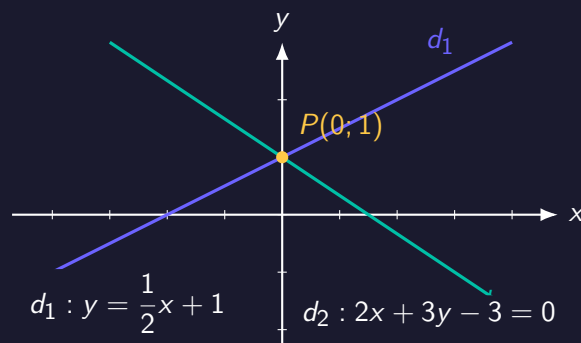


Droites du plan

Relier équations, pentes et géométrie

Vecteurs directeurs ■ Équations ■ Intersections



Seconde générale ■ Mathématiques ■ Programme officiel

 Cours complet

 15 exercices

 Problème défi

 Corrigés

Table des matières

1	❓ Pourquoi étudier les droites ?	4
1.1	Une équation qui sélectionne exactement les bons points	4
1.2	Trois langages pour le même objet	4
2	= Comprendre une équation cartésienne	4
2.1	Définition et condition indispensable	4
2.2	Tester l'appartenance d'un point	5
2.3	Droites horizontales et verticales	5
3	↔ Relier une droite à un vecteur directeur	6
3.1	Définition	6
3.2	D'une équation à une direction	6
3.3	D'un point et d'une direction vers une équation	7
4	📈 Comprendre l'équation réduite et la pente	7
4.1	Passer de $ax + by + c = 0$ à $y = mx + p$	7
4.2	Lire la pente comme un déplacement	8
4.3	Signe de la pente	9
5	✎ Déterminer une équation à partir de données	9
5.1	Avec un point et une pente	9
5.2	Avec deux points	10
6	📏 Lire et tracer une droite	11
6.1	À partir d'une équation réduite	11
6.2	À partir d'une équation cartésienne	11
7	🔗 Comparer deux droites	12
7.1	Parallèles, confondues ou sécantes	12
7.2	Le cas des équations réduites	12
8	🎯 Trouver un point d'intersection	13
8.1	Résoudre un système de deux équations	13
9	🔍 Démontrer un alignement	14
9.1	Trois méthodes légitimes	14
10	⚖ Choisir une stratégie	14
11	📐 Pour aller plus loin - guidé et facultatif	15
11.1	Décrire un demi-plan par une inégalité	15
11.2	Un lieu géométrique qui devient une parabole	16
11.3	Distance d'un point à une droite	17
11.4	Formules d'intersection sans substitution	17
12	🧰 Boîte à outils et erreurs à éviter	19
13	✎ Exercices	20

14	 Problème : <i>Le couloir de sécurité</i> ★★ ★	23
15	 Corrigés détaillés	25
16	 Corrigé du problème	32
17	 Fiche-mémoire	36

1 ? Pourquoi étudier les droites ?

1.1 Une équation qui sélectionne exactement les bons points

Une droite dessinée contient une infinité de points. Une équation permet de les reconnaître tous sans dépendre de la précision du tracé. Pour la droite d d'équation $2x - y + 1 = 0$, le point $M(1; 3)$ appartient à d car $2 \times 1 - 3 + 1 = 0$, tandis que $O(0; 0)$ n'y appartient pas car $1 \neq 0$.

Intuition | Une équation est un filtre

Tu donnes les coordonnées d'un point au membre de gauche. Si le résultat vaut zéro, le point passe le filtre : il est sur la droite. Sinon, il est d'un côté ou de l'autre. Cette idée servira aussi, plus loin, à décrire des régions entières du plan.

1.2 Trois langages pour le même objet

- **Le dessin** montre la position de la droite et ses intersections avec les axes.
- **La direction** indique comment se déplacer tout en restant sur la droite.
- **L'équation** permet de calculer, de tester un point et de trouver une intersection.

Attention | Le dessin ne remplace pas le calcul

Deux droites peuvent sembler parallèles sur une figure et être sécantes très loin. Un point peut sembler placé sur une droite sans vérifier son équation. Le graphique aide à conjecturer ; l'équation permet de conclure exactement.

2 = Comprendre une équation cartésienne

2.1 Définition et condition indispensable

Définition | Équation cartésienne d'une droite

Une équation cartésienne de droite est une équation de la forme

$$ax + by + c = 0$$

où a, b, c sont des réels et $(a; b) \neq (0; 0)$. La droite est l'ensemble de tous les points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient cette égalité.

Attention | Pourquoi interdire $a = b = 0$?

Si $a = b = 0$, l'équation devient $c = 0$. Lorsque $c = 0$, tous les points du plan conviennent ; lorsque $c \neq 0$, aucun point ne convient. Dans les deux cas, l'ensemble obtenu n'est pas une droite.

2.2 Tester l'appartenance d'un point

✂ Méthode | Remplacer, calculer, conclure

Pour savoir si $M(x_M; y_M)$ appartient à la droite $d : ax + by + c = 0$:

1. remplace x par x_M et y par y_M ;
2. calcule $ax_M + by_M + c$;
3. conclus : $M \in d$ si le résultat vaut 0, et $M \notin d$ sinon.

💡 Exemple | Deux points, deux résultats

Pour $d : 3x - 2y + 7 = 0$,

$$3 \times (-1) - 2 \times 2 + 7 = 0,$$

donc $A(-1; 2) \in d$. En revanche,

$$3 \times 1 - 2 \times 4 + 7 = 2 \neq 0,$$

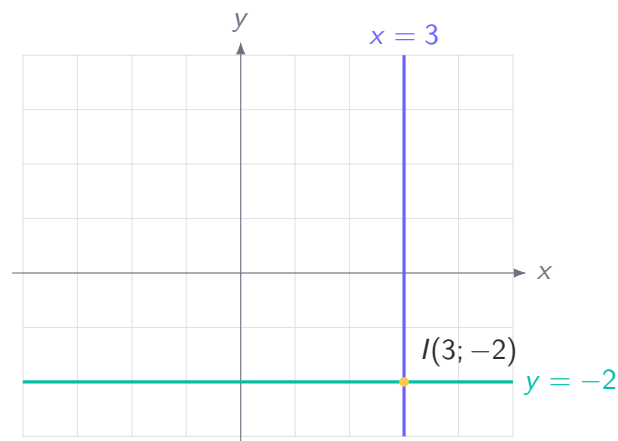
donc $B(1; 4) \notin d$.

2.3 Droites horizontales et verticales

✓ Propriété | Deux formes à reconnaître immédiatement

- $x = k$ est la droite **verticale** formée des points d'abscisse k ;
- $y = k$ est la droite **horizontale** formée des points d'ordonnée k .

Ainsi, $x = 3$ et $y = -2$ sont bien des équations cartésiennes : $x - 3 = 0$ et $y + 2 = 0$.



3 ↔ Relier une droite à un vecteur directeur

3.1 Définition

Définition | Vecteur directeur

Un vecteur non nul $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** d'une droite d lorsqu'il possède la même direction que d . Si A et B sont deux points distincts de d , alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d .

Propriété | Un vecteur directeur n'est jamais unique

Si $\vec{u}$ dirige d , alors tout vecteur $\lambda\vec{u}$, avec $\lambda \neq 0$, dirige également d . Des vecteurs directeurs d'une même droite sont donc colinéaires.

3.2 D'une équation à une direction

Théorème | Le vecteur $(-b; a)$

Pour la droite

$$d : ax + by + c = 0,$$

un vecteur directeur est

$$\vec{u} = (-b; a).$$

Tout multiple non nul de $(-b; a)$ convient également.

Démonstration | Pourquoi ce vecteur fonctionne-t-il ?

Choisissons un point $A(x_A; y_A)$ de d . Un point $M(x; y)$ appartient à d si et seulement si

$$ax + by + c = 0 \quad \text{et} \quad ax_A + by_A + c = 0.$$

En soustrayant les deux égalités,

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0.$$

Or, pour $\overrightarrow{AM} = (x - x_A; y - y_A)$ et $\vec{u} = (-b; a)$,

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = a(x - x_A) + b(y - y_A).$$

L'égalité précédente signifie donc que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Le point M reste sur la droite passant par A et dirigée par $(-b; a)$.

Exemple | Lire sans résoudre

Pour $d : 2x + 5y - 4 = 0$, on peut choisir $\vec{u} = (-5; 2)$. Les vecteurs $(5; -2)$ et $(-10; 4)$ conviennent aussi, car ils sont colinéaires à $(-5; 2)$.

3.3 D'un point et d'une direction vers une équation

★ Théorème | Forme issue du déterminant

La droite passant par $A(x_A; y_A)$ et dirigée par $\vec{u} = (r; s) \neq (0; 0)$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que

$$s(x - x_A) - r(y - y_A) = 0.$$

 *Démonstration | Établir la forme générale d'une équation de droite*

Le point M appartient à la droite si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Le critère du déterminant donne

$$\det \left(\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \right) = 0,$$

donc

$$s(x - x_A) - r(y - y_A) = 0.$$

En développant,

$$sx - ry + (ry_A - sx_A) = 0,$$

qui est bien de la forme $ax + by + c = 0$. Réciproquement, tout point vérifiant cette équation donne un déterminant nul, donc se trouve sur la droite. Les deux descriptions sont exactement équivalentes.

💡 Exemple | Point et vecteur directeur

La droite passant par $A(2; -1)$ et dirigée par $\vec{u} = (3; 2)$ vérifie

$$2(x - 2) - 3(y + 1) = 0,$$

d'où

$$2x - 3y - 7 = 0.$$

Le contrôle avec A donne $2 \times 2 - 3 \times (-1) - 7 = 0$.

4 Comprendre l'équation réduite et la pente

4.1 Passer de $ax + by + c = 0$ à $y = mx + p$

★ Théorème | Équation réduite

Si $b \neq 0$, l'équation $ax + by + c = 0$ peut s'écrire d'une unique manière

$$y = mx + p$$

avec

$$m = -\frac{a}{b}, \quad p = -\frac{c}{b}.$$

Le réel m est la **pente**, ou coefficient directeur, et p est l'ordonnée à l'origine.

 *Démonstration | Isoler y sans perdre les signes*

Partant de $ax + by + c = 0$, on obtient

$$by = -ax - c.$$

Comme $b \neq 0$, on peut diviser par b :

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

On reconnaît $m = -a/b$ et $p = -c/b$.

 **Attention | Une droite verticale n'a pas d'équation réduite**

Lorsque $b = 0$, l'équation devient $ax + c = 0$, donc $x = -c/a$. Une droite verticale ne peut pas s'écrire $y = mx + p$ et sa pente n'est pas définie.

 **Exemple | Changer de forme**

$$2x + 3y - 6 = 0 \iff 3y = -2x + 6 \iff \boxed{y = -\frac{2}{3}x + 2}.$$

La pente vaut $-2/3$ et l'ordonnée à l'origine vaut 2.

4.2 Lire la pente comme un déplacement

 **Propriété | Monter de m quand on avance de 1**

La droite $y = mx + p$ est dirigée par

$$\boxed{\vec{u} = (1; m)}.$$

Plus généralement, entre deux points distincts A et B de la droite, avec $x_B \neq x_A$,

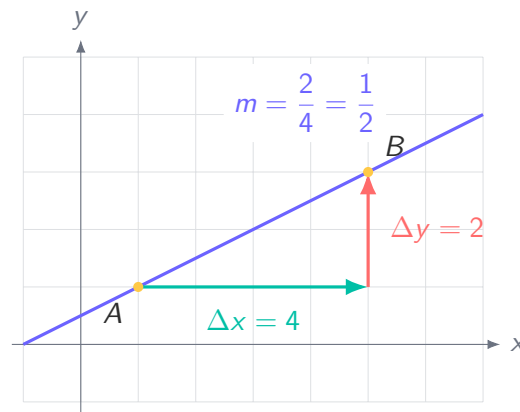
$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}.$$

 *Démonstration | Pourquoi le quotient donne-t-il la pente ?*

Les points A et B vérifient $y_A = mx_A + p$ et $y_B = mx_B + p$. En soustrayant,

$$y_B - y_A = m(x_B - x_A).$$

Comme $x_B - x_A \neq 0$, on divise par cette différence et on obtient la formule annoncée.



4.3 Signe de la pente

✓ Propriété | Trois allures

Pour une droite non verticale :

- si $m > 0$, la droite monte de gauche à droite ;
- si $m < 0$, elle descend de gauche à droite ;
- si $m = 0$, elle est horizontale.

La valeur de p déplace la droite vers le haut ou vers le bas sans changer sa direction.

5 ✎ Déterminer une équation à partir de données

5.1 Avec un point et une pente

★ Théorème | Forme point-pente

La droite de pente m passant par $A(x_A; y_A)$ possède l'équation

$$y - y_A = m(x - x_A).$$

✎ Démonstration | Retrouver la formule

Un point $M(x; y)$ de la droite doit vérifier

$$m = \frac{y - y_A}{x - x_A}$$

lorsque $x \neq x_A$. Après multiplication, on obtient $y - y_A = m(x - x_A)$. Le point A vérifie également cette égalité, donc la formule décrit toute la droite, y compris au point d'abscisse x_A .

💡 Exemple | Point et pente

La droite de pente $3/2$ passant par $A(-2; 3)$ vérifie

$$y - 3 = \frac{3}{2}(x + 2),$$

donc

$$\boxed{y = \frac{3}{2}x + 6} \quad \text{ou} \quad \boxed{3x - 2y + 12 = 0}.$$

5.2 Avec deux points

🔧 Méthode | Toujours commencer par $\overrightarrow{AB}$

Pour la droite passant par deux points distincts A et B :

1. calcule $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$;
2. utilise $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur dans

$$(y_B - y_A)(x - x_A) - (x_B - x_A)(y - y_A) = 0;$$

3. développe, réduis, puis vérifie l'équation avec A et B .

Cette méthode fonctionne aussi lorsque la droite est verticale.

💡 Exemple | Deux points

Avec $A(-1; 2)$ et $B(3; -2)$,

$$\overrightarrow{AB} = (4; -4).$$

Ainsi,

$$-4(x + 1) - 4(y - 2) = 0,$$

d'où, après simplification,

$$\boxed{x + y - 1 = 0}.$$

⚠ Attention | Le quotient de pente peut échouer

Si $x_A = x_B$, le quotient $(y_B - y_A)/(x_B - x_A)$ est impossible. La droite est alors verticale et son équation est $x = x_A$. La méthode par vecteur directeur et déterminant, elle, fonctionne dans tous les cas.

6 Lire et tracer une droite

6.1 À partir d'une équation réduite

✂ Méthode | Un point, puis un déplacement

Pour tracer $y = mx + p$:

1. place $A(0; p)$ sur l'axe des ordonnées ;
2. écris m sous forme de fraction $m = \Delta y / \Delta x$;
3. depuis A , avance de Δx horizontalement puis de Δy verticalement ;
4. trace la droite passant par les deux points obtenus.

💡 Exemple | Tracer sans tableau de valeurs long

Pour $y = -\frac{2}{3}x + 2$, on place $A(0; 2)$. Puis on avance de 3 vers la droite et on descend de 2 : on obtient $B(3; 0)$. Les points A et B déterminent la droite.

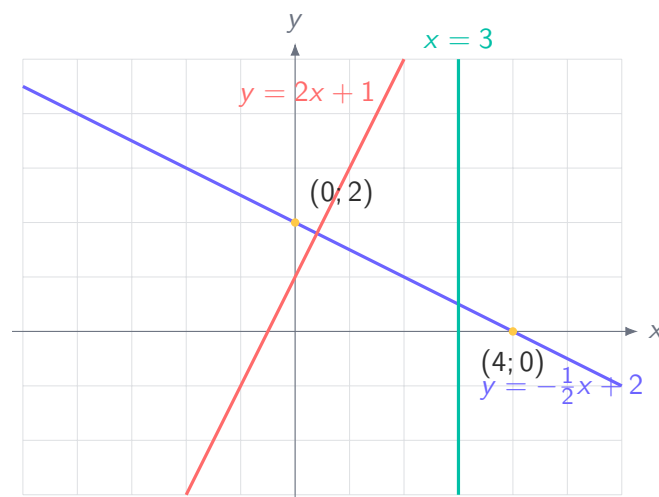
6.2 À partir d'une équation cartésienne

✂ Méthode | Trouver deux points faciles

Pour $ax + by + c = 0$, choisis deux valeurs qui rendent les calculs simples. Souvent :

- pose $x = 0$ pour chercher l'intersection avec l'axe des ordonnées ;
- pose $y = 0$ pour chercher l'intersection avec l'axe des abscisses.

Si une intersection n'existe pas ou donne des nombres peu pratiques, choisis une autre valeur.



7 Comparer deux droites

7.1 Parallèles, confondues ou sécantes

★ Théorème | Critère cartésien

Soient

$$d : ax + by + c = 0, \quad d' : a'x + b'y + c' = 0.$$

Alors

$$d \parallel d' \text{ si et seulement si } ab' - a'b = 0.$$

Si $ab' - a'b \neq 0$, les deux droites sont sécantes en un unique point.

Démonstration | Comparer les vecteurs directeurs

Les vecteurs $\vec{u} = (-b; a)$ et $\vec{u}' = (-b'; a')$ dirigent respectivement d et d' . Les droites sont parallèles si et seulement si ces vecteurs sont colinéaires. Or

$$\det(\vec{u}, \vec{u}') = (-b)a' - a(-b') = ab' - a'b.$$

La nullité de ce déterminant donne exactement le critère annoncé.

✓ Propriété | Distinguer parallèles et confondues

Lorsque $ab' - a'b = 0$:

- les droites sont **confondues** s'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $(a'; b'; c') = \lambda(a; b; c)$;
- elles sont **parallèles distinctes** si les couples $(a; b)$ et $(a'; b')$ sont proportionnels mais pas les triplets complets.

7.2 Le cas des équations réduites

✓ Propriété | Comparer les pentes

Pour $d : y = mx + p$ et $d' : y = m'x + p'$:

- si $m \neq m'$, les droites sont sécantes ;
- si $m = m'$ et $p \neq p'$, elles sont parallèles distinctes ;
- si $m = m'$ et $p = p'$, elles sont confondues.

Exemple | Des coefficients presque proportionnels

Les droites

$$d : 2x - 3y + 1 = 0 \quad \text{et} \quad d' : -4x + 6y + 5 = 0$$

sont parallèles car $2 \times 6 - (-4) \times (-3) = 0$. Elles ne sont pas confondues : multiplier la première équation par -2 donnerait une constante -2 , et non 5.

8 Trouver un point d'intersection

8.1 Résoudre un système de deux équations

Méthode | Trois étapes indispensables

Pour trouver l'intersection de deux droites sécantes :

1. résous le système formé par leurs deux équations ;
2. écris les deux coordonnées du point obtenu ;
3. remplace dans **les deux** équations pour vérifier.

Tu peux utiliser la substitution ou une combinaison linéaire.

Exemple | Deux équations réduites

Pour

$$d : y = 2x - 3, \quad d' : y = -x + 6,$$

le point commun vérifie $2x - 3 = -x + 6$. Ainsi $3x = 9$, donc $x = 3$, puis $y = 3$. L'intersection est

$$I(3; 3).$$

Exemple | Deux équations cartésiennes

Réolvons

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0, \\ x - y - 2 = 0. \end{cases}$$

La deuxième équation donne $x = y + 2$. En remplaçant dans la première,

$$2(y + 2) + y - 4 = 0,$$

donc $3y = 0$, $y = 0$ et $x = 2$. Les deux droites se coupent en $I(2; 0)$.

Attention | Un système peut raconter trois histoires

- Une solution unique : les droites sont sécantes.
- Aucune solution : elles sont parallèles distinctes.
- Une infinité de solutions : elles sont confondues.

Avant de calculer longtemps, comparer les directions permet souvent de prévoir le cas rencontré.

9 Démontrer un alignement

9.1 Trois méthodes légitimes

Méthode | Choisir selon les données

Pour montrer que A, B, C sont alignés, tu peux :

1. prouver que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires avec un déterminant nul ;
2. déterminer l'équation de (AB) puis vérifier que C la satisfait ;
3. comparer les pentes, seulement si les quotients utilisés sont définis.

La méthode par équation est souvent la plus lisible lorsqu'une droite est déjà donnée.

Exemple | Une seule équation pour trois points

La droite passant par $A(0; 1)$ et $B(2; 5)$ a pour pente

$$m = \frac{5 - 1}{2 - 0} = 2,$$

donc pour équation $y = 2x + 1$. Or $2 \times 5 + 1 = 11$, donc $C(5; 11)$ appartient à cette droite. Les points A, B, C sont alignés.

Attention | Ne pas comparer seulement deux pentes mal définies

Si deux points ont la même abscisse, leur droite est verticale. Écrire une pente demanderait une division par zéro. Une équation $x = k$ ou un déterminant évite ce piège.

10 Choisir une stratégie

Méthode | Le diagnostic en huit questions

1. Veux-tu tester un point ? Remplace ses coordonnées dans l'équation.
2. As-tu $ax + by + c = 0$? Lis le vecteur directeur $(-b; a)$.
3. As-tu un point et une direction ? Utilise le déterminant.
4. As-tu un point et une pente ? Utilise $y - y_A = m(x - x_A)$.
5. As-tu deux points ? Calcule d'abord $\overrightarrow{AB}$.
6. Veux-tu tracer ? Trouve deux points simples ou utilise la pente.
7. Veux-tu comparer deux droites ? Compare leurs directions avant de résoudre.
8. Veux-tu une intersection ? Résous le système, puis vérifie les deux équations.

Intuition | Changer de représentation au bon moment

Une équation cartésienne est idéale pour tester un point et reconnaître une direction. Une équation réduite rend la pente visible. Un vecteur directeur construit rapidement une équation. La maîtrise consiste moins à mémoriser une longue liste qu'à passer lucidement d'un langage à l'autre.

Attention | Contrôles rapides

Vérifie toujours l'équation finale avec les points donnés. Un vecteur directeur doit être non nul. Une intersection doit satisfaire les deux équations. Une droite verticale ne possède pas de pente. Ces contrôles courts repèrent la majorité des erreurs de signe.

11 Pour aller plus loin - guidé et facultatif

Cette partie dépasse le socle strict. Elle est ouverte à toute personne curieuse : chaque outil supplémentaire est construit à partir des équations, des vecteurs et des distances déjà étudiés.

11.1 Décrire un demi-plan par une inégalité

Théorème | Une droite frontière, deux signes

La droite $d : ax + by + c = 0$ partage le plan en deux demi-plans :

$$ax + by + c > 0 \quad \text{et} \quad ax + by + c < 0.$$

Avec $\geq$ ou $\leq$, la droite frontière est incluse.

Méthode | Le point-test

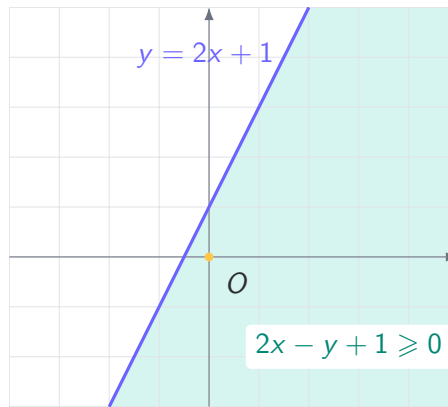
Pour choisir quel côté colorier :

1. trace la droite frontière $ax + by + c = 0$;
2. choisis un point simple qui n'est pas sur la droite, souvent $O(0;0)$;
3. calcule le signe de $ax + by + c$ en ce point ;
4. colorie le côté qui correspond à l'inégalité demandée.

Exemple | Lire l'inégalité avant de colorier

$$2x - y + 1 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y \leq 2x + 1.$$

Le point $O(0;0)$ convient car $1 \geq 0$. On colorie donc le côté contenant l'origine, frontière comprise.



11.2 Un lieu géométrique qui devient une parabole

★ Théorème | Équidistance d'un point et d'un axe

Soit $F(0; 1)$. L'ensemble des points $M(x; y)$ équidistants de F et de l'axe des abscisses possède l'équation

$$y = \frac{x^2 + 1}{2}.$$

Cette courbe n'est pas une droite : c'est une parabole.

 *Démonstration | Traduire une phrase géométrique en équation*

La distance de $M(x; y)$ à $F(0; 1)$ vaut

$$MF = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}.$$

La distance de M à l'axe des abscisses vaut $|y|$. La condition d'équidistance s'écrit donc

$$\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = |y|.$$

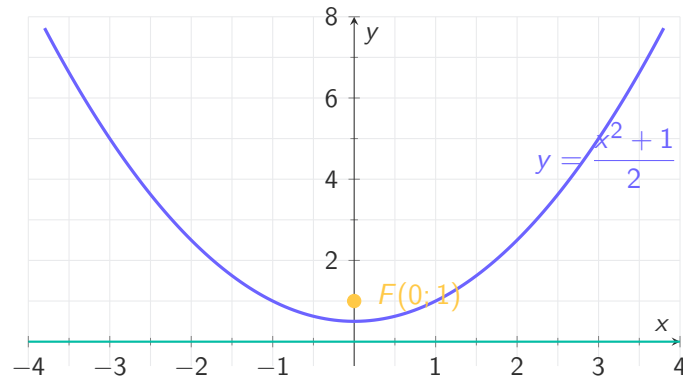
Les deux membres étant positifs, on peut élever au carré :

$$x^2 + (y - 1)^2 = y^2.$$

Après développement et simplification,

$$x^2 - 2y + 1 = 0,$$

d'où $y = (x^2 + 1)/2$. Réciproquement, cette expression est positive et les calculs se remontent : chaque point de la courbe vérifie bien l'équidistance.



11.3 Distance d'un point à une droite

★ Théorème | Formule de distance

Pour $d : ax + by + c = 0$ et $P(x_P; y_P)$,

$$\text{dist}(P, d) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

✏ Démonstration | Une aire de parallélogramme cachée

Prenons $A(x_A; y_A)$ sur d et le vecteur directeur $\vec{u} = (-b; a)$. Comme $ax_A + by_A + c = 0$,

$$ax_P + by_P + c = a(x_P - x_A) + b(y_P - y_A).$$

Ce nombre est le déterminant $\det(\overrightarrow{AP}, \vec{u})$. Sa valeur absolue est l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{AP}$ et $\vec{u}$. Cette aire vaut aussi

$$\|\vec{u}\| \times \text{dist}(P, d).$$

Or $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. En divisant, on obtient la formule.

💡 Exemple | Une distance exacte

Pour $d : 3x + 4y - 12 = 0$ et $O(0; 0)$,

$$\text{dist}(O, d) = \frac{|-12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \boxed{\frac{12}{5}}.$$

11.4 Formules d'intersection sans substitution

★ Théorème | Formules de Cramer dans le plan

Pour deux droites sécantes

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0,$$

posons $\Delta = ab' - a'b \neq 0$. Leur point d'intersection vérifie

$$x = \frac{bc' - b'c}{\Delta}, \quad y = \frac{ca' - ac'}{\Delta}.$$

 *Démonstration | Éliminer sans deviner*

Multiplions la première équation par b' et la seconde par b , puis soustrayons : les termes en y disparaissent et

$$(ab' - a'b)x + b'c - bc' = 0.$$

Ainsi $\Delta x = bc' - b'c$. Une élimination analogue des termes en x donne $\Delta y = ca' - ac'$. Comme $\Delta \neq 0$, on peut diviser. Ces formules condensent la méthode d'élimination ; elles ne la remplacent pas.

Exemple | Appliquer les formules sans perdre les signes

Considérons

$$d : 2x + y - 4 = 0, \quad d' : x - y - 2 = 0.$$

Ici, $a = 2$, $b = 1$, $c = -4$, $a' = 1$, $b' = -1$ et $c' = -2$. Ainsi,

$$\Delta = 2 \times (-1) - 1 \times 1 = -3,$$

puis

$$x = \frac{1 \times (-2) - (-1) \times (-4)}{-3} = 2, \quad y = \frac{(-4) \times 1 - 2 \times (-2)}{-3} = 0.$$

Le point d'intersection est donc $P(2; 0)$. On termine toujours par vérifier ce point dans les deux équations.

12 Boîte à outils et erreurs à éviter

Méthode | Vecteur directeur

Pour $ax + by + c = 0$, prends $(-b; a)$.

Méthode | Point et direction

Avec $A(x_A; y_A)$ et $(r; s) : s(x - x_A) - r(y - y_A) = 0$.

Méthode | Pente

$y = mx + p$ est dirigée par $(1; m)$.

Méthode | Deux points

Calcule $\overrightarrow{AB}$, puis utilise le déterminant.

Méthode | Parallélisme

$ab' - a'b = 0$ signifie que les directions sont colinéaires.

Méthode | Intersection

Résous le système, puis vérifie les deux équations.

Attention | Verticale

$x = k$ n'a ni équation réduite ni pente.

Attention | Signes

Vérifie chaque équation finale avec un point connu.

Intuition | Le réflexe le plus utile

Avant de calculer, demande-toi ce qui est le plus visible : les points, la direction, la pente ou l'équation. Passe ensuite vers la représentation qui répond directement à la question.

13 Exercices

Pour chaque exercice, rédige les étapes et nomme les propriétés utilisées. Les étoiles indiquent une progression ; elles ne ferment la porte à personne.

Exercice 1 : Appartenance à une droite

On considère la droite $d : 2x - 3y + 4 = 0$.

1. Détermine si $A(1; 2)$, $B(-2; 0)$ et $C(0; 1)$ appartiennent à d .
2. Trouve l'ordonnée du point de d d'abscisse 4.
3. Trouve l'abscisse du point de d d'ordonnée -2 .

Exercice 2 : Lire des vecteurs directeurs

Donne un vecteur directeur de chacune des droites suivantes :

$$d_1 : 3x + 2y - 7 = 0, \quad d_2 : x = 4, \quad d_3 : y = -2x + 5.$$

Le vecteur $(4; -6)$ dirige-t-il d_1 ? Justifie.

Exercice 3 : Changer de forme

1. Écris $d_1 : 4x - 2y + 6 = 0$ sous forme réduite.
2. Écris $d_2 : y = -\frac{3}{4}x + 2$ sous forme cartésienne à coefficients entiers.
3. Explique pourquoi $d_3 : x = -5$ n'a pas d'équation réduite.

Exercice 4 : Un point et une pente

Détermine les équations réduite et cartésienne de la droite de pente $3/2$ passant par $A(-2; 3)$. Vérifie ton résultat avec les coordonnées de A .

Exercice 5 : Un point et une direction

On donne $A(1; -2)$ et $\vec{u} = (4; 3)$.

1. Détermine une équation cartésienne de la droite d passant par A et dirigée par $\vec{u}$.
2. Teste l'appartenance de $B(5; 1)$ et de $C(-3; -5)$ à d .
3. Donne deux autres vecteurs directeurs de d .

Exercice 6 : Une droite par deux points

Soient $A(-3; 1)$ et $B(2; 6)$.

1. Calcule $\overrightarrow{AB}$.
2. Détermine une équation cartésienne de (AB) par le déterminant.
3. Déduis-en son équation réduite et sa pente.

Exercice 7 ★★☆☆ : Tracer efficacement

Trace dans un même repère les droites

$$d_1 : y = -\frac{1}{2}x + 2, \quad d_2 : x = 3, \quad d_3 : 2x - y + 1 = 0.$$

Pour chacune, indique les deux points utilisés pour construire le tracé.

Exercice 8 ★★☆☆ : Familles de parallèles

On considère

$$d_1 : 2x - 3y + 1 = 0, \quad d_2 : -4x + 6y + 5 = 0,$$

$$d_3 : y = \frac{2}{3}x - 1, \quad d_4 : 3x + 2y - 7 = 0.$$

Regroupe les droites parallèles et précise si certaines sont confondues.

Exercice 9 ★★☆☆ : Confondues ou distinctes ?

On donne $d : 3x - 6y + 9 = 0$ et

$$d_1 : x - 2y + 3 = 0, \quad d_2 : -x + 2y - 3 = 0, \quad d_3 : 6x - 12y + 9 = 0.$$

Compare chacune des droites d_1, d_2, d_3 à d .

Exercice 10 ★★☆☆ : Deux intersections

1. Trouve l'intersection de $d_1 : y = 2x - 1$ et $d_2 : y = -x + 5$.
2. Trouve l'intersection de $d_3 : 2x + y = 7$ et $d_4 : x - y = 2$.
3. Vérifie chaque point dans les deux équations correspondantes.

Exercice 11 ★★☆☆ : Alignement de points

On donne $A(-2; -1)$, $B(1; 5)$, $C(3; 9)$ et $D(4; 10)$.

1. Détermine une équation de (AB) .
2. Montre que A, B, C sont alignés.
3. Le point D appartient-il à (AB) ?
4. Retrouve les deux conclusions avec des déterminants.

Exercice 12 ★★☆☆ : Une droite dépendant d'un paramètre

Pour $k \in \mathbb{R}$, on considère

$$d_k : (k - 1)x + 2y - 3 = 0$$

et la droite $d : x + 2y + 1 = 0$.

1. Pour quelle valeur de k les droites d_k et d sont-elles parallèles ?
2. Sont-elles alors confondues ?
3. Pour $k \neq 1$, détermine l'intersection de d_k avec l'axe des abscisses.
4. Que se passe-t-il pour $k = 1$?

Exercice 13 ★★☆☆ : Un demi-plan

On considère l'inégalité

$$2x - y + 1 \geq 0.$$

1. Écris-la sous la forme $y \leq mx + p$.
2. Trace sa droite frontière.
3. Détermine si $A(0; 0)$, $B(0; 2)$ et $C(-1; -1)$ appartiennent à la région.
4. Représente la région et indique si la frontière est incluse.

Exercice 14 ★★☆☆ : Distance à une droite

On donne $d : 3x + 4y - 12 = 0$ et $O(0; 0)$.

1. Calcule directement $\text{dist}(O, d)$ avec la formule de l'approfondissement.
2. Détermine l'équation de la droite passant par O et perpendiculaire à d . Tu peux utiliser que, pour deux droites non verticales perpendiculaires, le produit des pentes vaut -1 .
3. Trouve son intersection H avec d .
4. Calcule OH et vérifie la première réponse.

Exercice 15 ★★☆☆ : Construire une parabole par équidistance

Soit $F(0; 2)$. On cherche les points $M(x; y)$ équidistants de F et de l'axe des abscisses.

1. Traduis l'équidistance par une égalité de distances.
2. Démontre que le lieu possède l'équation $y = \frac{x^2}{4} + 1$.
3. Trouve les points du lieu d'abscisses -2 , 0 et 2 .
4. Vérifie directement l'équidistance pour le point d'abscisse 0 .

14 🦋 Problème : Le couloir de sécurité ★★ ★

🧠 Intuition | Le défi

Une carte de secours est modélisée par un repère orthonormé. Deux pistes se croisent, une piste parallèle délimite un couloir de sécurité, et une équipe mobile suit une trajectoire rectiligne. Tu vas reconstruire tout le plan à partir de quelques points et équations, puis déterminer exactement la portion de trajet située dans le couloir.

Partie A - La première piste

On donne $A(-4; -1)$ et $B(4; 3)$. La droite d_1 est la droite (AB) .

1. Calcule $\overrightarrow{AB}$ et donne un vecteur directeur aussi simple que possible de d_1 .
2. Établis une équation cartésienne de d_1 à l'aide du déterminant.
3. Vérifie l'équation avec A et B .
4. Écris l'équation réduite de d_1 et lis sa pente.

Partie B - Une piste sécante

La droite d_2 passe par $C(-1; 5)$ et possède pour vecteur directeur $\vec{v} = (3; -2)$.

5. Détermine une équation cartésienne puis une équation réduite de d_2 .
6. Justifie que d_1 et d_2 sont sécantes sans calculer leur intersection.
7. Calcule leur point d'intersection P .
8. Vérifie que P appartient bien aux deux droites.

Partie C - Fermer une zone triangulaire

La droite d_3 passe par $D(6; -2)$ et est parallèle à d_1 .

9. Détermine une équation cartésienne de d_3 .
10. Calcule le point $Q = d_2 \cap d_3$.
11. Détermine l'équation de la droite (AQ) et explique pourquoi sa forme est particulièrement simple.
12. Calcule l'aire exacte du triangle APQ à l'aide d'un déterminant.

Partie D - Décrire le couloir par des inégalités

Le couloir de sécurité est la bande fermée comprise entre d_1 et d_3 .

13. Montre qu'un point $M(x; y)$ appartient au couloir si et seulement si

$$x - 2y + 2 \geq 0 \quad \text{et} \quad x - 2y - 10 \leq 0.$$

14. Classe les points $O(0; 0)$, $R(10; 0)$ et $S(-5; 4)$: intérieur, frontière ou extérieur du couloir.
15. Explique pourquoi les deux droites frontières sont incluses.
16. À l'aide de la formule de distance de l'approfondissement, calcule la largeur exacte du couloir.

Partie E - Le trajet de l'équipe mobile

À l'instant repéré par le réel t , l'équipe se trouve au point T_t défini par

$$\overrightarrow{CT_t} = t\vec{v}, \quad C(-1; 5), \quad \vec{v} = (3; -2).$$

17. Exprime les coordonnées de T_t en fonction de t .
18. Calcule $x_{T_t} - 2y_{T_t} + 2$ puis $x_{T_t} - 2y_{T_t} - 10$.
19. Détermine exactement les valeurs de t pour lesquelles T_t appartient au couloir.
20. Montre que les positions extrêmes obtenues sont précisément P et Q .
21. Détermine le paramètre du milieu M de $[PQ]$, puis calcule ses coordonnées.
22. Montre que M est à la même distance des deux frontières.
23. Calcule la longueur exacte PQ de la portion de trajet située dans le couloir.

15 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Remplacer les coordonnées sans sauter la conclusion*

1. Pour A ,

$$2 \times 1 - 3 \times 2 + 4 = 0,$$

donc $A \in d$. Pour B ,

$$2 \times (-2) - 3 \times 0 + 4 = 0,$$

donc $B \in d$. Pour C ,

$$2 \times 0 - 3 \times 1 + 4 = 1 \neq 0,$$

donc $C \notin d$.

2. Si $x = 4$, alors $8 - 3y + 4 = 0$, donc $3y = 12$ et $y = 4$.

3. Si $y = -2$, alors $2x + 6 + 4 = 0$, donc $2x = -10$ et $x = -5$.

Corrigé 2

 *Démonstration / Passer d'une équation à une direction*

Pour $d_1 : 3x + 2y - 7 = 0$, le vecteur $(-b; a)$ donne

$$\vec{u}_1 = (-2; 3).$$

La droite $d_2 : x = 4$ est verticale, donc $\vec{u}_2 = (0; 1)$ convient. Pour $d_3 : y = -2x + 5$, un déplacement de 1 horizontalement produit un déplacement de -2 verticalement, donc

$$\vec{u}_3 = (1; -2).$$

Enfin,

$$(4; -6) = -2(-2; 3),$$

donc $(4; -6)$ dirige bien d_1 .

Corrigé 3

 *Démonstration / Isoler ou supprimer les dénominateurs*

1. $4x - 2y + 6 = 0$ donne $-2y = -4x - 6$, donc

$$y = 2x + 3.$$

2. En multipliant $y = -\frac{3}{4}x + 2$ par 4,

$$4y = -3x + 8,$$

d'où

$$3x + 4y - 8 = 0.$$

3. La droite $x = -5$ est verticale. Une même abscisse correspond à toutes les ordonnées : on ne peut donc pas écrire y comme une fonction affine de x sur cette droite.

Corrigé 4

 *Démonstration / Utiliser la forme point-pente*

La formule $y - y_A = m(x - x_A)$ donne

$$y - 3 = \frac{3}{2}(x + 2).$$

Ainsi,

$$y = \frac{3}{2}x + 6.$$

En multipliant par 2 et en regroupant,

$$3x - 2y + 12 = 0.$$

Le contrôle avec $A(-2; 3)$ donne $3(-2) - 2 \times 3 + 12 = 0$.

Corrigé 5

 *Démonstration / Le déterminant évite de chercher la pente*

Avec $A(1; -2)$ et $\vec{u} = (4; 3)$,

$$3(x - 1) - 4(y + 2) = 0,$$

donc

$$d : 3x - 4y - 11 = 0.$$

Pour $B(5; 1)$,

$$3 \times 5 - 4 \times 1 - 11 = 0,$$

et pour $C(-3; -5)$,

$$3 \times (-3) - 4 \times (-5) - 11 = 0.$$

Ainsi $B, C \in d$. Par exemple, $(8; 6) = 2\vec{u}$ et $(-4; -3) = -\vec{u}$ sont deux autres vecteurs directeurs.

Corrigé 6

 *Démonstration / Deux points donnent une direction*

$$\overrightarrow{AB} = (2 - (-3); 6 - 1) = \boxed{(5; 5)}.$$

La relation de colinéarité avec $\overrightarrow{AM} = (x + 3; y - 1)$ donne

$$5(x + 3) - 5(y - 1) = 0.$$

Après division par 5,

$$\boxed{x - y + 4 = 0}.$$

Ainsi

$$\boxed{y = x + 4}, \quad \boxed{m = 1}.$$

Corrigé 7

 *Démonstration / Deux points bien choisis par droite*

Pour $d_1 : y = -\frac{1}{2}x + 2$, on peut utiliser $(0; 2)$ et $(4; 0)$. Pour $d_2 : x = 3$, on choisit par exemple $(3; 0)$ et $(3; 2)$. Enfin,

$$d_3 : 2x - y + 1 = 0 \iff y = 2x + 1.$$

On peut donc placer $(0; 1)$ et $(1; 3)$, ou encore $(-1/2; 0)$. Chaque paire contient deux points distincts et détermine entièrement la droite correspondante.

Corrigé 8

 *Démonstration / Comparer les pentes et les constantes*

On transforme les trois premières équations :

$$d_1 : y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, \quad d_2 : y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}, \quad d_3 : y = \frac{2}{3}x - 1.$$

Elles ont la même pente $2/3$ mais des ordonnées à l'origine différentes : elles sont donc parallèles deux à deux et distinctes. Pour $d_4 : 3x + 2y - 7 = 0$,

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}.$$

Sa pente est différente ; d_4 est sécante aux trois autres. Aucune des quatre droites n'est confondue avec une autre.

Corrigé 9

 *Démonstration / La constante compte autant que la direction*

En divisant l'équation de d par 3,

$$d : x - 2y + 3 = 0.$$

Ainsi $d_1 = d$. En multipliant cette équation par -1 , on obtient

$$-x + 2y - 3 = 0,$$

donc $d_2 = d$. Pour d_3 , la division par 6 donne

$$x - 2y + \frac{3}{2} = 0.$$

La direction est la même, mais la constante diffère : $d_3 \parallel d$ et les deux droites sont distinctes.

Corrigé 10

 *Démonstration / Résoudre puis vérifier*

1. L'égalité des deux expressions de y donne

$$2x - 1 = -x + 5,$$

donc $3x = 6$, $x = 2$ et $y = 3$. Ainsi

$$d_1 \cap d_2 = \{(2; 3)\}.$$

On vérifie $3 = 2 \times 2 - 1 = -2 + 5$.

2. De $x - y = 2$, on tire $y = x - 2$. Dans $2x + y = 7$,

$$2x + x - 2 = 7,$$

donc $x = 3$ et $y = 1$. Ainsi

$$d_3 \cap d_4 = \{(3; 1)\}.$$

Le contrôle donne $2 \times 3 + 1 = 7$ et $3 - 1 = 2$.

Corrigé 11

 *Démonstration / Équation puis déterminants*

$$\overrightarrow{AB} = (3; 6) = 3(1; 2).$$

La droite (AB) a donc pour pente 2 et passe par $A(-2; -1)$:

$$y + 1 = 2(x + 2),$$

d'où

$$(AB) : y = 2x + 3.$$

Pour $C(3; 9)$, $2 \times 3 + 3 = 9$, donc $C \in (AB)$. Pour $D(4; 10)$, $2 \times 4 + 3 = 11 \neq 10$, donc $D \notin (AB)$.
Avec les déterminants,

$$\overrightarrow{AC} = (5; 10), \quad \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 3 \times 10 - 6 \times 5 = 0,$$

mais

$$\overrightarrow{AD} = (6; 11), \quad \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 3 \times 11 - 6 \times 6 = -3 \neq 0.$$

On retrouve les deux conclusions.

Corrigé 12

 *Démonstration / Un paramètre dans les coefficients*

Les couples de coefficients sont $(k - 1; 2)$ et $(1; 2)$. Le parallélisme exige

$$(k - 1) \times 2 - 1 \times 2 = 0,$$

donc $2k - 4 = 0$ et

$$k = 2.$$

Pour cette valeur,

$$d_2 : x + 2y - 3 = 0 \quad \text{et} \quad d : x + 2y + 1 = 0.$$

Les droites sont parallèles distinctes, car leurs constantes diffèrent.

Sur l'axe des abscisses, $y = 0$. Si $k \neq 1$,

$$(k - 1)x - 3 = 0,$$

donc l'intersection est

$$\left(\frac{3}{k - 1}; 0 \right).$$

Pour $k = 1$, l'équation devient $2y - 3 = 0$, soit $y = 3/2$: la droite est horizontale et ne rencontre pas l'axe des abscisses.

Corrigé 13

 *Démonstration / Frontière puis point-test*

$$2x - y + 1 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y \leq 2x + 1.$$

La frontière est la droite $y = 2x + 1$, que l'on peut tracer avec $(0; 1)$ et $(1; 3)$.

Pour $A(0; 0)$, le membre de gauche vaut $1 > 0$: A est dans l'intérieur. Pour $B(0; 2)$, il vaut $-1 < 0$:

B est à l'extérieur. Pour $C(-1; -1)$, il vaut

$$-2 + 1 + 1 = 0,$$

donc C est sur la frontière. Comme l'inégalité contient le signe $\geq$, la frontière est incluse. On colorie le demi-plan situé sous la droite.

Corrigé 14

 *Démonstration / Deux calculs de la même distance*

La formule donne directement

$$\text{dist}(O, d) = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \boxed{\frac{12}{5}}.$$

La pente de d est $-3/4$. Une droite perpendiculaire possède donc la pente $4/3$; celle qui passe par O a pour équation

$$y = \frac{4}{3}x.$$

À l'intersection avec d ,

$$3x + 4\left(\frac{4}{3}x\right) - 12 = 0,$$

donc $25x = 36$, puis

$$\boxed{H\left(\frac{36}{25}; \frac{48}{25}\right)}.$$

Enfin,

$$OH = \sqrt{\left(\frac{36}{25}\right)^2 + \left(\frac{48}{25}\right)^2} = \frac{60}{25} = \boxed{\frac{12}{5}}.$$

Les deux méthodes concordent.

Corrigé 15

 *Démonstration / Faire naître l'équation du lieu*

La distance de $M(x; y)$ à $F(0; 2)$ vaut $\sqrt{x^2 + (y - 2)^2}$; sa distance à l'axe des abscisses vaut $|y|$. L'équidistance s'écrit

$$\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = |y|.$$

En élevant au carré,

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2,$$

donc

$$\boxed{y = \frac{x^2}{4} + 1}.$$

Pour $x = -2, 0, 2$, on obtient respectivement

$$\boxed{(-2; 2)}, \quad \boxed{(0; 1)}, \quad \boxed{(2; 2)}.$$

Pour $M(0; 1)$,

$$MF = 1 \quad \text{et} \quad \text{dist}(M, \text{axe des abscisses}) = |1| = 1.$$

L'équidistance est bien vérifiée.

16 Corrigé du problème

Partie A - La première piste

 *Démonstration / Deux points, une direction, une équation*

1.

$$\overrightarrow{AB} = (4 - (-4); 3 - (-1)) = (8; 4) = 4(2; 1).$$

On choisit le vecteur directeur simple $\vec{u} = (2; 1)$.

2. Pour $M(x; y)$, la colinéarité de $\overrightarrow{AM} = (x + 4; y + 1)$ et $(2; 1)$ donne

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = (x + 4) - 2(y + 1) = 0.$$

Ainsi,

$$d_1 : x - 2y + 2 = 0.$$

3. Pour A , $-4 - 2(-1) + 2 = 0$. Pour B , $4 - 2 \times 3 + 2 = 0$. Les deux points vérifient bien l'équation.

4.

$$x - 2y + 2 = 0 \iff y = \frac{1}{2}x + 1.$$

La pente de d_1 vaut $1/2$.

Partie B - Une piste sécante

 *Démonstration / Point, direction et système*

5. Avec $C(-1; 5)$ et $\vec{v} = (3; -2)$,

$$-2(x + 1) - 3(y - 5) = 0.$$

Après simplification,

$$d_2 : 2x + 3y - 13 = 0, \quad y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}.$$

6. Les pentes $1/2$ et $-2/3$ sont différentes. Les droites sont donc sécantes.

7. De d_1 , on tire $x = 2y - 2$. En remplaçant dans d_2 ,

$$2(2y - 2) + 3y - 13 = 0,$$

donc $7y = 17$, puis

$$y = \frac{17}{7}, \quad x = 2 \times \frac{17}{7} - 2 = \frac{20}{7}.$$

Ainsi,

$$P\left(\frac{20}{7}; \frac{17}{7}\right).$$

8.

$$\frac{20}{7} - 2 \times \frac{17}{7} + 2 = 0,$$

et

$$2 \times \frac{20}{7} + 3 \times \frac{17}{7} - 13 = 0.$$

Le point P satisfait bien les deux équations.

Partie C - Fermer une zone triangulaire

 *Démonstration / Parallèle, intersection et aire*

9. La droite d_3 est dirigée par $(2; 1)$ et passe par $D(6; -2)$. Ainsi,

$$(x - 6) - 2(y + 2) = 0,$$

donc

$$d_3 : x - 2y - 10 = 0.$$

10. De d_3 , $x = 2y + 10$. Dans d_2 ,

$$2(2y + 10) + 3y - 13 = 0,$$

donc $7y = -7$, $y = -1$ et $x = 8$. Ainsi,

$$Q(8; -1).$$

11. Les points $A(-4; -1)$ et $Q(8; -1)$ ont la même ordonnée. La droite (AQ) est horizontale :

$$(AQ) : y = -1 \quad \text{ou} \quad y + 1 = 0.$$

12.

$$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{48}{7}; \frac{24}{7} \right), \quad \overrightarrow{AQ} = (12; 0).$$

Alors

$$\det(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}) = \frac{48}{7} \times 0 - \frac{24}{7} \times 12 = -\frac{288}{7}.$$

L'aire du triangle vaut la moitié de la valeur absolue :

$$\mathcal{A}(APQ) = \frac{144}{7}.$$

Partie D - Décrire le couloir par des inégalités

 *Démonstration / Deux frontières parallèles*

13. Posons

$$F_1(x, y) = x - 2y + 2, \quad F_3(x, y) = x - 2y - 10.$$

Sur d_1 , $F_1 = 0$ et $F_3 = -12$. Sur d_3 , $F_1 = 12$ et $F_3 = 0$. Entre les deux frontières, F_1 varie donc de 0 à 12 tandis que $F_3 = F_1 - 12$ varie de -12 à 0. Le couloir est exactement décrit par

$$\boxed{F_1 \geq 0} \quad \text{et} \quad \boxed{F_3 \leq 0}.$$

14. Pour $O(0; 0)$,

$$F_1(O) = 2 > 0, \quad F_3(O) = -10 < 0.$$

Donc O est à l'intérieur. Pour $R(10; 0)$,

$$F_1(R) = 12, \quad F_3(R) = 0,$$

donc R est sur la frontière d_3 . Pour $S(-5; 4)$,

$$F_1(S) = -11 < 0,$$

donc S est à l'extérieur.

15. Les signes $\geq$ et $\leq$ autorisent l'égalité : les points des deux droites frontières sont inclus.

16. Prenons $A(-4; -1)$ sur d_1 . Sa distance à $d_3 : x - 2y - 10 = 0$ vaut

$$\frac{|-4 - 2(-1) - 10|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}}.$$

La largeur exacte du couloir est donc

$$\boxed{\frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}}.$$

Partie E - Le trajet de l'équipe mobile

 *Démonstration / Transformer la bande en intervalle de paramètres*

17. Comme $\overrightarrow{CT_t} = t(3; -2) = (3t; -2t)$,

$$\boxed{T_t(-1 + 3t; 5 - 2t)}.$$

18. On calcule

$$\begin{aligned} x_{T_t} - 2y_{T_t} + 2 &= (-1 + 3t) - 2(5 - 2t) + 2 = \boxed{7t - 9}, \\ x_{T_t} - 2y_{T_t} - 10 &= (-1 + 3t) - 2(5 - 2t) - 10 = \boxed{7t - 21}. \end{aligned}$$

19. Le point T_t est dans le couloir si et seulement si

$$7t - 9 \geq 0 \quad \text{et} \quad 7t - 21 \leq 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{9}{7} \leq t \leq 3}.$$

20. Pour $t = 9/7$,

$$T_{9/7} = \left(-1 + \frac{27}{7}; 5 - \frac{18}{7}\right) = \left(\frac{20}{7}; \frac{17}{7}\right) = P.$$

Pour $t = 3$,

$$T_3 = (8; -1) = Q.$$

La portion du trajet située dans le couloir est donc exactement le segment $[PQ]$.

21. Le paramètre du milieu est la moyenne des paramètres des extrémités :

$$t_M = \frac{\frac{9}{7} + 3}{2} = \boxed{\frac{15}{7}}.$$

Ainsi,

$$M = T_{15/7} = \boxed{\left(\frac{38}{7}; \frac{5}{7}\right)}.$$

22. Au point M , les deux expressions valent

$$F_1(M) = 7 \times \frac{15}{7} - 9 = 6, \quad F_3(M) = 7 \times \frac{15}{7} - 21 = -6.$$

Les distances aux deux frontières sont donc toutes deux égales à

$$\boxed{\frac{6}{\sqrt{5}}}.$$

23. Entre $P = T_{9/7}$ et $Q = T_3$, la variation du paramètre vaut

$$3 - \frac{9}{7} = \frac{12}{7}.$$

Comme $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$,

$$\boxed{PQ = \frac{12\sqrt{13}}{7}}.$$

17 Fiche-mémoire

Définition | Équation cartésienne

$$d : ax + by + c = 0, \quad (a; b) \neq (0; 0).$$

$M(x; y) \in d$ si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation.

★ Théorème | Vecteur directeur

Pour $d : ax + by + c = 0$,

$$\vec{u} = (-b; a).$$

Avec $A(x_A; y_A)$ et $\vec{u} = (r; s)$:

$$s(x - x_A) - r(y - y_A) = 0.$$

Définition | Équation réduite

Si $b \neq 0$,

$$y = mx + p, \quad m = -\frac{a}{b}, \quad p = -\frac{c}{b}.$$

La droite est dirigée par $(1; m)$.

✓ Propriété | Deux points

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A).$$

Si $x_A \neq x_B$,

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

La méthode par déterminant fonctionne toujours.

★ Théorème | Positions relatives

Pour $d : ax + by + c = 0$ et $d' : a'x + b'y + c' = 0$,

$d \parallel d'$ si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

Sinon, elles ont une intersection unique.

⚠ Attention | Réflexes

Une verticale $x = k$ n'a pas de pente. Vérifie une équation avec les points donnés. Vérifie une intersection dans les deux équations. Pour une région, trace d'abord la frontière.

Une droite relie la géométrie, l'algèbre et les fonctions.

Tu peux toujours revenir à trois questions : quel point connais-tu, quelle direction suis-tu, quelle équation vérifies-tu ?

« Une droite : des points, une direction, une équation. »