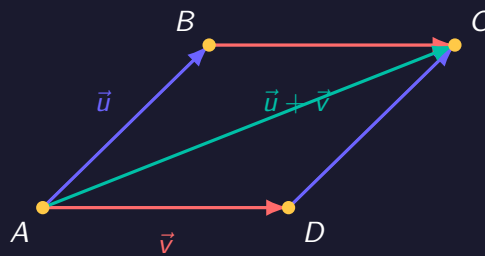


Vecteurs du plan

Déplacer, calculer, démontrer

Chasles ■ Coordonnées ■ Colinéarité



Seconde générale ■ Mathématiques ■ Programme officiel



Cours complet



15 exercices



Problème défi



Corrigés

Table des matières

1	❓ Pourquoi étudier les vecteurs ?	4
1.1	Un déplacement qui ne dépend pas du point de départ	4
1.2	Trois langages complémentaires	4
2	→ Comprendre ce qu'est un vecteur	4
2.1	Translation et vecteur déplacement	4
2.2	Égalité et représentants	5
2.3	Vecteur nul, opposé et norme	5
3	+ Additionner des vecteurs	6
3.1	Relation de Chasles	6
3.2	Somme avec des représentants de même origine	6
3.3	Soustraire un vecteur	7
4	✖ Multiplier un vecteur par un réel	7
4.1	Sens géométrique de $k\vec{u}$	7
4.2	Colinéarité	8
5	📊 Calculer avec des coordonnées	8
5.1	Base orthonormée et coordonnées d'un vecteur	8
5.2	Opérations coordonnées par coordonnées	9
5.3	Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$	10
5.4	Norme et distance dans un repère orthonormé	10
5.5	Milieu d'un segment	11
6	 Déterminant et colinéarité	11
6.1	Calculer un déterminant	11
6.2	Critère de colinéarité	12
7	📐 Démontrer en géométrie avec des vecteurs	13
7.1	Alignement de trois points	13
7.2	Parallélisme de deux droites	13
7.3	Construire un point défini par une relation	14
8	🔗 Combiner deux vecteurs non colinéaires	14
8.1	Décomposer un vecteur	14
9	🧠 Choisir une stratégie	15
10	▲ Pour aller plus loin - guidé et facultatif	15
10.1	Barycentre de deux points	16
10.2	Centre de gravité d'un triangle	16
10.3	Théorème de Varignon	17
10.4	Aire d'un triangle par un déterminant	17
11	🧰 Boîte à outils et erreurs à éviter	19

12	 Exercices	20
13	 Problème : <i>Le drone de la réserve</i> ★★ ★	23
14	 Corrigés détaillés	25
15	 Corrigé du problème	31
16	 Fiche-mémoire	35

1 ? Pourquoi étudier les vecteurs ?

1.1 Un déplacement qui ne dépend pas du point de départ

Un vecteur décrit un **déplacement** : une direction, un sens et une longueur. Il ne dit pas où l'on part. C'est ce qui permet d'utiliser le même objet pour déplacer une figure, décrire la vitesse d'un mobile ou démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme.

Intuition | Une flèche que l'on peut faire glisser

Imagine une instruction : « avance de 4 carreaux vers la droite et de 2 carreaux vers le haut ». Cette instruction reste la même où que tu te trouves. Les flèches qui la représentent peuvent être placées à des endroits différents : elles sont les **représentants d'un même vecteur**.

1.2 Trois langages complémentaires

- Le **dessin** aide à voir les translations, les parallélogrammes et les alignements.
- Le **calcul vectoriel** transforme une figure en égalités que l'on peut simplifier.
- Les **coordonnées** permettent de calculer exactement et de vérifier une conjecture.

Attention | Une flèche dessinée n'est pas une preuve

Deux flèches qui semblent parallèles et de même longueur ne représentent le même vecteur que si cela est donné, codé ou démontré. La figure suggère ; les propriétés concluent.

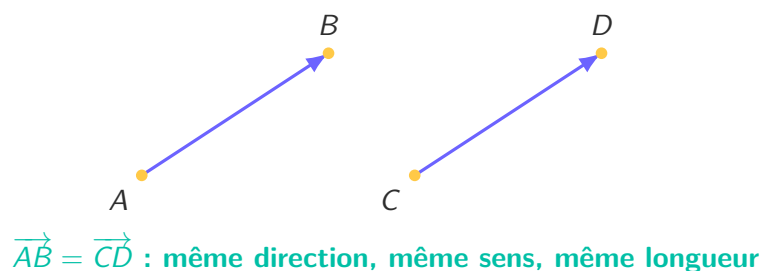
2 → Comprendre ce qu'est un vecteur

2.1 Translation et vecteur déplacement

Définition | Le vecteur $\overrightarrow{AB}$

La translation qui transforme le point A en le point B est associée au vecteur $\overrightarrow{AB}$. Ce vecteur possède :

- la **direction** de la droite (AB) ;
- le **sens** de A vers B ;
- la **norme** $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$, c'est-à-dire la longueur du déplacement.



« Déplacer, calculer, démontrer : un même vecteur, plusieurs regards. »

2.2 Égalité et représentants

Définition | Égalité de deux vecteurs

Deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont la même direction, le même sens et la même norme. Une même flèche déplacée parallèlement à elle-même fournit un autre **représentant** du même vecteur.

★ Théorème | Parallélogramme

Pour quatre points A, B, C, D ,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

si et seulement si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.

Démonstration | Les deux sens de la caractérisation

Si $ABCD$ est un parallélogramme, les côtés opposés $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles et de même longueur ; les sens de A vers B et de D vers C correspondent. Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Réciproquement, si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors $(AB) \parallel (DC)$ et $AB = DC$. Un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles et de même longueur est un parallélogramme.

Attention | L'ordre des lettres donne le sens

Dans un parallélogramme $ABCD$, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ mais $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$. En effet, $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC}$.

2.3 Vecteur nul, opposé et norme

Propriété | Trois objets à reconnaître

- Le **vecteur nul** est noté $\vec{0}$: pour tout point A , $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
- L'**opposé** de $\vec{u}$ est $-\vec{u}$: même direction et même norme, sens contraire.
- La **norme** $\|\vec{u}\|$ est une longueur, donc un nombre réel positif ou nul.

En particulier,

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}, \quad \|\vec{u}\| = \|-\vec{u}\|, \quad \|\vec{0}\| = 0.$$

Exemple | Ne pas confondre vecteur et norme

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur ; AB et $\|\overrightarrow{AB}\|$ sont des nombres. On peut écrire $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$, mais jamais $\overrightarrow{AB} = AB$.

3 + Additionner des vecteurs

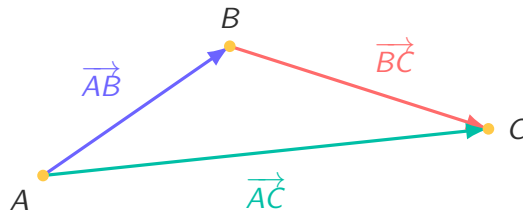
3.1 Relation de Chasles

★ Théorème | Relation de Chasles

Pour tous points A, B, C ,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Le point d'arrivée du premier vecteur doit être le point de départ du second.



Démonstration | Pourquoi la relation de Chasles est-elle naturelle ?

La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ envoie A sur B . Puis la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ envoie B sur C . L'enchaînement réalise donc directement le déplacement de A vers C , c'est-à-dire le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

✂ Méthode | Simplifier une chaîne

Cherche deux vecteurs dont les lettres centrales se rejoignent :

$$\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}.$$

Si nécessaire, remplace un vecteur par son opposé avant d'appliquer Chasles.

💡 Exemple | Une chaîne plus longue

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

De même, une boucle se referme :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}.$$

3.2 Somme avec des représentants de même origine

✓ Propriété | Règle du parallélogramme

Si $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, on construit le parallélogramme $ABCD$. Sa diagonale issue de A représente la somme :

$$\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}.$$

 *Démonstration | Chasles retrouve la diagonale*

Dans le parallélogramme, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{v}$. Ainsi,

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

3.3 Soustraire un vecteur

Définition | Différence

Soustraire $\vec{v}$, c'est ajouter son opposé :

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$

En particulier, pour trois points A, B, C ,

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}.$$

Attention | Une simplification dangereuse

Les lettres d'un vecteur ne sont pas des nombres que l'on « simplifie ». L'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ vient de Chasles, pas d'une suppression formelle de la lettre B .

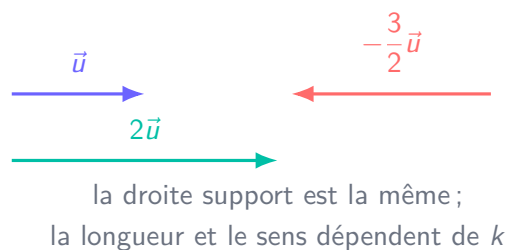
4 Multiplier un vecteur par un réel

4.1 Sens géométrique de $k\vec{u}$

Définition | Produit par un réel

Soit un réel k et un vecteur $\vec{u}$.

- Si $k > 0$, $k\vec{u}$ a le même sens que $\vec{u}$ et sa norme vaut $k \|\vec{u}\|$.
- Si $k < 0$, $k\vec{u}$ a le sens contraire et sa norme vaut $|k| \|\vec{u}\|$.
- Si $k = 0$, alors $k\vec{u} = \vec{0}$.



4.2 Colinéarité

Définition | Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsqu'ils ont la même direction. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, cela signifie qu'il existe un réel k tel que

$$\vec{v} = k\vec{u}.$$

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Propriété | Calcul algébrique

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et tous réels k, ℓ ,

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v},$$

$$(k + \ell)\vec{u} = k\vec{u} + \ell\vec{u},$$

$$k(\ell\vec{u}) = (k\ell)\vec{u}.$$

Ces règles ressemblent au calcul sur les nombres, mais les objets obtenus restent des vecteurs.

Exemple | Lire le signe du coefficient

Si $\vec{v} = -3\vec{u}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, leurs sens sont contraires et $\|\vec{v}\| = 3\|\vec{u}\|$.

5 Calculer avec des coordonnées

5.1 Base orthonormée et coordonnées d'un vecteur

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires et de norme 1.

Définition | Coordonnées

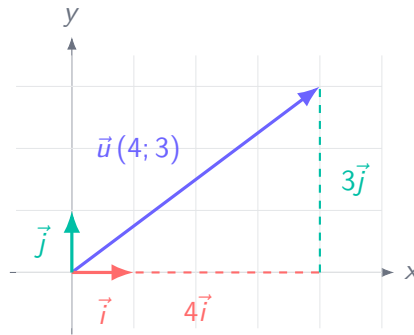
Tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit d'une unique manière

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

On dit que $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$ et l'on note

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Le nombre x mesure le déplacement horizontal et y le déplacement vertical.



 *Démonstration* | Pourquoi l'écriture est-elle unique ?

Supposons que $x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. Alors

$$(x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} = \vec{0}.$$

Un déplacement horizontal ne peut annuler un déplacement vertical que si les deux sont nuls. Ainsi $x - x' = 0$ et $y - y' = 0$, donc $x = x'$ et $y = y'$.

5.2 Opérations coordonnées par coordonnées

✓ Propriété | Somme et produit

Si $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$, alors

$$\vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y')$$

et, pour tout réel k ,

$$k\vec{u} = (kx; ky).$$

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées correspondantes sont égales.

 *Démonstration* | Comparer les coefficients de $\vec{i}$ et $\vec{j}$

On écrit

$$\vec{u} + \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) + (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}.$$

L'unicité de l'écriture dans la base donne les coordonnées annoncées. Le produit par k se démontre de la même façon.

💡 Exemple | Résoudre une équation vectorielle

Soit $\vec{u}(2; -1)$, $\vec{v}(-3; 4)$ et $\vec{w}$ tel que $2\vec{w} - \vec{u} = \vec{v}$. Alors

$$2\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (-1; 3), \quad \vec{w} \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right).$$

5.3 Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$

★ Théorème | De l'origine vers l'extrémité

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A).$$

On calcule toujours « arrivée moins départ ».

 Démonstration | Démonstration avec les vecteurs position

Par Chasles,

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}, \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Or $\overrightarrow{OA} = (x_A; y_A)$ et $\overrightarrow{OB} = (x_B; y_B)$. La soustraction coordonnée par coordonnée donne le résultat.

⚠ Attention | Le signe est porteur de sens

$\overrightarrow{BA} = (x_A - x_B; y_A - y_B) = -\overrightarrow{AB}$. Inverser les points inverse les deux coordonnées.

5.4 Norme et distance dans un repère orthonormé

★ Théorème | Norme d'un vecteur

Dans une base orthonormée, si $\vec{u} = (x; y)$, alors

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Par conséquent, pour $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$,

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

 Démonstration | Pythagore derrière la formule

Le vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est la diagonale d'un rectangle dont les côtés perpendiculaires ont pour longueurs $|x|$ et $|y|$. Le théorème de Pythagore donne

$$\|\vec{u}\|^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2.$$

La norme étant positive, on prend la racine carrée positive. Pour la distance AB , on applique cette formule au vecteur $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.

💡 Exemple | Une distance exacte

Si $A(-2; 1)$ et $B(4; -3)$, alors $\overrightarrow{AB} = (6; -4)$ et

$$AB = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{52} = \boxed{2\sqrt{13}}.$$

5.5 Milieu d'un segment

★ Théorème | Coordonnées du milieu

Le milieu I du segment joignant $A(x_A; y_A)$ à $B(x_B; y_B)$ a pour coordonnées

$$I \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

Vectoriellement,

$$\boxed{\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})}.$$

✍ Démonstration | Deux coordonnées obtenues sans deviner

Comme I est le milieu de $[AB]$, les déplacements de A vers I et de I vers B sont égaux :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}.$$

Sur la première coordonnée,

$$x_I - x_A = x_B - x_I,$$

donc $2x_I = x_A + x_B$. De même, $2y_I = y_A + y_B$. On obtient exactement la formule annoncée.

✂ Méthode | Reconnaître un parallélogramme avec ses diagonales

Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales ont le même milieu. Calcule donc séparément les milieux des deux diagonales et compare leurs coordonnées.

6 || Déterminant et colinéarité

6.1 Calculer un déterminant

📖 Définition | Déterminant de deux vecteurs

Dans une base orthonormée, pour $\vec{u} = (x; y)$ et $\vec{v} = (x'; y')$, on définit

$$\boxed{\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'}.$$

Une présentation pratique est

$$\det \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} = xy' - yx'.$$

⚠ Attention | La diagonale descendante est soustraite

Dans $xy' - yx'$, le premier produit associe x à y' . Le second associe y à x' et il est soustrait. Écris les deux produits avant de calculer pour éviter une inversion.

💡 Exemple | Calcul direct

Pour $\vec{u} = (3; -2)$ et $\vec{v} = (5; 4)$,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 3 \times 4 - (-2) \times 5 = 12 + 10 = \boxed{22}.$$

Ces vecteurs ne sont donc pas colinéaires.

6.2 Critère de colinéarité

★ Théorème | Déterminant nul

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0.$$

Lorsque les coordonnées ne créent pas de division par zéro, cela équivaut à leur proportionnalité.

✎ Démonstration | Démonstration des deux sens

Supposons d'abord $\vec{v} = k\vec{u}$. Si $\vec{u} = (x; y)$, alors $\vec{v} = (kx; ky)$, donc

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = x(ky) - y(kx) = kxy - kxy = 0.$$

Réciproquement, supposons $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$. Écrivons $\vec{u} = (x; y)$ et $\vec{v} = (x'; y')$.

- Si $x \neq 0$, posons $k = x'/x$. L'égalité $xy' - yx' = 0$ donne $y' = yx'/x = ky$, donc $\vec{v} = k\vec{u}$.
- Si $x = 0$, alors $y \neq 0$. L'égalité $-yx' = 0$ impose $x' = 0$. En posant $k = y'/y$, on obtient encore $\vec{v} = k\vec{u}$.

Le cas $\vec{u} = \vec{0}$ est immédiat puisque le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

⚠ Attention | Les quotients ne sont pas toujours disponibles

Comparer x'/x et y'/y échoue si $x = 0$ ou $y = 0$. Le déterminant fonctionne dans tous les cas et évite cette difficulté.

7 Démontrer en géométrie avec des vecteurs

7.1 Alignement de trois points

✓ Propriété | Critère d'alignement

Les points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0.$$

Démonstration | Pourquoi cela caractérise une même droite

Si A, B, C sont alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont la direction de la même droite : ils sont colinéaires. Réciproquement, si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, partir de A puis suivre $\overrightarrow{AC}$ revient à rester sur la droite dirigée par $\overrightarrow{AB}$. Le point C appartient donc à (AB) .

Exemple | Tester un alignement

Soit $A(1; 2)$, $B(4; 5)$ et $C(7; 8)$. Alors

$$\overrightarrow{AB} = (3; 3), \quad \overrightarrow{AC} = (6; 6),$$

et

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 3 \times 6 - 3 \times 6 = 0.$$

Les points sont alignés.

7.2 Parallélisme de deux droites

✓ Propriété | Vecteurs directeurs colinéaires

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires :

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0.$$

Méthode | Une rédaction en quatre lignes

1. Calcule les coordonnées des deux vecteurs.
2. Calcule leur déterminant.
3. Conclue qu'ils sont colinéaires si le déterminant est nul.
4. Traduis cette colinéarité par l'alignement ou le parallélisme demandé.

7.3 Construire un point défini par une relation

Exemple | Trouver les coordonnées d'un point

On cherche M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC}$ avec $A(1; -2)$, $B(-1; 3)$ et $C(2; 5)$. On a $\overrightarrow{BC} = (3; 2)$, donc $\overrightarrow{AM} = (6; 4)$. Ainsi

$$x_M - 1 = 6, \quad y_M - (-2) = 4,$$

d'où $M(7; 2)$.

Méthode | De la relation vectorielle au point

Calcule d'abord le vecteur situé à droite. Puis utilise

$$\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A; y_M - y_A)$$

et identifie séparément les deux coordonnées.

8 Combiner deux vecteurs non colinéaires

8.1 Décomposer un vecteur

Théorème | Deux directions suffisent

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, tout vecteur $\vec{w}$ peut s'écrire d'une unique manière

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

avec deux réels a et b .

Démonstration | Existence et unicité par un système

Écrivons $\vec{u} = (x; y)$, $\vec{v} = (x'; y')$ et $\vec{w} = (X; Y)$. On cherche a, b tels que

$$\begin{cases} ax + bx' = X, \\ ay + by' = Y. \end{cases}$$

Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $\Delta = xy' - yx' \neq 0$. Les nombres

$$a = \frac{Xy' - Yx'}{\Delta}, \quad b = \frac{xY - yX}{\Delta}$$

vérifient le système : en les remplaçant dans $ax + bx'$, le numérateur se réduit à $X\Delta$; de même, $ay + by' = Y$. L'écriture existe.

Si deux couples (a, b) et (a', b') convenaient, leur différence donnerait $(a - a')\vec{u} + (b - b')\vec{v} = \vec{0}$. Si l'un des coefficients était non nul, un vecteur serait multiple de l'autre, ce qui contredirait leur non-colinéarité. Donc $a = a'$ et $b = b'$: l'écriture est unique.

💡 Exemple | Résolution sans apprendre les formules

Avec $\vec{u} = (1; 2)$, $\vec{v} = (3; -1)$ et $\vec{w} = (11; 1)$, cherchons a, b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$:

$$\begin{cases} a + 3b = 11, \\ 2a - b = 1. \end{cases}$$

La seconde équation donne $b = 2a - 1$. En remplaçant dans la première, $7a = 14$, donc $a = 2$ et $b = 3$. Ainsi $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$.

9 🧭 Choisir une stratégie

🔧 Méthode | Le diagnostic en six questions

1. Veux-tu simplifier une chaîne de points ? Pense à Chasles.
2. Veux-tu construire une somme ? Pense au parallélogramme.
3. Veux-tu calculer une longueur ? Passe aux coordonnées puis à la norme.
4. Veux-tu prouver un alignement ou un parallélisme ? Calcule un déterminant.
5. Veux-tu prouver qu'un quadrilatère est un parallélogramme ? Compare deux vecteurs opposés ou les milieux des diagonales.
6. Veux-tu déterminer un point ? Traduis la relation vectorielle en deux équations de coordonnées.

🧠 Intuition | Changer de langage est souvent la vraie idée

Une relation difficile à voir sur le dessin peut devenir immédiate avec Chasles. Un calcul vectoriel long peut devenir deux petites égalités en coordonnées. Le meilleur outil n'est pas toujours celui avec lequel l'énoncé commence.

⚠️ Attention | Contrôles rapides

Une distance doit être positive. Un milieu doit se situer entre les coordonnées des extrémités. Un déterminant nul doit être cohérent avec la figure. Ces contrôles ne remplacent pas la preuve, mais ils repèrent beaucoup d'erreurs de signe.

10 🏔️ Pour aller plus loin - guidé et facultatif

Cette partie dépasse le socle strict. Elle est ouverte à toute personne curieuse : chaque outil supplémentaire est construit à partir des vecteurs déjà étudiés.

10.1 Barycentre de deux points

Définition | Point d'équilibre

Soient deux points A, B affectés de deux réels α, β tels que $\alpha + \beta \neq 0$. Leur barycentre est l'unique point G vérifiant

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Démonstration | Formule du vecteur position

Par Chasles, $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OA}$, et de même pour B . Ainsi,

$$\alpha(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}) + \beta(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0}.$$

Donc

$$(\alpha + \beta)\overrightarrow{OG} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB},$$

et finalement

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}}{\alpha + \beta}.$$

En coordonnées, on effectue exactement la même moyenne pondérée sur les abscisses et les ordonnées.

Exemple | Le milieu est un barycentre

Avec $\alpha = \beta = 1$,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}.$$

On retrouve le milieu de $[AB]$.

10.2 Centre de gravité d'un triangle

Théorème | Isobarycentre de trois points

Pour un triangle ABC , le point G défini par

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

a pour vecteur position

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}.$$

Il est le point de concours des trois médianes et se situe aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet.

 Démonstration | Pourquoi G appartient-il à chaque médiane ?

Soit I le milieu de $[BC]$. Alors

$$\vec{OI} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2}.$$

La formule de G donne

$$\vec{AG} = \vec{OG} - \vec{OA} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC} - 2\vec{OA}}{3}.$$

Or

$$\vec{AI} = \vec{OI} - \vec{OA} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC} - 2\vec{OA}}{3}.$$

Donc $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AI}$: les points A, G, I sont alignés et G est situé aux deux tiers de la médiane. Le même calcul depuis B et C prouve que les trois médianes passent par G .

10.3 Théorème de Varignon

★ **Théorème** | Les milieux d'un quadrilatère

Dans tout quadrilatère $ABCD$, les milieux respectifs I, J, K, L de $[AB], [BC], [CD], [DA]$ forment un parallélogramme.

 Démonstration | Une preuve de deux lignes vectorielles

Avec la formule du milieu,

$$\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AC} \quad \text{et} \quad \vec{LK} = \frac{1}{2}\vec{AC}.$$

Ainsi $\vec{IJ} = \vec{LK}$. Le quadrilatère $IJKL$ possède deux côtés opposés représentés par des vecteurs égaux : c'est un parallélogramme.

10.4 Aire d'un triangle par un déterminant

★ **Théorème** | Formule d'aire

Dans un repère orthonormé,

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{AC})|.$$

Le déterminant nul correspond exactement à une aire nulle, donc à trois points alignés.

 Démonstration | Une preuve par aires orientées de trapèzes

Une translation ne change pas les aires : plaçons A à l'origine et écrivons $B(x; y), C(x'; y')$. Lorsque $0 \leq x \leq x'$, l'aire comprise entre les segments $[AB], [BC]$ et l'axe des abscisses, comptée avec un signe, est la somme de deux trapèzes :

$$\frac{xy}{2} + \frac{(x' - x)(y + y')}{2}.$$

On retire le trapèze sous $[AC]$, d'aire $x'y'/2$. Après simplification, il reste

$$\frac{x'y - xy'}{2} = -\frac{1}{2} \det(\vec{AB}, \vec{AC}).$$

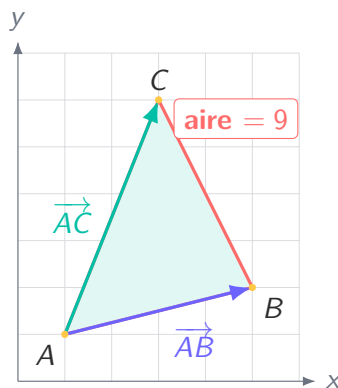
Le signe dépend de l'ordre dans lequel on tourne de $\vec{AB}$ vers $\vec{AC}$; l'aire ordinaire est positive, d'où la valeur absolue. Les autres positions des points donnent la même formule en comptant les aires orientées.

💡 Exemple | Une aire exacte, sans mesurer sur le dessin

Avec $A(1; 1)$, $B(5; 2)$ et $C(3; 6)$, on a $\vec{AB} = (4; 1)$ et $\vec{AC} = (2; 5)$. Ainsi,

$$\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = 4 \times 5 - 1 \times 2 = 18, \quad \boxed{\mathcal{A}(ABC) = 9}.$$

Le dessin aide à comprendre la figure ; le déterminant fournit, lui, la valeur exacte.



11 Boîte à outils et erreurs à éviter

Méthode | Chasles

Relier arrivée et départ : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Méthode | Coordonnées

Pour $\overrightarrow{AB}$: arrivée moins départ sur chaque coordonnée.

Méthode | Distance

Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, puis $AB = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Méthode | Déterminant

$xy' - yx'$. Zéro signifie colinéarité.

Attention | Sens

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$: l'ordre des lettres compte.

Attention | Objets

Ne confonds pas le vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec la longueur AB .

Intuition | Le réflexe le plus utile

Avant tout calcul, écris ce que tu cherches sous forme de vecteur. Tu verras alors si Chasles, les coordonnées, le milieu ou le déterminant répond directement à la question.

12 Exercices

Pour chaque exercice, rédige les étapes et nomme les propriétés. Les étoiles indiquent une progression ; elles ne ferment la porte à personne.

Exercice 1 : Vocabulaire et logique

Indique si chaque affirmation est vraie ou fausse, puis corrige les affirmations fausses.

1. Deux vecteurs de même norme sont égaux.
2. Pour tous points A et B , $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
3. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.
4. Si $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 2 : Représenter des vecteurs

Sur un quadrillage, on donne $\vec{u} = (3; 1)$ et $\vec{v} = (-1; 2)$.

1. Représente $\vec{u}$ à partir d'un point A de ton choix.
2. Représente $\vec{v}$ avec la même origine A .
3. Construis $\vec{u} + \vec{v}$ par la règle du parallélogramme.
4. Représente ensuite $-\vec{u}$ et $2\vec{v}$.

Exercice 3 : Relation de Chasles

Simplifie au maximum :

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$;
2. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}$;
3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$;
4. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$.

Exercice 4 : Parallélogramme et somme

Les points A, B, D ne sont pas alignés. On construit C tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

1. Justifie que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Exprime $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Simplifie $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
4. Construis un point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Exercice 5 : Multiples et colinéarité

On donne $\vec{u} = (2; -3)$, $\vec{v} = (-6; 9)$ et $\vec{w} = (4; 5)$.

1. Trouve le réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.
2. Compare les sens de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. Exprime $\|\vec{v}\|$ en fonction de $\|\vec{u}\|$.
4. Montre que $\vec{w}$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$.

Exercice 6 ★★☆☆ : Calcul coordonné

Soit $\vec{u} = (3; -2)$ et $\vec{v} = (-1; 5)$.

1. Calcule $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$.
2. Calcule $2\vec{u} - 3\vec{v}$.
3. Détermine $\vec{x}$ tel que $2\vec{x} + \vec{u} = \vec{v}$.
4. Vérifie ton résultat en le remplaçant dans l'équation initiale.

Exercice 7 ★★☆☆ : Des points aux vecteurs

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-2; 3)$, $B(4; -1)$ et $C(1; 2)$.

1. Calcule $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Vérifie la relation de Chasles en coordonnées.
3. Détermine les coordonnées de D tel que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$.
4. Calcule $\overrightarrow{BD}$.

Exercice 8 ★★☆☆ : Norme, distance et milieu

On donne $A(-3; 1)$, $B(5; 7)$ et $C(1; 4)$.

1. Calcule la distance AB .
2. Calcule AC et BC .
3. Montre de deux façons différentes que C est le milieu de $[AB]$.
4. Que vaut $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$?

Exercice 9 ★★☆☆ : Compléter un parallélogramme

On donne $A(-4; 2)$, $B(2; 6)$ et $C(5; 1)$. On cherche D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme dans cet ordre.

1. Calcule le milieu I de $[AC]$.
2. En utilisant le fait que I doit aussi être le milieu de $[BD]$, détermine D .
3. Vérifie que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
4. Calcule les longueurs des deux diagonales.

Exercice 10 ★★☆☆ : Déterminants

On donne $\vec{u} = (4; 6)$, $\vec{v} = (-2; -3)$ et $\vec{w} = (1; 2)$.

1. Calcule $\det(\vec{u}, \vec{v})$ et interprète le résultat.
2. Trouve k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.
3. Calcule $\det(\vec{u}, \vec{w})$.
4. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires?

Exercice 11 ★★☆☆ : Alignement de points

On donne $A(1; -2)$, $B(4; 1)$, $C(7; 4)$ et $D(0; 3)$.

1. Calcule $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Montre que A, B, C sont alignés.

3. Calcule $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
4. Le point D appartient-il à la droite (AB) ?

Exercice 12 ★★☆☆ : Parallélisme et parallélogramme

On donne $A(-2; 1)$, $B(4; 3)$, $C(1; -4)$ et $D(7; -2)$.

1. Calcule $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. Montre que $(AB) \parallel (CD)$.
3. Explique pourquoi le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.
4. Vérifie ce résultat en comparant les milieux de ses diagonales.

Exercice 13 ★★★☆☆ : Décomposition dans deux directions

Soit $\vec{u} = (2; 1)$, $\vec{v} = (-1; 2)$ et $\vec{w} = (8; -1)$.

1. Montre que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. Cherche a, b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
3. Vérifie directement l'égalité obtenue.
4. Explique pourquoi aucun autre couple (a, b) ne peut convenir.

Exercice 14 ★★★☆☆ : Centre de gravité guidé

Dans le triangle ABC , on donne $A(-3; 0)$, $B(6; 0)$ et $C(0; 6)$. Le point I est le milieu de $[BC]$.

1. Calcule les coordonnées de I .
2. Calcule le point G dont les coordonnées sont les moyennes de celles de A, B, C .
3. Montre que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
4. Vérifie que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Exercice 15 ★★★☆☆ : Varignon et aire

On donne le quadrilatère $ABCD$ avec

$$A(-4; 0), \quad B(2; 4), \quad C(6; -2), \quad D(-2; -6).$$

Les points I, J, K, L sont les milieux respectifs de $[AB], [BC], [CD], [DA]$.

1. Calcule I, J, K, L .
2. Calcule $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$, puis conclus.
3. Calcule $\overrightarrow{IL}$ et vérifie que $IJKL$ est un parallélogramme.
4. À l'aide d'un déterminant, calcule l'aire de $IJKL$.

13 🦋 Problème : Le drone de la réserve ★★ ★

🧠 Intuition | Le défi

Une réserve naturelle triangulaire est modélisée dans un repère orthonormé par les sommets $A(-4; -1)$, $B(5; 2)$ et $C(2; 8)$. Un drone doit mesurer le terrain, localiser plusieurs relais et déterminer exactement son point d'entrée dans un corridor de sécurité. Toutes les étapes réutilisent les outils de la fiche.

Partie A - Cartographier la réserve

1. Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Calcule les trois longueurs AB , AC et BC sous forme exacte.
3. Calcule $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et justifie que la réserve n'est pas aplatie.
4. En utilisant la formule d'aire de l'approfondissement, calcule l'aire exacte du triangle ABC .

Partie B - Trois balises au milieu des côtés

On note I, J, K les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

5. Calcule les coordonnées de I, J, K .
6. Calcule $\overrightarrow{JK}$ et montre que $\overrightarrow{JK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
7. Établis de même des relations entre $\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis entre $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BA}$.
8. Déduis-en le périmètre du triangle IKJ en fonction de celui de ABC .

Partie C - Le centre opérationnel

Le centre opérationnel est le point G dont les coordonnées sont les moyennes de celles de A, B, C .

9. Calcule les coordonnées de G .
10. Montre que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
11. Montre de même que G appartient aux deux autres médianes. Que vient-on de démontrer ?
12. Vérifie directement que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Partie D - Un relais pondéré

Un relais P doit vérifier

$$\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \vec{0}.$$

13. En introduisant un origine O , montre que

$$6\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}.$$

14. Calcule les coordonnées exactes de P .
15. Calcule $\overrightarrow{GP}$ et la distance GP .
16. Explique, grâce aux coefficients positifs $1/6$, $2/6$ et $3/6$, pourquoi P est situé à l'intérieur du triangle.

Partie E - Entrer dans le corridor de sécurité

La trajectoire du drone est décrite par les points M_t tels que

$$\overrightarrow{GM_t} = t\vec{u}, \quad \vec{u} = (1; 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Le corridor est le segment $[BC]$.

17. Exprime les coordonnées de M_t en fonction de t .
18. Calcule $\det(\overrightarrow{BM_t}, \overrightarrow{BC})$ en fonction de t .
19. Détermine la valeur de t pour laquelle M_t appartient à la droite (BC) .
20. Calcule alors les coordonnées du point d'entrée M et montre que $\overrightarrow{BM} = \frac{5}{9}\overrightarrow{BC}$.
21. Justifie que M appartient bien au segment $[BC]$, puis calcule la distance exacte parcourue GM .

14 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Distinguer direction, sens et norme*

1. **Faux.** Deux vecteurs de même norme peuvent avoir des directions ou des sens différents. Pour être égaux, ils doivent avoir même direction, même sens et même norme.
2. **Vrai.** Inverser le point de départ et le point d'arrivée conserve la direction et la norme, mais inverse le sens :

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

3. **Vrai.** Par convention, $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur puisque $\vec{0} = 0\vec{u}$.
4. **Faux.** C'est exactement l'inverse : si le déterminant est non nul, les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Corrigé 2

 *Démonstration / Lire les déplacements sur un quadrillage*

À partir de A, le vecteur $\vec{u} = (3; 1)$ fait avancer de trois carreaux vers la droite et d'un carreau vers le haut. Le vecteur $\vec{v} = (-1; 2)$ fait avancer d'un carreau vers la gauche et de deux vers le haut.

Coordonnée par coordonnée,

$$\vec{u} + \vec{v} = (2; 3).$$

La diagonale du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ doit donc aboutir deux carreaux à droite et trois en haut de A. Enfin,

$$-\vec{u} = (-3; -1), \quad 2\vec{v} = (-2; 4).$$

Ces coordonnées permettent de contrôler le dessin.

Corrigé 3

 *Démonstration / Enchaîner les points avec Chasles*

$$1. \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

$$2. \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}, \text{ puis}$$

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ}.$$

3. L'addition des vecteurs est commutative, donc

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}.$$

4. La chaîne forme une boucle :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}.$$

Corrigé 4

 *Démonstration / Passer de l'égalité de vecteurs au parallélogramme*

1. L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ caractérise un parallélogramme. Ainsi, $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Par Chasles, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Or, dans le parallélogramme, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Donc

$$\boxed{\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}.$$

3. En soustrayant $\overrightarrow{AB}$,

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \boxed{\overrightarrow{AD}}.$$

4. Pour construire E , on place à l'extrémité de $\overrightarrow{AB}$ un représentant de $\overrightarrow{AC}$. Le vecteur reliant directement A à l'arrivée est alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$.

Corrigé 5

 *Démonstration / Coefficient, sens et déterminant*

On remarque

$$(-6; 9) = -3(2; -3).$$

Ainsi,

$$\boxed{\vec{v} = -3\vec{u}}.$$

Le coefficient est négatif : les deux vecteurs ont des sens contraires. Sa valeur absolue vaut 3, donc

$$\boxed{\|\vec{v}\| = 3\|\vec{u}\|}.$$

Enfin,

$$\det(\vec{u}, \vec{w}) = 2 \times 5 - (-3) \times 4 = 10 + 12 = 22 \neq 0.$$

Donc $\boxed{\vec{w} \text{ n'est pas colinéaire à } \vec{u}}.$

Corrigé 6

 *Démonstration / Calculer coordonnée par coordonnée*

- 1.

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = (2; 3)}, \quad \boxed{\vec{u} - \vec{v} = (4; -7)}.$$

- 2.

$$2\vec{u} - 3\vec{v} = (6; -4) - (-3; 15) = \boxed{(9; -19)}.$$

3. De $2\vec{x} + \vec{u} = \vec{v}$, on tire

$$2\vec{x} = \vec{v} - \vec{u} = (-4; 7),$$

donc

$$\boxed{\vec{x} = \left(-2; \frac{7}{2}\right)}.$$

4. En remplaçant,

$$2\vec{x} + \vec{u} = (-4; 7) + (3; -2) = (-1; 5) = \vec{v}.$$

Corrigé 7

 *Démonstration* / Arrivée moins départ

On obtient

$$\overrightarrow{AB} = (4 - (-2); -1 - 3) = \boxed{(6; -4)},$$

$$\overrightarrow{BC} = (1 - 4; 2 - (-1)) = \boxed{(-3; 3)},$$

et

$$\overrightarrow{AC} = (1 - (-2); 2 - 3) = \boxed{(3; -1)}.$$

La vérification de Chasles est immédiate :

$$(6; -4) + (-3; 3) = (3; -1) = \overrightarrow{AC}.$$

Puis

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} = (-6; 6).$$

Comme $D = A + \overrightarrow{AD}$,

$$\boxed{D(-8; 9)}.$$

Enfin,

$$\boxed{\overrightarrow{BD} = (-8 - 4; 9 - (-1)) = (-12; 10)}.$$

Corrigé 8

 *Démonstration* / Trois regards sur le même milieu

$$\overrightarrow{AB} = (8; 6), \quad AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = \boxed{10}.$$

De plus,

$$\overrightarrow{AC} = (4; 3), \quad \overrightarrow{CB} = (4; 3),$$

donc

$$AC = BC = \sqrt{4^2 + 3^2} = \boxed{5}.$$

Première méthode : la moyenne des coordonnées de A et B vaut

$$\left(\frac{-3 + 5}{2}; \frac{1 + 7}{2} \right) = (1; 4) = C.$$

Deuxième méthode : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, ce qui est la caractérisation vectorielle du milieu. Ainsi C est bien le milieu de $[AB]$.

Enfin, $\overrightarrow{CA} = (-4; -3)$ et $\overrightarrow{CB} = (4; 3)$, donc

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}.$$

Corrigé 9

 *Démonstration / Utiliser le milieu commun des diagonales*

Le milieu de $[AC]$ est

$$I\left(\frac{-4+5}{2}; \frac{2+1}{2}\right) = I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Pour que I soit aussi le milieu de $[BD]$, il faut

$$\frac{2+x_D}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{6+y_D}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ainsi,

$$D(-1; -3).$$

La vérification vectorielle donne

$$\overrightarrow{AB} = (6; 4), \quad \overrightarrow{DC} = (6; 4).$$

Enfin,

$$AC = \sqrt{9^2 + (-1)^2} = \sqrt{82},$$

et

$$BD = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.$$

Corrigé 10

 *Démonstration / Un déterminant nul, puis un non nul*

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 4 \times (-3) - 6 \times (-2) = -12 + 12 = 0.$$

Les vecteurs sont colinéaires et, plus précisément,

$$\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}.$$

Pour $\vec{w}$,

$$\det(\vec{u}, \vec{w}) = 4 \times 2 - 6 \times 1 = 8 - 6 = 2.$$

Ce déterminant n'est pas nul : $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

Corrigé 11

 *Démonstration / Alignement par le déterminant*

$$\overrightarrow{AB} = (3; 3), \quad \overrightarrow{AC} = (6; 6).$$

Donc

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 3 \times 6 - 3 \times 6 = 0.$$

Les points A, B, C sont alignés.

En revanche,

$$\overrightarrow{AD} = (-1; 5)$$

et

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 3 \times 5 - 3 \times (-1) = 18 \neq 0.$$

Ainsi $D \notin (AB)$.

Corrigé 12

 *Démonstration / Deux preuves du parallélogramme*

$$\overrightarrow{AB} = (6; 2), \quad \overrightarrow{CD} = (6; 2).$$

Les vecteurs sont égaux, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Dans le quadrilatère $ABDC$, les côtés opposés $[AB]$ et $[CD]$ sont représentés dans le même sens par des vecteurs égaux : $ABDC$ est un parallélogramme.

Vérifions avec les diagonales. Le milieu de $[AD]$ est

$$\left(\frac{-2+7}{2}; \frac{1+(-2)}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2} \right).$$

Le milieu de $[BC]$ est

$$\left(\frac{4+1}{2}; \frac{3+(-4)}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2} \right).$$

Les diagonales ont bien le même milieu.

Corrigé 13

 *Démonstration / Une décomposition unique*

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times 2 - 1 \times (-1) = 5 \neq 0.$$

Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. L'égalité $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ donne

$$\begin{cases} 2a - b = 8, \\ a + 2b = -1. \end{cases}$$

La première équation donne $b = 2a - 8$. En remplaçant,

$$a + 2(2a - 8) = -1, \quad 5a = 15, \quad a = 3.$$

Donc $b = -2$ et

$$\vec{w} = 3\vec{u} - 2\vec{v}.$$

Vérification : $3(2; 1) - 2(-1; 2) = (6; 3) + (2; -4) = (8; -1)$. L'unicité vient de la non-colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Corrigé 14

 *Démonstration / Construire le centre de gravité*

Le milieu de $[BC]$ est

$$I(3; 3).$$

La moyenne des coordonnées de A, B, C donne

$$G\left(\frac{-3 + 6 + 0}{3}; \frac{0 + 0 + 6}{3}\right) = G(1; 2).$$

Or

$$\vec{AG} = (4; 2), \quad \vec{AI} = (6; 3),$$

donc

$$\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AI}.$$

Enfin,

$$\vec{GA} = (-4; -2), \quad \vec{GB} = (5; -2), \quad \vec{GC} = (-1; 4),$$

et leur somme vaut $(0; 0) = \vec{0}$.

Corrigé 15

 *Démonstration / Varignon puis aire du parallélogramme*

La formule du milieu donne

$$I(-1; 2), \quad J(4; 1), \quad K(2; -4), \quad L(-3; -3),$$

$$\vec{IJ} = (5; -1) = \vec{LK}, \quad \vec{IL} = (-2; -5) = \vec{JK}.$$

Les deux paires de côtés opposés sont donc représentées par des vecteurs égaux : $IJKL$ est un parallélogramme.

L'aire du parallélogramme construit sur $\vec{IJ}$ et $\vec{IL}$ est la valeur absolue de leur déterminant :

$$|\det(\vec{IJ}, \vec{IL})| = |5 \times (-5) - (-1) \times (-2)| = |-25 - 2| = 27 \text{ unités d'aire}.$$

15 Corrigé du problème

Partie A - Cartographier la réserve

 *Démonstration / Coordonnées, longueurs et aire*

1. Par la règle « arrivée moins départ »,

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (9; 3)}, \quad \boxed{\overrightarrow{AC} = (6; 9)}, \quad \boxed{\overrightarrow{BC} = (-3; 6)}.$$

2. Dans le repère orthonormé,

$$AB = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90} = \boxed{3\sqrt{10}},$$

$$AC = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{117} = \boxed{3\sqrt{13}},$$

et

$$BC = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = \sqrt{45} = \boxed{3\sqrt{5}}.$$

- 3.

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 9 \times 9 - 3 \times 6 = 81 - 18 = \boxed{63}.$$

Ce déterminant n'est pas nul : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Les trois sommets ne sont donc pas alignés et la réserve est bien un véritable triangle.

4. La formule de l'approfondissement donne

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}|63| = \boxed{\frac{63}{2} \text{ unités d'aire}}.$$

Partie B - Trois balises au milieu des côtes

 *Démonstration / Le triangle des milieux*

- 5.

$$I\left(\frac{5+2}{2}; \frac{2+8}{2}\right) = \boxed{I\left(\frac{7}{2}; 5\right)},$$

$$J\left(\frac{2+(-4)}{2}; \frac{8+(-1)}{2}\right) = \boxed{J\left(-1; \frac{7}{2}\right)},$$

et

$$K\left(\frac{-4+5}{2}; \frac{-1+2}{2}\right) = \boxed{K\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)}.$$

- 6.

$$\overrightarrow{JK} = \left(\frac{1}{2} - (-1); \frac{1}{2} - \frac{7}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}; -3\right).$$

Or

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}(-3; 6) = \left(\frac{3}{2}; -3\right).$$

Donc

$$\vec{JK} = -\frac{1}{2}\vec{BC}.$$

7. On calcule de même

$$\vec{KI} = \left(3; \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{2}\vec{AC}$$

et

$$\vec{IJ} = \left(-\frac{9}{2}; -\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\vec{BA}.$$

Chaque côté du petit triangle est donc parallèle au côté correspondant du grand triangle et deux fois plus court.

8. Ainsi,

$$JK = \frac{1}{2}BC, \quad KI = \frac{1}{2}AC, \quad IJ = \frac{1}{2}AB.$$

En additionnant,

$$\mathcal{P}(IJK) = \frac{1}{2}\mathcal{P}(ABC).$$

Avec les longueurs de la partie A,

$$\mathcal{P}(IJK) = \frac{3}{2}(\sqrt{10} + \sqrt{13} + \sqrt{5}).$$

Partie C - Le centre opérationnel

 *Démonstration* / Les trois médianes se rencontrent

9. La moyenne des trois abscisses et des trois ordonnées donne

$$G\left(\frac{-4+5+2}{3}; \frac{-1+2+8}{3}\right) = G(1; 3).$$

10.

$$\vec{AG} = (5; 4), \quad \vec{AI} = \left(\frac{15}{2}; 6\right).$$

Or

$$\frac{2}{3}\vec{AI} = (5; 4) = \vec{AG}.$$

Donc A, G, I sont alignés et G est situé aux deux tiers de la médiane issue de A.

11. Pour la médiane issue de B,

$$\vec{BG} = (-4; 1), \quad \vec{BJ} = \left(-6; \frac{3}{2}\right),$$

donc $\vec{BG} = \frac{2}{3}\vec{BJ}$. Pour celle issue de C,

$$\vec{CG} = (-1; -5), \quad \vec{CK} = \left(-\frac{3}{2}; -\frac{15}{2}\right),$$

donc $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}$. Les trois médianes passent par G : on vient de démontrer leur concurrence.

12.

$$\overrightarrow{GA} = (-5; -4), \quad \overrightarrow{GB} = (4; -1), \quad \overrightarrow{GC} = (1; 5).$$

Leur somme vaut

$$(-5 + 4 + 1; -4 - 1 + 5) = (0; 0) = \boxed{\vec{0}}.$$

Partie D - Un relais pondéré

 *Démonstration / Transformer une condition d'équilibre en coordonnées*

13. Par Chasles,

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OA},$$

et de même pour B et C . Ainsi,

$$(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}) + 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) + 3(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}) = \vec{0}.$$

En regroupant les six vecteurs $-\overrightarrow{OP}$,

$$\boxed{6\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}}.$$

14. On effectue la moyenne pondérée :

$$x_P = \frac{-4 + 2 \times 5 + 3 \times 2}{6} = \frac{12}{6} = 2,$$

$$y_P = \frac{-1 + 2 \times 2 + 3 \times 8}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$

Donc

$$\boxed{P\left(2; \frac{9}{2}\right)}.$$

15. Comme $G(1; 3)$,

$$\overrightarrow{GP} = \left(1; \frac{3}{2}\right).$$

Par conséquent,

$$GP = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{13}}{2}}.$$

16. La formule de P s'écrit

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{6}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{6}\overrightarrow{OC}.$$

Les coefficients sont positifs et leur somme vaut 1. Pour le voir sans résultat caché, posons Q barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 2)$. Alors Q appartient à $[AB]$ et

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{3}.$$

La formule de P devient

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3\overrightarrow{OQ} + 3\overrightarrow{OC}}{6} = \frac{\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OC}}{2}.$$

Donc P est le milieu de $[QC]$. Puisque $Q \in [AB]$, le segment $[QC]$ est contenu dans le triangle ; P est bien à l'intérieur.

Partie E - Entrer dans le corridor de sécurité

 *Démonstration / Une trajectoire paramétrée sans équation de droite*

17. De $\overrightarrow{GM_t} = t(1; 1) = (t; t)$ et $G(1; 3)$, on déduit $M_t(1 + t; 3 + t)$.

18. On calcule successivement

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM_t} &= (1 + t - 5; 3 + t - 2) = (t - 4; t + 1), \\ \det(\overrightarrow{BM_t}, \overrightarrow{BC}) &= 6(t - 4) - (-3)(t + 1) = 9t - 21.\end{aligned}$$

19. Le point M_t appartient à (BC) si et seulement si ce déterminant est nul : $9t - 21 = 0$, soit

$$t = \frac{7}{3}.$$

20. Le point d'entrée est donc

$$\begin{aligned}M\left(1 + \frac{7}{3}; 3 + \frac{7}{3}\right) &= M\left(\frac{10}{3}; \frac{16}{3}\right), \\ \overrightarrow{BM} &= \left(\frac{10}{3} - 5; \frac{16}{3} - 2\right) = \left(-\frac{5}{3}; \frac{10}{3}\right), \\ \frac{5}{9}\overrightarrow{BC} &= \frac{5}{9}(-3; 6) = \left(-\frac{5}{3}; \frac{10}{3}\right).\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{BM} = \frac{5}{9}\overrightarrow{BC}$.

21. Le coefficient $5/9$ est compris entre 0 et 1 : en partant de B , on parcourt seulement cinq neuvièmes du segment vers C . Donc $M \in [BC]$.

Enfin, $\overrightarrow{GM} = \frac{7}{3}(1; 1) = \left(\frac{7}{3}; \frac{7}{3}\right)$, donc

$$GM = \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{49}{9}} = \frac{7\sqrt{2}}{3}.$$

16 Fiche-mémoire

★ Théorème | Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Dans un parallélogramme,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

Définition | Coordonnées

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$,

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A).$$

Somme et produit se calculent coordonnée par coordonnée.

✓ Propriété | Norme et distance

Pour $\vec{u} = (x; y)$,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Donc

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

★ Théorème | Déterminant

Pour $\vec{u} = (x; y)$ et $\vec{v} = (x'; y')$,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'.$$

Les vecteurs sont colinéaires si et seulement si ce déterminant est nul.

✓ Propriété | Milieu

Le milieu de $[AB]$ est

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Un quadrilatère est un parallélogramme si ses diagonales ont le même milieu.

Attention | Réflexes

Arrivée moins départ. Respecte l'ordre des lettres. Pour un alignement ou un parallélisme, calcule un déterminant. Ne confonds pas un vecteur avec sa norme.

Un vecteur relie la figure, le calcul et le mouvement.

Tu peux toujours revenir à trois questions : où pars-tu, où arrives-tu, quel outil traduit le déplacement ?

« Déplacer, calculer, démontrer : un même vecteur, plusieurs regards. »