence par identifier le plus long côté c . Calcule séparément c^2 et $a^2 + b^2$. Écrire directement une égalité non encore prouvée transformerait ce que tu cherches en hypothèse.

6 ✂ Triangles semblables et théorème de Thalès

6.1 Reconnaître des triangles semblables

📖 Définition | Triangles semblables

Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont les mêmes angles. Leurs côtés correspondants sont alors proportionnels.

✅ Propriété | Critère angle-angle

Si deux angles d'un triangle sont respectivement égaux à deux angles d'un autre triangle, alors les troisièmes angles sont également égaux, car chaque somme vaut 180° . Les triangles sont donc semblables.

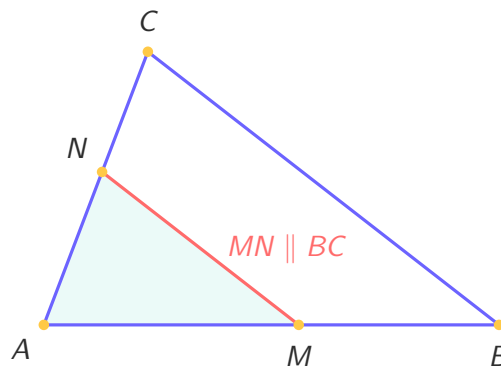
⚠ Attention | Correspondance avant proportions

Écris les sommets dans le même ordre. Si A correspond à D , B à E et C à F , alors

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

Un mauvais appariement donne une proportion fausse, même avec de bons calculs.

6.2 Le théorème de Thalès



★ Théorème | Thalès

Dans le triangle ABC , si $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et $(MN) \parallel (BC)$, alors

$$\boxed{\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}}.$$

🖋 Démonstration | Thalès vient des triangles semblables

Comme $(MN) \parallel (BC)$, les angles alternes-internes donnent

$$\widehat{AMN} = \widehat{ABC} \quad \text{et} \quad \widehat{ANM} = \widehat{ACB}.$$

Les triangles AMN et ABC ont donc les mêmes angles : ils sont semblables. Leurs côtés correspondants sont proportionnels, ce qui donne exactement les trois rapports de Thalès.

✂ Méthode | Calculer avec Thalès

1. Écris les alignements et le parallélisme.
2. Cite Thalès.
3. Écris les trois rapports dans un ordre cohérent.
4. Ne garde que les deux rapports contenant l'inconnue et trois longueurs connues.

6.3 La réciproque de Thalès

★ Théorème | Prouver un parallélisme

Si A, M, B sont alignés dans cet ordre, A, N, C sont alignés dans le même ordre et

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC},$$

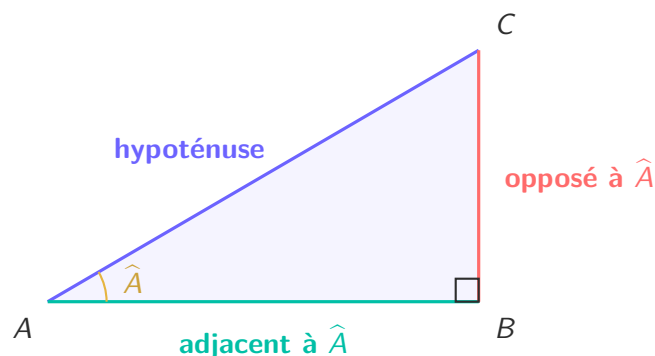
alors $(MN) \parallel (BC)$.

⚠ Attention | Même ordre indispensable

L'égalité des rapports ne suffit pas si les points sont placés sur des demi-droites opposées. L'ordre des points fait partie des hypothèses de la réciproque.

7 Trigonométrie dans le triangle rectangle

7.1 Les trois rapports



Définition | Cosinus, sinus, tangente

Dans un triangle rectangle, pour un angle aigu θ :

$$\cos \theta = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}},$$

$$\sin \theta = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}},$$

$$\tan \theta = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}.$$

Méthode | Choisir le bon rapport

1. Marque l'angle droit, puis l'hypoténuse.
2. Par rapport à l'angle utilisé, nomme le côté opposé et le côté adjacent.
3. Barre le côté qui n'intervient ni dans les données ni dans la question.
4. Choisis le rapport contenant les deux côtés restants.

7.2 Calculer une longueur ou un angle

Exemple | Une hauteur inaccessible

À 20 m du pied d'un arbre, l'angle d'élévation du sommet vaut 37° . Si h est la hauteur,

$$\tan 37^\circ = \frac{h}{20}, \quad h = 20 \tan 37^\circ \approx 15,1 \text{ m.}$$

La calculatrice doit être réglée en degrés.

Exemple | Retrouver un angle

Dans un triangle rectangle, si le côté opposé à θ mesure 5 et l'adjacent 12, alors

$$\tan \theta = \frac{5}{12}, \quad \theta = \arctan \left(\frac{5}{12} \right) \approx 22,6^\circ.$$

Propriété | Une identité utile

Pour tout angle aigu θ ,

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

Démonstration | Pythagore explique l'identité

Dans un triangle rectangle, notons a le côté adjacent, b l'opposé et c l'hypoténuse. Alors

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

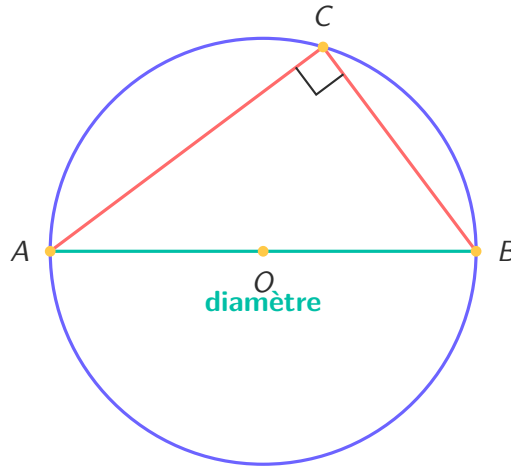
8 ● Cercles et triangles rectangles

8.1 Le cercle de diamètre donné

★ Théorème | Angle inscrit dans un demi-cercle

Si $[AB]$ est un diamètre d'un cercle et si C appartient à ce cercle, alors le triangle ABC est rectangle en C .

Réciproquement, si ABC est rectangle en C , alors C appartient au cercle de diamètre $[AB]$.



Démonstration | Pourquoi l'angle en C est-il droit ?

Le point O est le milieu de $[AB]$ et le centre du cercle, donc

$$OA = OB = OC.$$

Les triangles AOC et BOC sont isocèles. Posons $\widehat{OAC} = \widehat{ACO} = \alpha$ et $\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \beta$. Dans le triangle ABC ,

$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ.$$

Ainsi $\alpha + \beta = 90^\circ$, donc $\widehat{ACB} = 90^\circ$.

Pour la réciproque, supposons ABC rectangle en C et notons O le milieu de $[AB]$. Construisons le symétrique D de C par rapport à O . Dans le quadrilatère $ACBD$, les diagonales $[AB]$ et $[CD]$ se coupent en leur milieu : $ACBD$ est donc un parallélogramme. Comme $AC \perp BC$, ce parallélogramme est un rectangle. Ses diagonales ont la même longueur, donc $AB = CD$. Puisque O est le milieu de ces deux diagonales,

$$OA = OB = OC = OD.$$

Ainsi C appartient au cercle de centre O et de rayon OA , dont $[AB]$ est un diamètre.

9 Échelles, périmètres et aires

9.1 Effet d'un agrandissement

✓ Propriété | Longueurs et aires

Lorsqu'une figure est agrandie avec un coefficient $k > 0$:

- toutes les longueurs et tous les périmètres sont multipliés par k ;
- toutes les aires sont multipliées par k^2 ;
- dans l'espace, tous les volumes sont multipliés par k^3 .

Démonstration | Pourquoi le carré du coefficient ?

Un rectangle de côtés a et b a pour aire ab . Après agrandissement, ses côtés deviennent ka et kb , donc son aire devient

$$(ka)(kb) = k^2 ab.$$

Tout polygone peut être découpé en triangles ; la même règle s'étend donc aux figures usuelles.

9.2 Aire d'un triangle

✓ Propriété | Base et hauteur

Pour n'importe quel côté choisi comme base b , si h est la hauteur correspondante,

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{b \times h}{2}.$$

La hauteur peut tomber à l'extérieur du triangle.

Attention | Une unité au carré

Une longueur s'exprime en m, cm, km, etc. Une aire s'exprime en m^2 , cm^2 , km^2 , etc. L'unité fait partie de la réponse.

10 Choisir une stratégie

✂ Méthode | Le diagnostic en cinq questions

1. Y a-t-il un triangle rectangle ? Pense à Pythagore ou à la trigonométrie.
2. Y a-t-il des droites parallèles et des points alignés ? Pense à Thalès.
3. Cherche-t-on à prouver un parallélisme ? Pense aux réciproques de Thalès ou des angles.
4. Cherche-t-on à prouver un angle droit ? Pense à la réciproque de Pythagore ou au cercle de diamètre donné.
5. Y a-t-il des angles égaux ? Pense aux triangles isocèles ou semblables.

🧠 Intuition | Une figure peut demander plusieurs théorèmes

Dans un problème long, une première propriété construit une nouvelle information qui devient l'hypothèse de l'étape suivante. Par exemple : trigonométrie pour calculer une hauteur, Pythagore pour une distance, puis Thalès pour une réduction.

⚠ Attention | Arrondir seulement à la fin

Garde les racines et les fractions exactes pendant les calculs. Un arrondi intermédiaire peut dégrader toutes les réponses suivantes. Donne ensuite une valeur approchée avec une précision adaptée au contexte.

11 ▲ Pour aller plus loin - guidé et facultatif

Cette partie dépasse le socle strict. Elle est destinée à toute personne curieuse : aucun prérequis caché n'est utilisé.

11.1 Triangles remarquables et valeurs exactes

✓ Propriété | Valeurs à reconstruire

θ	30°	45°	60°
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

 Démonstration / Le triangle $45^\circ-45^\circ-90^\circ$

Coupons un carré de côté 1 par une diagonale. On obtient un triangle rectangle isocèle dont les angles aigus valent 45° . Par Pythagore, la diagonale vaut $\sqrt{2}$. Donc

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan 45^\circ = 1.$$

 Démonstration / Le triangle $30^\circ-60^\circ-90^\circ$

Dans un triangle équilatéral de côté 2, une hauteur coupe la base en deux segments de longueur 1 et partage la figure en deux triangles rectangles. Par Pythagore, la hauteur vaut $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Les rapports trigonométriques donnent alors les valeurs exactes pour 30° et 60° .

11.2 La formule d'aire avec un sinus

★ Théorème | Deux côtés et l'angle compris

Dans un triangle ABC ,

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \widehat{BAC}.$$

 Démonstration / Faire apparaître une hauteur

Choisissons $[AB]$ comme base et notons H le pied de la hauteur issue de C . Dans le triangle rectangle ACH ,

$$\sin \widehat{BAC} = \frac{CH}{AC}, \quad CH = AC \sin \widehat{BAC}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} AB \times CH = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \widehat{BAC}.$$

11.3 Le théorème de Ceva : trois droites concourantes

Dans un triangle ABC , choisissons $D \in [BC]$, $E \in [CA]$ et $F \in [AB]$.

★ Théorème | Ceva

Les droites (AD) , (BE) et (CF) sont concourantes si et seulement si

$$\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1.$$

 Démonstration / Une preuve guidée par les aires

Supposons d'abord que les trois droites se coupent en P . Notons

$$X = \mathcal{A}(PBC), \quad Y = \mathcal{A}(PCA), \quad Z = \mathcal{A}(PAB).$$

Des triangles ayant la même hauteur ont des aires proportionnelles à leurs bases. Comme A, P, D sont alignés, on obtient

$$\frac{BD}{DC} = \frac{Z}{Y}.$$

De même,

$$\frac{CE}{EA} = \frac{X}{Z} \quad \text{et} \quad \frac{AF}{FB} = \frac{Y}{X}.$$

Le produit vaut donc $(Z/Y)(X/Z)(Y/X) = 1$.

Réciproquement, supposons le produit égal à 1. Les droites (AD) et (BE) se coupent en un point P , puis (CP) coupe $[AB]$ en F' . Le sens direct appliqué à D, E, F' donne

$$\frac{BD}{DC} \frac{CE}{EA} \frac{AF'}{F'B} = 1.$$

En comparant avec l'égalité donnée, $AF'/F'B = AF/FB$. Sur $[AB]$, ce rapport détermine un unique point, donc $F' = F$. Ainsi (CF) passe aussi par P .



Exemple | Pourquoi les médianes sont-elles concourantes ?

Pour trois médianes, D, E et F sont les milieux des côtés. Chaque rapport vaut 1, donc leur produit vaut 1. Le théorème de Ceva prouve que les trois médianes sont concourantes.

12 Boîte à outils et erreurs à éviter

Méthode | Pythagore

Triangle rectangle connu : calculer. Trois côtés connus : réciproque pour prouver.

Méthode | Thalès

Alignements, parallélisme, rapports dans le même ordre, puis produit en croix.

Méthode | Trigonométrie

Angle droit, hypoténuse, opposé, adjacent, puis choix de cosinus, sinus ou tangente.

Méthode | Démontrer

Hypothèses, propriété nommée, vérification des conditions, conclusion précise.

Attention | Calculatrice

Vérifie le mode degrés et n'arrondis qu'à la dernière étape.

Attention | Figure

N'utilise que les données, les codages et les résultats déjà démontrés.

13 Exercices

Pour chaque exercice, rédige les étapes et nomme les propriétés. Les étoiles indiquent une progression ; elles ne ferment la porte à personne.

Exercice 1 : Vocabulaire et logique

Indique si chaque affirmation est vraie ou fausse, puis corrige les affirmations fausses.

1. L'hypoténuse est le plus long côté de n'importe quel triangle.
2. Une hauteur d'un triangle passe par un sommet.
3. Si un point est équidistant de A et de B , il appartient à la médiatrice de $[AB]$.
4. Une figure qui semble avoir un angle droit suffit pour appliquer Pythagore.

Exercice 2 : Angles immédiats

1. Calcule l'angle supplémentaire d'un angle de 68° .
2. Dans un triangle, deux angles mesurent 47° et 68° . Calcule le troisième.
3. Un triangle isocèle a un angle principal de 36° . Calcule ses deux angles à la base.
4. Deux droites parallèles sont coupées par une sécante. Un angle vaut 68° . Donne les mesures possibles de tous les angles formés.

Exercice 3 : Démontrer un parallélisme

Les droites (d) et (d') sont coupées par une sécante (t) . Deux angles alternes-internes mesurent chacun 57° .

1. Quelle propriété permet de conclure ?
2. Rédige une démonstration complète de $(d) \parallel (d')$.
3. Si le second angle mesurait 123° , pourrait-on conclure de la même manière ? Explique.

Exercice 4 : Pythagore pour calculer

1. Le triangle ABC est rectangle en A , avec $AB = 7,2$ cm et $AC = 9,6$ cm. Calcule BC .
2. Le triangle DEF est rectangle en D , avec $EF = 13$ cm et $DE = 5$ cm. Calcule DF .
3. Pour chaque question, vérifie que l'hypoténuse obtenue ou donnée est bien le plus long côté.

Exercice 5 : Réciproque de Pythagore

Pour chaque triplet de longueurs, indique si un triangle ayant ces côtés est rectangle. Justifie par deux calculs séparés.

1. 6, 8, 10 ;
2. 7, 9, 12 ;
3. 9, 40, 41.

Exercice 6 : Médiatrice et cercle

On donne $AB = 8$ cm et I milieu de $[AB]$. Un point M vérifie $MA = MB = 5$ cm.

1. Justifie que M appartient à la médiatrice de $[AB]$.

2. Montre que le triangle MIA est rectangle en I .
3. Calcule MI .
4. Quel est le rayon du cercle de centre M passant par A et B ?

Exercice 7 ★★☆☆ : Théorème de Thalès

Dans le triangle ABC , $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et $(MN) \parallel (BC)$. On donne

$$AB = 10, \quad AM = 6, \quad AC = 8, \quad BC = 7,5.$$

1. Écris les rapports de Thalès.
2. Calcule AN .
3. Calcule MN .
4. Donne le coefficient de réduction du triangle ABC vers le triangle AMN .

Exercice 8 ★★☆☆ : Réciproque de Thalès

Dans un triangle ABC , les points $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ vérifient

$$AB = 15, \quad AM = 10, \quad AC = 18, \quad AN = 12.$$

1. Calcule AM/AB et AN/AC .
2. Démontre que $(MN) \parallel (BC)$.
3. Si $BC = 9$, calcule MN .
4. Calcule BM et CN et compare BM/BA à CN/CA .

Exercice 9 ★★☆☆ : Triangles semblables

Le triangle ABC a pour angles 52° , 71° et 57° respectivement en A , B et C . Le triangle DEF a pour angles 52° , 57° et 71° respectivement en D , E et F . On donne

$$AB = 8, \quad AC = 7, \quad BC = 6, \quad DF = 12.$$

1. Justifie que les triangles sont semblables.
2. Donne la correspondance des sommets.
3. Calcule le coefficient d'agrandissement de ABC vers DEF .
4. Calcule DE et EF .

Exercice 10 ★★☆☆ : Hauteur par trigonométrie

Une personne se place à 18 m du pied d'un mât vertical. L'angle d'élévation de son sommet vaut 35° . On néglige la hauteur des yeux.

1. Fais un schéma et nomme la hauteur h .
2. Exprime $\tan 35^\circ$ avec h .
3. Calcule h au centimètre près.
4. Calcule la distance entre la personne et le sommet du mât au centimètre près.

Exercice 11 ★★☆☆ : Retrouver un angle

Dans un triangle rectangle, par rapport à un angle aigu θ , le côté opposé mesure 9 cm, le côté adjacent 12 cm et l'hypoténuse 15 cm.

1. Vérifie Pythagore.
2. Calcule $\tan \theta$.
3. Détermine θ au dixième de degré près.
4. Détermine l'autre angle aigu de deux façons différentes.

Exercice 12 ★★☆☆ : Cercle de diamètre donné

Le segment $[AB]$ est un diamètre d'un cercle, avec $AB = 10$ cm. Le point C appartient au cercle et $AC = 6$ cm.

1. Justifie que ABC est rectangle en C .
2. Calcule BC .
3. Calcule $\widehat{CAB}$ et $\widehat{CBA}$ au dixième de degré près.
4. Vérifie que la somme des deux valeurs approchées est cohérente.

Exercice 13 ★★★☆☆ : Plan, échelle et aire

Sur un plan à l'échelle 1 : 250, une parcelle rectangulaire mesure 3,2 cm sur 2,4 cm.

1. Détermine ses dimensions réelles en mètres.
2. Calcule son périmètre réel et son aire réelle.
3. Une parcelle semblable est obtenue avec un coefficient d'agrandissement 1,5. Calcule ses dimensions, son périmètre et son aire.
4. Explique pourquoi l'aire n'est pas multipliée par 1,5.

Exercice 14 ★★★☆☆ : Triangle équilatéral exact

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 10 cm. La hauteur issue de A coupe $[BC]$ en H .

1. Justifie que $BH = 5$ cm et que AHB est rectangle en H .
2. Calcule AH sous forme exacte.
3. Calcule l'aire exacte de ABC .
4. Retrouve $\sin 60^\circ$, $\cos 60^\circ$ et $\tan 60^\circ$.

Exercice 15 ★★★☆☆ : Ceva et concurrence

Dans un triangle ABC , D est le milieu de $[BC]$. Le point $E \in [CA]$ vérifie $CE/EA = 2$ et le point $F \in [AB]$ vérifie $AF/FB = 1/2$.

1. Calcule BD/DC .
2. Vérifie l'identité de Ceva.
3. Dédus que (AD) , (BE) et (CF) sont concourantes.
4. Si $AB = 12$ cm, calcule AF et FB .
5. En notant $G = (AD) \cap (BE)$, explique pourquoi C , G et F sont alignés.

14 🦋 Problème : *Le téléphérique du vallon* ★★ ★

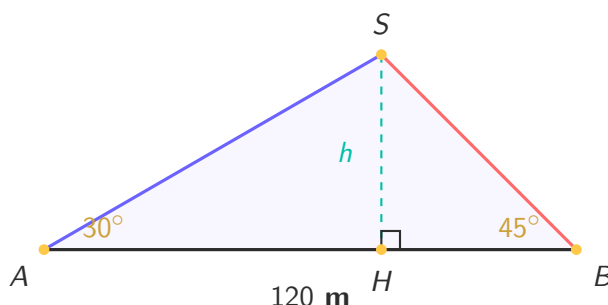
🧠 Intuition | Le défi

Deux stations A et B sont séparées par un terrain horizontal de 120 m. Un sommet S domine le vallon. Tu vas calculer sa hauteur, les longueurs de deux câbles, une passerelle intérieure et l'effet d'une erreur de mesure. Chaque étape utilise un outil de la fiche.

Le point H est le pied de la verticale issue de S sur $[AB]$. On sait que $H \in [AB]$,

$$AB = 120 \text{ m}, \quad \widehat{SAB} = 30^\circ, \quad \widehat{SBA} = 45^\circ.$$

On note $h = SH$.



Partie A - Hauteur du sommet

1. Justifie que $AH + HB = 120$.
2. Dans AHS , exprime AH en fonction de h en utilisant $\tan 30^\circ = \sqrt{3}/3$.
3. Dans BHS , exprime HB en fonction de h .
4. Montre que

$$h = \frac{120}{\sqrt{3} + 1} = 60(\sqrt{3} - 1).$$

5. Donne au centimètre près h , AH et HB .

Partie B - Longueurs des câbles

6. Calcule la longueur exacte AS du câble de gauche.
7. Calcule la longueur exacte BS du câble de droite.
8. Donne ces deux longueurs au centimètre près.
9. Vérifie tes résultats avec le théorème de Pythagore dans AHS et BHS .

Partie C - Une passerelle parallèle au sol

Le point $P \in [AS]$ vérifie $AP = AS/3$ et le point $Q \in [BS]$ vérifie $BQ = BS/3$.

10. Montre que $SP/SA = SQ/SB = 2/3$.
11. Démontre que $(PQ) \parallel (AB)$.
12. Calcule la longueur exacte de la passerelle PQ .
13. Calcule l'aire exacte du triangle SAB , puis celle du triangle SPQ .

Partie D - Position d'une cabine

Une cabine C se trouve sur $[AS]$ à une altitude de 30 m au-dessus de (AB) . Le point K est son projeté orthogonal sur $[AB]$.

14. Justifie que les triangles ACK et ASH sont semblables.
15. Calcule exactement AC , puis SC .
16. Calcule exactement AK .
17. La cabine est-elle située entre P et S ? Justifie et calcule PC .

Partie E - Incertitude sur l'angle

L'angle mesuré en A peut en réalité être compris entre $29,5^\circ$ et $30,5^\circ$. L'angle en B reste égal à 45° .

18. Pour un angle α , montre que la hauteur calculée serait

$$h(\alpha) = \frac{120}{1 + 1/\tan \alpha}.$$

19. À la calculatrice, calcule $h(29,5^\circ)$ et $h(30,5^\circ)$ au centimètre près.
20. Donne un encadrement de la hauteur compatible avec la mesure.
21. Compare cet intervalle à la hauteur calculée avec 30° et interprète l'incertitude maximale.

15 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration | Distinguer propriété et apparence*

1. **Faux.** L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit d'un *triangle rectangle*. Elle est alors le plus long côté de ce triangle.
2. **Vrai.** Par définition, une hauteur passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé, ou à la droite qui le porte.
3. **Vrai.** C'est exactement le sens réciproque de la caractérisation de la médiatrice :

$$MA = MB \implies M \text{ appartient à la médiatrice de } [AB].$$

4. **Faux.** Il faut que l'angle droit soit donné, codé ou démontré. Une apparence sur un dessin n'est pas une hypothèse.

Corrigé 2

 *Démonstration | Utiliser les sommes de référence*

1. Deux angles supplémentaires ont une somme de 180° :

$$180^\circ - 68^\circ = \boxed{112^\circ}.$$

2. Dans un triangle,

$$180^\circ - 47^\circ - 68^\circ = \boxed{65^\circ}.$$

3. Les deux angles à la base sont égaux. Leur somme vaut $180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$, donc chacun vaut

$$\frac{144^\circ}{2} = \boxed{72^\circ}.$$

4. Avec deux parallèles, les angles correspondants, alternes-internes ou opposés par le sommet reproduisent la mesure 68° . Les angles adjacents lui sont supplémentaires et valent 112° . Toutes les mesures sont donc

$$\boxed{68^\circ \text{ ou } 112^\circ}.$$

Corrigé 3

 *Démonstration | La réciproque sur les angles*

1. On utilise la **réciproque de la propriété des angles alternes-internes**.
2. Les droites (d) et (d') sont coupées par la sécante (t) . Les deux angles alternes-internes indiqués sont égaux, car ils mesurent tous deux 57° . D'après la réciproque, on conclut

$$\boxed{(d) \parallel (d')}.$$

3. Non. Les mesures 57° et 123° ne sont pas égales. Elles sont supplémentaires, mais cela ne permet pas d'appliquer cette réciproque aux deux angles annoncés comme alternes-internes. Il faudrait une autre paire correctement identifiée.

Corrigé 4

 *Démonstration / Pythagore avec l'hypoténuse au bon endroit*

1. Le triangle ABC est rectangle en A , donc BC est l'hypoténuse. Par Pythagore,

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= 7,2^2 + 9,6^2 \\ &= 51,84 + 92,16 = 144. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$BC = 12 \text{ cm}.$$

2. Le triangle DEF est rectangle en D , donc EF est l'hypoténuse. On cherche un côté de l'angle droit :

$$\begin{aligned} EF^2 &= DE^2 + DF^2 \\ 13^2 &= 5^2 + DF^2 \\ DF^2 &= 169 - 25 = 144. \end{aligned}$$

D'où

$$DF = 12 \text{ cm}.$$

3. Dans la première question, $12 > 9,6 > 7,2$. Dans la seconde, l'hypoténuse donnée vérifie $13 > 12 > 5$. Le contrôle est cohérent dans les deux cas.

Corrigé 5

 *Démonstration / Tester sans supposer l'égalité*

1. Le plus long côté est 10.

$$10^2 = 100 \quad \text{et} \quad 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100.$$

L'égalité est vérifiée : le triangle est rectangle.

2. Le plus long côté est 12.

$$12^2 = 144 \quad \text{et} \quad 7^2 + 9^2 = 49 + 81 = 130.$$

Les nombres sont différents : le triangle n'est pas rectangle.

3. Le plus long côté est 41.

$$41^2 = 1681 \quad \text{et} \quad 9^2 + 40^2 = 81 + 1600 = 1681.$$

Par la réciproque de Pythagore, le triangle est rectangle ; l'angle droit est opposé au côté de longueur 41.

Corrigé 6

 *Démonstration / Équidistance puis Pythagore*

1. On sait que $MA = MB = 5$ cm. Le point M est donc équidistant de A et B . Par la caractérisation de la médiatrice,

M appartient à la médiatrice de $[AB]$.

2. Comme I est le milieu de $[AB]$, la médiatrice de $[AB]$ est perpendiculaire à (AB) en I . Puisque M est sur cette médiatrice,

$$(MI) \perp (AB).$$

Le triangle MIA est donc rectangle en I .

3. On a $IA = AB/2 = 4$ cm. Par Pythagore dans MIA ,

$$MA^2 = MI^2 + IA^2,$$

donc

$$MI^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \implies \boxed{MI = 3 \text{ cm}}.$$

4. Le cercle de centre M passant par A a pour rayon $MA = 5$ cm. Comme $MB = MA$, il passe également par B . Son rayon vaut donc $\boxed{5 \text{ cm}}$.

Corrigé 7

 *Démonstration / Réduction par Thalès*

Les points A, M, B sont alignés, les points A, N, C sont alignés et $(MN) \parallel (BC)$. D'après Thalès,

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Le premier rapport vaut

$$\frac{AM}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Donc

$$AN = 0,6 \times AC = 0,6 \times 8 = \boxed{4,8}$$

et

$$MN = 0,6 \times BC = 0,6 \times 7,5 = \boxed{4,5}.$$

Le coefficient de réduction du grand triangle ABC vers le petit triangle AMN est

$$\boxed{0,6}.$$

Corrigé 8

 *Démonstration / Prouver avant de calculer*

1.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{AN}{AC} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

2. Les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre. Les rapports précédents sont égaux. D'après la réciproque de Thalès,

$$(MN) \parallel (BC).$$

3. On peut maintenant utiliser Thalès :

$$\frac{MN}{BC} = \frac{2}{3}, \quad MN = \frac{2}{3} \times 9 = \boxed{6}.$$

4.

$$BM = AB - AM = 15 - 10 = 5, \quad CN = AC - AN = 18 - 12 = 6.$$

Puis

$$\frac{BM}{BA} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \frac{CN}{CA} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

Cette égalité décrit la même réduction en mesurant cette fois les parties retirées depuis B et C .

Corrigé 9

 *Démonstration / Faire correspondre les sommets*

Les angles donnent les correspondances

$$A \leftrightarrow D \quad (52^\circ), \quad B \leftrightarrow F \quad (71^\circ), \quad C \leftrightarrow E \quad (57^\circ).$$

Les triangles ABC et DFE ont donc les mêmes angles : ils sont semblables.

Le côté AB correspond à DF . Le coefficient d'agrandissement est

$$k = \frac{DF}{AB} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Le côté AC correspond à DE , et BC correspond à FE . Ainsi,

$$DE = 1,5 \times 7 = \boxed{10,5}$$

et

$$EF = 1,5 \times 6 = \boxed{9}.$$

Corrigé 10

 *Démonstration / Tangente puis cosinus*

Le mât, le sol et la ligne de visée forment un triangle rectangle. Le côté adjacent à l'angle de 35° mesure 18 m et le côté opposé est la hauteur h .

$$\tan 35^\circ = \frac{h}{18}.$$

Donc

$$h = 18 \tan 35^\circ \approx 12,6037.$$

Au centimètre près,

$$h \approx 12,60 \text{ m}.$$

Si d est la distance entre la personne et le sommet, elle est l'hypoténuse. On peut utiliser le cosinus :

$$\cos 35^\circ = \frac{18}{d}, \quad d = \frac{18}{\cos 35^\circ} \approx 21,9739.$$

Ainsi,

$$d \approx 21,97 \text{ m}.$$

Le résultat est cohérent : l'hypoténuse est plus longue que 18 m et que 12,60 m.

Corrigé 11

 *Démonstration / Un angle par la tangente*

1.

$$9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2.$$

Les longueurs vérifient bien Pythagore.

2. Par rapport à θ ,

$$\tan \theta = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{9}{12} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

3.

$$\theta = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \approx \boxed{36,9^\circ}.$$

4. Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires :

$$90^\circ - 36,9^\circ \approx \boxed{53,1^\circ}.$$

On peut aussi calculer directement cet autre angle φ par

$$\tan \varphi = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}, \quad \varphi \approx 53,1^\circ.$$

Corrigé 12

 *Démonstration / Le diamètre fait apparaître l'angle droit*

1. Comme $[AB]$ est un diamètre et C un point du cercle, le théorème de l'angle inscrit dans un demi-cercle donne

$$\widehat{ACB} = 90^\circ.$$

Le triangle ABC est rectangle en C .

2. Par Pythagore,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2,$$

donc

$$BC^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \implies \boxed{BC = 8 \text{ cm}}.$$

3. Pour l'angle en A ,

$$\cos \widehat{CAB} = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{10} = 0,6,$$

d'où

$$\widehat{CAB} \approx \boxed{53,1^\circ}.$$

L'autre angle aigu vaut

$$\widehat{CBA} \approx \boxed{36,9^\circ}.$$

4. Les deux valeurs approchées ont pour somme

$$53,1^\circ + 36,9^\circ = 90^\circ,$$

ce qui est cohérent avec le troisième angle droit.

Corrigé 13

 *Démonstration / Ne pas oublier de convertir les unités*

À l'échelle 1 : 250, 1 cm sur le plan représente 250 cm en réalité.

La longueur réelle vaut

$$3,2 \times 250 = 800 \text{ cm} = 8 \text{ m},$$

et la largeur réelle vaut

$$2,4 \times 250 = 600 \text{ cm} = 6 \text{ m}.$$

Le périmètre est

$$2(8 + 6) = \boxed{28 \text{ m}},$$

et l'aire est

$$8 \times 6 = \boxed{48 \text{ m}^2}.$$

Avec un coefficient d'agrandissement 1,5, les dimensions deviennent

$$8 \times 1,5 = 12 \text{ m} \quad \text{et} \quad 6 \times 1,5 = 9 \text{ m}.$$

Le périmètre est multiplié par 1,5 :

$$28 \times 1,5 = \boxed{42 \text{ m}}.$$

L'aire est multipliée par $1,5^2 = 2,25$:

$$48 \times 2,25 = \boxed{108 \text{ m}^2}.$$

L'aire est un produit de deux longueurs ; chacun des deux facteurs est multiplié par 1,5, d'où le facteur carré.

Corrigé 14

 *Démonstration / Construire les valeurs exactes*

Dans un triangle équilatéral, la hauteur issue d'un sommet est aussi une médiane. Donc

$$BH = \frac{BC}{2} = \boxed{5 \text{ cm}}.$$

Par définition de la hauteur, $(AH) \perp (BC)$: le triangle AHB est rectangle en H .

Par Pythagore,

$$AB^2 = AH^2 + BH^2,$$

donc

$$AH^2 = 10^2 - 5^2 = 75 \implies \boxed{AH = 5\sqrt{3} \text{ cm}}.$$

L'aire du triangle équilatéral vaut

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{10 \times 5\sqrt{3}}{2} = \boxed{25\sqrt{3} \text{ cm}^2}.$$

Dans le triangle rectangle AHB , l'angle $\widehat{ABH}$ vaut 60° . Ainsi,

$$\sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{5}{10} = \boxed{\frac{1}{2}},$$

et

$$\tan 60^\circ = \frac{AH}{BH} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \boxed{\sqrt{3}}.$$

Corrigé 15

 *Démonstration / Ceva transforme trois rapports en concurrence*

Puisque D est le milieu de $[BC]$,

$$BD = DC \quad \text{et} \quad \frac{BD}{DC} = 1.$$

Le produit de Ceva vaut

$$\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

Les points D , E et F appartiennent aux trois côtés correspondants. Par le théorème de Ceva,

(AD) , (BE) et (CF) sont concourantes.

Si $AB = 12$ et $AF/FB = 1/2$, posons $AF = x$. Alors $FB = 2x$ et

$$x + 2x = 12, \quad 3x = 12, \quad x = 4.$$

Ainsi,

$$AF = 4 \text{ cm} \quad \text{et} \quad FB = 8 \text{ cm}.$$

Enfin, $G = (AD) \cap (BE)$. La concurrence démontrée signifie précisément que la troisième droite (CF) passe aussi par G . Donc

C , G et F sont alignés.

16 Corrigé du problème

Partie A - Hauteur du sommet

 *Démonstration / Deux tangentes et une seule inconnue*

1. Puisque $H \in [AB]$, les longueurs s'additionnent :

$$\boxed{AH + HB = AB = 120}.$$

2. Dans le triangle rectangle AHS ,

$$\tan 30^\circ = \frac{SH}{AH} = \frac{h}{AH}.$$

Comme $\tan 30^\circ = \sqrt{3}/3 = 1/\sqrt{3}$,

$$AH = \frac{h}{\tan 30^\circ} = \boxed{h\sqrt{3}}.$$

3. Dans le triangle rectangle BHS ,

$$\tan 45^\circ = \frac{SH}{HB} = \frac{h}{HB}.$$

Or $\tan 45^\circ = 1$, donc

$$\boxed{HB = h}.$$

4. En remplaçant dans $AH + HB = 120$,

$$h\sqrt{3} + h = 120,$$

donc

$$h = \frac{120}{\sqrt{3} + 1}.$$

Rationalisons le dénominateur :

$$h = \frac{120(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{120(\sqrt{3} - 1)}{2} = \boxed{60(\sqrt{3} - 1)}.$$

5. Numériquement,

$$h \approx 43,9230,$$

donc

$$\boxed{SH \approx 43,92 \text{ m}}.$$

De plus,

$$AH = h\sqrt{3} = 60(3 - \sqrt{3}) \approx 76,0769,$$

et $HB = h$. Ainsi,

$$\boxed{AH \approx 76,08 \text{ m}} \quad \text{et} \quad \boxed{HB \approx 43,92 \text{ m}}.$$

Leur somme arrondie vaut bien 120 m.

Partie B - Longueurs des câbles

 *Démonstration | Deux calculs exacts, puis un contrôle*

6. Dans le triangle rectangle AHS ,

$$\sin 30^\circ = \frac{SH}{AS} = \frac{h}{AS}.$$

Comme $\sin 30^\circ = 1/2$,

$$AS = 2h = \boxed{120(\sqrt{3} - 1) \text{ m}}.$$

7. Dans le triangle rectangle BHS ,

$$\sin 45^\circ = \frac{SH}{BS} = \frac{h}{BS}.$$

Comme $\sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$,

$$BS = \frac{h}{\sqrt{2}/2} = h\sqrt{2} = \boxed{60\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) \text{ m}}.$$

On peut aussi écrire $BS = 60(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \text{ m}$.

8. Au centimètre près,

$$\boxed{AS \approx 87,85 \text{ m}} \quad \text{et} \quad \boxed{BS \approx 62,12 \text{ m}}.$$

9. Dans AHS , $AH = h\sqrt{3}$. Alors

$$AH^2 + SH^2 = 3h^2 + h^2 = 4h^2 = (2h)^2 = AS^2.$$

Dans BHS , $HB = h$. Alors

$$HB^2 + SH^2 = h^2 + h^2 = 2h^2 = (h\sqrt{2})^2 = BS^2.$$

Les deux contrôles de Pythagore confirment les longueurs exactes.

Partie C - Une passerelle parallèle au sol

 *Démonstration | Réciproque de Thalès puis effet sur l'aire*

10. Comme $AP = AS/3$,

$$SP = AS - AP = AS - \frac{AS}{3} = \frac{2AS}{3},$$

donc $SP/SA = 2/3$. De même, $BQ = BS/3$ entraîne $SQ = 2BS/3$, donc

$$\boxed{\frac{SP}{SA} = \frac{SQ}{SB} = \frac{2}{3}}.$$

11. Les points S, P, A et S, Q, B sont alignés dans le même ordre. Les deux rapports précédents

sont égaux. Par la réciproque de Thalès,

$$(PQ) \parallel (AB).$$

12. Les triangles SPQ et SAB sont semblables avec le coefficient $2/3$. Par Thalès,

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{2}{3}.$$

Ainsi,

$$PQ = \frac{2}{3} \times 120 = \boxed{80 \text{ m}}.$$

13. La base AB mesure 120 m et la hauteur correspondante vaut h . Donc

$$\mathcal{A}(SAB) = \frac{120h}{2} = 60h = \boxed{3600(\sqrt{3} - 1) \text{ m}^2}.$$

Le coefficient de similitude étant $2/3$, les aires sont dans le rapport $(2/3)^2 = 4/9$:

$$\mathcal{A}(SPQ) = \frac{4}{9} \mathcal{A}(SAB) = \boxed{1600(\sqrt{3} - 1) \text{ m}^2}.$$

Numériquement, ces aires valent environ 2635,38 m² et 1171,28 m².

Partie D - Position d'une cabine



Démonstration / La similitude transforme une altitude en distance

14. Les triangles ACK et ASH sont rectangles respectivement en K et en H . Ils ont aussi le même angle en A , car A, C, S sont alignés et A, K, H sont alignés. Par le critère angle-angle, ils sont semblables.

15. Les côtés correspondants donnent

$$\frac{AC}{AS} = \frac{CK}{SH} = \frac{30}{h}.$$

Or $AS = 2h$. Ainsi,

$$AC = 2h \times \frac{30}{h} = \boxed{60 \text{ m}}.$$

Puis

$$SC = AS - AC = 120(\sqrt{3} - 1) - 60 = \boxed{120\sqrt{3} - 180 \text{ m}}.$$

Donc $SC \approx 27,85 \text{ m}$.

16. Dans le triangle rectangle ACK ,

$$\cos 30^\circ = \frac{AK}{AC}.$$

Par conséquent,

$$AK = 60 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{30\sqrt{3} \text{ m}} \approx 51,96 \text{ m}.$$

17. On a

$$AP = \frac{AS}{3} = 40(\sqrt{3} - 1) \approx 29,28 \text{ m}.$$

Comme $AP < AC < AS$, l'ordre sur le câble est A, P, C, S . La cabine est donc située entre P et S . Enfin,

$$PC = AC - AP = 60 - 40(\sqrt{3} - 1) = \boxed{100 - 40\sqrt{3} \text{ m}} \approx 30,72 \text{ m}.$$

Partie E - Incertitude sur l'angle

 *Démonstration / Un intervalle de mesures produit un intervalle de hauteurs*

18. Dans le triangle rectangle AHS ,

$$\tan \alpha = \frac{h}{AH}, \quad AH = \frac{h}{\tan \alpha}.$$

L'angle en B restant égal à 45° , on a toujours $HB = h$. Puisque $AH + HB = 120$,

$$\frac{h}{\tan \alpha} + h = 120.$$

En factorisant h ,

$$h \left(1 + \frac{1}{\tan \alpha} \right) = 120,$$

d'où

$$\boxed{h(\alpha) = \frac{120}{1 + 1/\tan \alpha}}.$$

19. La calculatrice, réglée en degrés, donne

$$h(29,5^\circ) \approx 43,3605$$

et

$$h(30,5^\circ) \approx 44,4829.$$

Au centimètre près,

$$\boxed{h(29,5^\circ) \approx 43,36 \text{ m}} \quad \text{et} \quad \boxed{h(30,5^\circ) \approx 44,48 \text{ m}}.$$

20. Sur cet intervalle d'angles aigus, une augmentation de l'angle en A augmente la hauteur compatible. On obtient l'encadrement

$$\boxed{43,36 \text{ m} \lesssim h \lesssim 44,48 \text{ m}}.$$

21. Avec 30° , on avait $h \approx 43,92 \text{ m}$. Les écarts aux bornes sont environ $0,56 \text{ m}$. Une incertitude angulaire de $0,5^\circ$ produit donc ici une incertitude d'environ $0,56 \text{ m}$ sur la hauteur.

17 Fiche-mémoire

★ Théorème | Pythagore

Si ABC est rectangle en A ,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Réciproque : teste séparément le carré du plus long côté et la somme des deux autres carrés.

★ Théorème | Thalès

Si $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et $MN \parallel BC$,

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

La réciproque permet de prouver le parallélisme.

 Méthode | Preuve

Hypothèses, théorème nommé, conditions vérifiées, conclusion précise.

 Définition | Trigonométrie

Dans un triangle rectangle :

$$\cos \theta = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}},$$

$$\sin \theta = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}},$$

$$\tan \theta = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}.$$

✓ Propriété | Cercles et échelles

- un point équidistant de A et B est sur la médiatrice de $[AB]$;
- un point d'un cercle de diamètre $[AB]$ forme avec A et B un triangle rectangle ;
- un agrandissement de coefficient k multiplie les aires par k^2 .

 Attention | Réflexes

Le dessin ne prouve rien. Identifie l'hypoténuse, respecte l'ordre dans Thalès, règle la calculatrice en degrés et arrondis à la fin.

Une figure devient claire quand chaque information a un rôle.

Tu peux chercher longtemps sans être perdu : reviens aux hypothèses et avance une propriété à la fois.