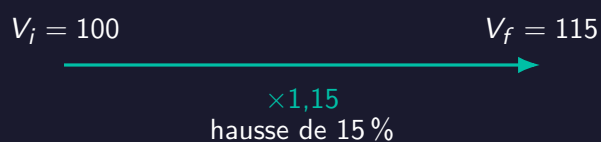


Proportions et pourcentages

Comprendre et comparer les évolutions

Proportions ■ Coefficients ■ Évolutions



Seconde générale ■ Mathématiques ■ Programme officiel

 Cours complet

 15 exercices

 Problème défi

 Corrigés

Table des matières

1	 Pourquoi étudier les pourcentages ?	3
2	 Proportion dans une population	3
2.1	Population de référence et sous-population	3
2.2	Trois écritures pour la même proportion	4
2.3	Calculer la partie ou retrouver le tout	5
3	 Pourcentage de pourcentage	5
3.1	Des ensembles emboîtés	5
3.2	Remonter une proportion conditionnelle	6
4	 Mesurer une évolution	7
4.1	Valeur initiale et valeur finale	7
4.2	Le lien fondamental entre taux et coefficient	8
4.3	Trouver la grandeur inconnue	9
5	 Évolutions successives	9
5.1	Multiplier les coefficients	9
5.2	Répéter la même évolution	10
6	 Évolution réciproque	11
6.1	Revenir exactement à la valeur de départ	11
7	 Comparer correctement des pourcentages	12
7.1	Points de pourcentage et évolution relative	12
7.2	Indice base 100	12
8	 Traduire les phrases en calculs	13
8.1	Un petit programme de contrôle	14
9	 Pour aller plus loin - Accessible à tous	14
9.1	Réunir plusieurs groupes : proportion pondérée	14
9.2	Le terme caché dans deux évolutions	15
9.3	Taux moyen sur plusieurs périodes	15
9.4	Quand la partie et le total évoluent tous les deux	16
10	 Boîte à outils et erreurs à éviter	17
11	 Exercices	18
12	 Problème : <i>La Cantine solidaire</i> ★★ ★	21
13	 Corrigés détaillés	23
14	 Corrigé du problème	28
15	 Fiche-mémoire	31

1 ? Pourquoi étudier les pourcentages ?

Les pourcentages sont partout : résultats d'un sondage, remise, inflation, taux de réussite, batterie restante, budget, données médicales. Pourtant, une même écriture comme 20 % peut répondre à deux questions très différentes.

- **Proportion** : quelle part d'un ensemble possède une propriété ?
- **Évolution** : comment une valeur a-t-elle changé entre deux instants ?

Intuition | Le pourcentage a toujours besoin d'une phrase

Le symbole % ne suffit jamais à comprendre un nombre. Demande toujours : 20 % *de quoi ?* ou 20 % *par rapport à quelle valeur de départ ?* Le dénominateur, parfois caché dans la phrase, est le coeur du calcul.

Exemple | Même nombre, deux sens

Dans un lycée, 20 % des élèves sont internes : c'est une **proportion**. Le nombre d'internes augmente de 20 % l'année suivante : c'est une **évolution**. La première phrase compare une partie au total ; la seconde compare une valeur finale à une valeur initiale.

Attention | Une erreur très fréquente

Dire qu'une proportion passe de 30 % à 40 % ne signifie pas qu'elle augmente de 10 %. Elle gagne 10 **points de pourcentage**, mais son augmentation relative est

$$\frac{40 - 30}{30} = \frac{1}{3} \approx 33,3 \, \%.$$

Nous démontrerons cette distinction plus loin.

2 Proportion dans une population

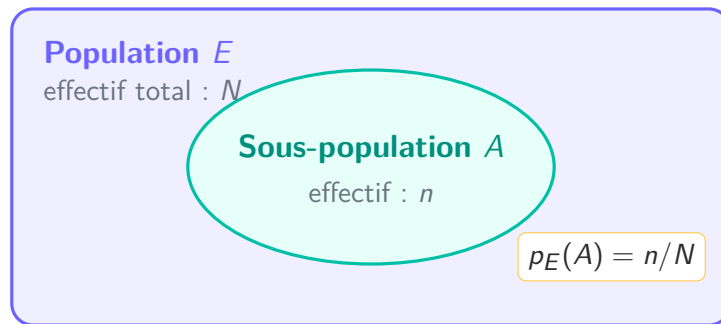
2.1 Population de référence et sous-population

Définition | Proportion

Soit une population de référence E d'effectif total $N > 0$, et une sous-population $A \subset E$ d'effectif n . La **proportion** de A dans E est

$$p_E(A) = \frac{n}{N}.$$

Elle peut s'écrire sous forme fractionnaire, décimale ou en pourcentage.



Démonstration / Pourquoi la proportion est-elle comprise entre 0 et 1 ?

Comme A est une partie de E , son effectif vérifie $0 \leq n \leq N$. Puisque $N > 0$, on peut diviser les trois membres par N sans changer le sens des inégalités :

$$0 \leq \frac{n}{N} \leq 1.$$

Ainsi, une proportion appartient toujours à $[0; 1]$, donc un pourcentage appartient à $[0\%; 100\%]$.

2.2 Trois écritures pour la même proportion

✓ Propriété | Fraction, décimal, pourcentage

Pour passer d'une écriture décimale au pourcentage, on multiplie par 100 :

$$p = 0,37 = \frac{37}{100} = 37\%.$$

Inversement, $t\% = \frac{t}{100}$ sous forme décimale.

💡 Exemple | Une classe de 32 élèves

Dans une classe de 32 élèves, 12 viennent à vélo. La proportion correspondante vaut

$$\frac{12}{32} = \frac{3}{8} = 0,375 = 37,5\%.$$

Les quatre écritures décrivent exactement la même part.

⚠ Attention | Ne pas écrire 37,5 à la place de 37,5 %

$37,5\% = 0,375$. Sans le symbole %, le nombre 37,5 est cent fois plus grand. Dans les calculs, transforme de préférence le pourcentage en nombre décimal.

2.3 Calculer la partie ou retrouver le tout

★ Théorème | Le triangle des trois grandeurs

Si $p = \frac{n}{N}$, alors

$$\boxed{n = pN}, \quad \boxed{N = \frac{n}{p}} \quad \text{si } p > 0.$$

Autrement dit :

$$\text{partie} = \text{proportion} \times \text{total}.$$

Démonstration | Isoler chaque grandeur

La définition donne $p = \frac{n}{N}$. En multipliant les deux membres par N , on obtient $pN = n$. Si $p > 0$, on peut ensuite diviser $n = pN$ par p , ce qui donne $N = \frac{n}{p}$.

Méthode | Reconnaître la question

- On connaît le tout et le pourcentage : **multiplier** pour trouver la partie.
- On connaît la partie et le pourcentage : **diviser** pour retrouver le tout.
- On connaît la partie et le tout : faire le **quotient partie/tout**.

Écris toujours d'abord une phrase qui nomme le tout de référence.

Exemple | Calcul direct puis calcul inverse

18 % des 650 adhérents ont moins de 18 ans, soit

$$0,18 \times 650 = 117 \text{ adhérents.}$$

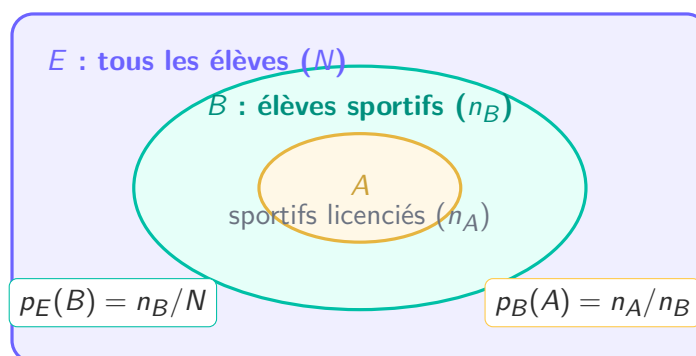
Inversement, si 117 personnes représentent 18 % du club, son effectif total vaut

$$\frac{117}{0,18} = 650.$$

3 Pourcentage de pourcentage

3.1 Des ensembles emboîtés

Supposons que $A \subset B \subset E$. On connaît la proportion de B dans E , puis la proportion de A dans B . Le tout de référence change au milieu du raisonnement.



★ Théorème | Proportion de proportion

Si $A \subset B \subset E$, alors

$$p_E(A) = p_E(B) \times p_B(A).$$

En langage courant : $a\%$ de $b\%$ se calcule en multipliant les deux proportions décimales.

Démonstration | Les effectifs intermédiaires se simplifient

Par définition,

$$p_E(B) = \frac{n_B}{N} \quad \text{et} \quad p_B(A) = \frac{n_A}{n_B}.$$

Leur produit vaut

$$\frac{n_B}{N} \times \frac{n_A}{n_B} = \frac{n_A}{N} = p_E(A).$$

Le nombre n_B apparaît une fois au numérateur et une fois au dénominateur : il se simplifie.

💡 Exemple | Une proportion de proportion

Dans un établissement, 60 % des élèves pratiquent un sport. Parmi ces sportifs, 35 % sont licenciés en club. La proportion d'élèves licenciés dans tout l'établissement vaut

$$0,60 \times 0,35 = 0,21 = \boxed{21\%}.$$

⚠ Attention | On ne multiplie pas les nombres 60 et 35 directement

Les calculs utilisent les proportions décimales : 60 % = 0,60 et 35 % = 0,35. Le produit $60 \times 35 = 2100$ n'est pas une proportion.

3.2 Remonter une proportion conditionnelle

✓ Propriété | Retrouver une proportion manquante

Si $p_E(B) > 0$, la formule précédente peut être réorganisée :

$$p_B(A) = \frac{p_E(A)}{p_E(B)}.$$

💡 Exemple | Changer le dénominateur

Cette division change le tout de référence : on passe de toute la population E à la sous-population B . 18 % de tous les élèves sont des internes de seconde et 30 % de tous les élèves sont internes. Parmi les internes, la proportion d'élèves de seconde vaut

$$\frac{0,18}{0,30} = 0,60 = 60 \%$$

4 ⇔ Mesurer une évolution

4.1 Valeur initiale et valeur finale

On étudie une grandeur qui passe d'une valeur initiale V_i à une valeur finale V_f . Trois nombres complémentaires décrivent ce changement.

📖 Définition | Trois mesures de l'évolution

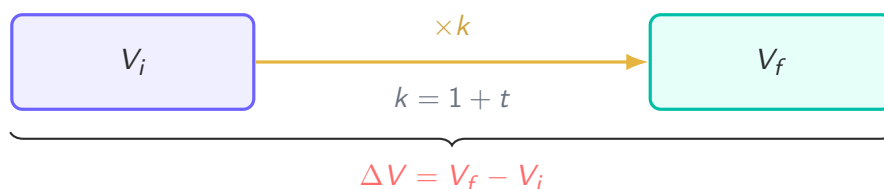
Pour $V_i \neq 0$:

$$\Delta V = V_f - V_i \quad \text{variation absolue,}$$

$$t = \frac{V_f - V_i}{V_i} \quad \text{variation relative ou taux d'évolution,}$$

$$k = \frac{V_f}{V_i} \quad \text{coefficient multiplicateur.}$$

Le taux t s'écrit souvent en pourcentage. Le coefficient k est un nombre sans unité.



🧠 Intuition | Absolu ou relatif ?

La variation absolue répond à *combien a-t-on gagné ou perdu ?*. Le taux répond à *quelle part de la valeur de départ représente ce changement ?*. Une hausse de 20 personnes n'a pas le même poids dans un groupe de 50 et dans un groupe de 2 000.

💡 Exemple | Un prix passe de 80 euros à 92 euros

$$\Delta V = 92 - 80 = 12 \text{ euros,}$$

$$t = \frac{92 - 80}{80} = \frac{12}{80} = 0,15 = 15 \%, \quad k = \frac{92}{80} = 1,15.$$

La hausse absolue est de 12 euros et la hausse relative de 15 %.

⚠ Attention | Une évolution relative exige une valeur initiale non nulle

Si $V_i = 0$, le quotient $\frac{V_f - V_i}{V_i}$ n'existe pas. On peut annoncer la variation absolue, mais pas un taux d'évolution usuel. Dire qu'une quantité est passée de 0 à 10 avec une hausse de 100 % est faux.

4.2 Le lien fondamental entre taux et coefficient

★ Théorème | Coefficient multiplicateur

Pour $V_i \neq 0$, le taux t et le coefficient multiplicateur k vérifient

$$\boxed{k = 1 + t} \quad \text{et} \quad \boxed{V_f = (1 + t)V_i}.$$

Démonstration | Démonstration de $k = 1 + t$

On part de la définition du taux :

$$t = \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_f}{V_i} - \frac{V_i}{V_i} = \frac{V_f}{V_i} - 1 = k - 1.$$

En ajoutant 1 aux deux membres, on obtient $k = 1 + t$. Comme $k = \frac{V_f}{V_i}$, multiplier par V_i donne $V_f = (1 + t)V_i$.

✔ Propriété | Hausse ou baisse de r %

— Augmenter de r %, c'est multiplier par $\boxed{1 + \frac{r}{100}}$.

— Diminuer de r %, c'est multiplier par $\boxed{1 - \frac{r}{100}}$.

Exemple | Deux formulations multiplicatives

— Une hausse de 7 % correspond à $t = 0,07$ et $k = 1,07$.

— Une baisse de 18 % correspond à $t = -0,18$ et $k = 0,82$.

Ainsi, diminuer 250 de 18 % donne $250 \times 0,82 = 205$.

4.3 Trouver la grandeur inconnue

✂ Méthode | Les trois calculs indispensables

$$\boxed{V_f = kV_i}, \quad \boxed{V_i = \frac{V_f}{k}} \quad (k \neq 0), \quad \boxed{t = \frac{V_f}{V_i} - 1}.$$

Avant de calculer, écris le sens de la flèche : valeur initiale $\longrightarrow$ valeur finale.

💡 Exemple | Retrouver la valeur avant une remise

Après une remise de 30 %, un article coûte 84 euros. Le coefficient est $k = 0,70$. Le prix initial vaut donc

$$V_i = \frac{84}{0,70} = \boxed{120 \text{ euros}}.$$

Il ne faut pas ajouter 30 % à 84 : la remise était calculée sur le prix initial, pas sur le prix final.

5 ► Évolutions successives

5.1 Multiplier les coefficients

★ Théorème | Coefficient global

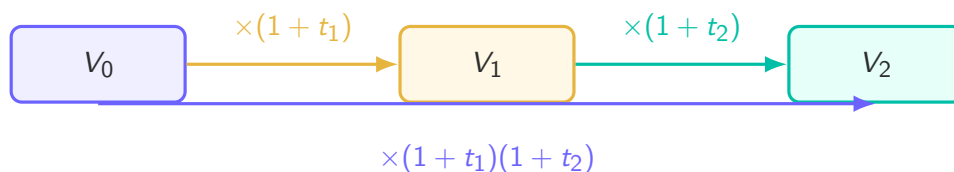
Deux évolutions successives de taux t_1 puis t_2 ont pour coefficient global

$$\boxed{K = (1 + t_1)(1 + t_2)}.$$

Le taux global est alors

$$\boxed{T = K - 1 = (1 + t_1)(1 + t_2) - 1}.$$

Plus généralement, pour plusieurs évolutions, on multiplie tous les coefficients.



✎ Démonstration | Pourquoi les coefficients se multiplient-ils ?

La première évolution donne $V_1 = (1 + t_1)V_0$. La deuxième donne $V_2 = (1 + t_2)V_1$. En remplaçant V_1 dans la deuxième égalité,

$$V_2 = (1 + t_2)(1 + t_1)V_0.$$

Le coefficient qui relie directement V_0 à V_2 est donc le produit des deux coefficients.

 Exemple | Hausse puis baisse

Un prix augmente de 20 %, puis baisse de 10 % :

$$K = 1,20 \times 0,90 = 1,08.$$

Le taux global est $1,08 - 1 = 0,08$, soit une **hausse globale de 8 %**.

 Attention | Les taux ne s'additionnent pas en général

Une hausse de 10 % suivie d'une baisse de 10 % donne

$$1,10 \times 0,90 = 0,99,$$

donc une baisse globale de 1 %. La seconde évolution s'applique à une base déjà modifiée.

5.2 Répéter la même évolution

 Propriété | Évolution répétée

Si une grandeur subit n fois le même taux t , alors le coefficient global est

$$K = (1 + t)^n \quad \text{et} \quad V_n = V_0(1 + t)^n.$$

 Démonstration | Comprendre la puissance

À chaque étape, on multiplie par le même coefficient $1 + t$. Après trois étapes, par exemple,

$$V_3 = V_0 \times (1 + t) \times (1 + t) \times (1 + t) = V_0(1 + t)^3.$$

La puissance est donc une écriture compacte d'un produit répété.

 Exemple | Une croissance sur quatre années

Une population de 8 000 habitants augmente de 2 % par an pendant quatre ans :

$$V_4 = 8\,000 \times 1,02^4 \approx 8\,659.$$

La hausse globale est $1,02^4 - 1 \approx 0,0824$, soit environ 8,24 %, et non exactement 8 %.

6 Évolution réciproque

6.1 Revenir exactement à la valeur de départ

Définition | Évolution réciproque

L'évolution réciproque d'une évolution est celle qui permet de revenir exactement de V_f à V_i . Si l'évolution directe a pour coefficient $k \neq 0$, l'évolution réciproque a pour coefficient

$$k_{\text{réc}} = \frac{1}{k}.$$

Théorème | Taux réciproque

Si le taux direct est $t \neq -1$, alors

$$t_{\text{réc}} = \frac{1}{1+t} - 1 = -\frac{t}{1+t}.$$

Démonstration | Le coefficient qui annule l'évolution

Pour revenir au départ, le produit des deux coefficients doit valoir 1 :

$$k \times k_{\text{réc}} = 1.$$

Donc $k_{\text{réc}} = 1/k$. Comme $k = 1 + t$ et $k_{\text{réc}} = 1 + t_{\text{réc}}$,

$$t_{\text{réc}} = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{1 - (1+t)}{1+t} = -\frac{t}{1+t}.$$

Exemple | Après une hausse de 25 %

Le coefficient direct est $1,25 = \frac{5}{4}$. Le coefficient réciproque est donc $\frac{4}{5} = 0,80$: il faut une **baisse de 20 %** pour revenir au départ.

$$100 \times 1,25 = 125, \quad 125 \times 0,80 = 100.$$

Attention | On ne change pas seulement le signe

Après une hausse de 25 %, une baisse de 25 % donnerait $1,25 \times 0,75 = 0,9375$, soit une baisse globale de 6,25 %. Les bases de calcul ne sont pas les mêmes.

Méthode | Calculer un taux réciproque sans formule compliquée

Passe par les coefficients : $k = 1 + t$, puis $k_{\text{réc}} = 1/k$, et enfin $t_{\text{réc}} = k_{\text{réc}} - 1$.

7 Comparer correctement des pourcentages

7.1 Points de pourcentage et évolution relative

Définition | Deux comparaisons différentes

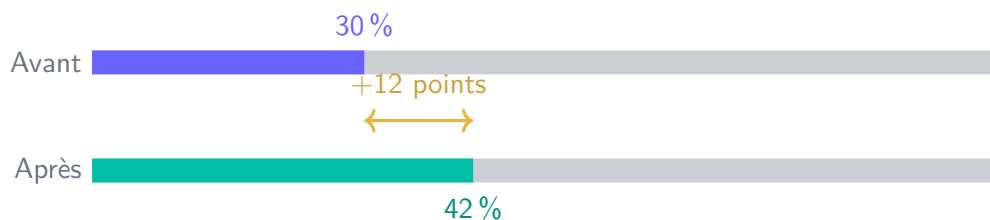
Si une proportion passe de p_i à p_f :

$$\text{écart en points} = p_f - p_i$$

lorsque les proportions sont écrites en pourcentages, tandis que

$$\text{taux relatif} = \frac{p_f - p_i}{p_i}$$

compare la variation à la proportion initiale.



Exemple | De 30 % à 42 %

La progression est de $42 - 30 = 12$ points de pourcentage. Mais le taux d'évolution relatif vaut

$$\frac{42 - 30}{30} = 0,40 = 40 \%$$

Les deux affirmations sont correctes, mais elles ne répondent pas à la même question.

7.2 Indice base 100

Définition | Indice

Choisir une date de base d'indice 100 signifie que toute valeur V est comparée à la valeur de base V_0 par

$$I = 100 \times \frac{V}{V_0}$$

Un indice $I = 118$ signifie que la grandeur est 18 % au-dessus de sa valeur de base.

✓ Propriété | Indice et coefficient multiplicateur

Entre deux dates d'indices I_1 et I_2 , le coefficient multiplicateur est

$$k = \frac{I_2}{I_1},$$

et le taux d'évolution vaut $\frac{I_2}{I_1} - 1$.

Démonstration | Pourquoi les valeurs réelles disparaissent-elles ?

Si $I_1 = 100 \frac{V_1}{V_0}$ et $I_2 = 100 \frac{V_2}{V_0}$, alors

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{100 V_2 / V_0}{100 V_1 / V_0} = \frac{V_2}{V_1}.$$

Le quotient des indices est donc exactement le coefficient qui relie les deux valeurs.

Exemple | Lire un tableau d'indices

Un indice passe de 125 à 140. La hausse n'est pas de 15 % :

$$t = \frac{140}{125} - 1 = 0,12 = \boxed{12\%}.$$

L'écart de 15 correspond à 15 points d'indice.

8 Traduire les phrases en calculs

Phrase	Nature	Calcul
$r\%$ des élèves	proportion	$n = \frac{r}{100} N$
augmente de $r\%$	évolution	$V_f = \left(1 + \frac{r}{100}\right) V_i$
diminue de $r\%$	évolution	$V_f = \left(1 - \frac{r}{100}\right) V_i$
représente $r\%$ du total	proportion inverse	$N = \frac{n}{r/100}$
revient à sa valeur initiale	évolution réciproque	multiplier par $1/k$

Méthode | Le protocole en quatre questions

1. Parle-t-on d'une **partie d'un ensemble** ou d'un **changement dans le temps** ?
2. Quel est le **tout de référence** ou la **valeur initiale** ?
3. Quel nombre décimal correspond au pourcentage ?
4. Le résultat va-t-il dans le bon sens ?

8.1 Un petit programme de contrôle

```

1 def valeur_finale(valeur_initiale, taux_pourcent):
2     coefficient = 1 + taux_pourcent / 100
3     return valeur_initiale * coefficient
4
5 def taux_evolution(valeur_initiale, valeur_finale):
6     return 100 * (valeur_finale / valeur_initiale - 1)
7
8 print(valeur_finale(240, -15)) # 204.0
9 print(taux_evolution(80, 92)) # 15.0

```

⚠ Attention | Le programme ne choisit pas le bon modèle à ta place

Une calculatrice peut exécuter une multiplication, mais elle ne sait pas si le 15 % de l'énoncé est une proportion, une hausse ou une baisse. La traduction de la phrase reste l'étape décisive.

9 🦉 Pour aller plus loin - Accessible à tous

🧠 Intuition | Statut de cette partie

Les notions précédentes constituent le socle du programme officiel. Les résultats qui suivent vont plus loin, comme dans des classes très exigeantes, mais chaque étape est démontrée avec les seuls outils déjà étudiés. Il n'y a aucun prérequis caché.

9.1 Réunir plusieurs groupes : proportion pondérée

★ Théorème | Proportion dans un mélange

Une population est partagée en groupes d'effectifs $N_1, \dots, N_m$. Dans le groupe j , une propriété a pour proportion p_j . La proportion totale vaut

$$p = \frac{N_1 p_1 + N_2 p_2 + \dots + N_m p_m}{N_1 + N_2 + \dots + N_m}.$$

C'est une moyenne pondérée des proportions par les effectifs.

🖋 Démonstration | Additionner les nombres d'individus, pas les pourcentages

Dans le groupe j , l'effectif possédant la propriété est $N_j p_j$. L'effectif favorable total vaut donc $N_1 p_1 + \dots + N_m p_m$, tandis que l'effectif total vaut $N_1 + \dots + N_m$. Leur quotient donne la formule.

💡 Exemple | Deux classes de tailles différentes

Dans une classe de 20 élèves, 60 % viennent à vélo ; dans une classe de 30 élèves, ils sont 40 %. La proportion globale vaut

$$\frac{20 \times 0,60 + 30 \times 0,40}{20 + 30} = \frac{12 + 12}{50} = 48 \, \%.$$

La moyenne simple $(60 \% + 40 \%) / 2 = 50 \%$ serait fautive car les classes n'ont pas le même effectif.

9.2 Le terme caché dans deux évolutions

✅ Propriété | Formule développée du taux global

Pour deux taux successifs t_1 et t_2 ,

$$T = t_1 + t_2 + t_1 t_2.$$

Le terme $t_1 t_2$ explique pourquoi on ne peut pas simplement additionner les taux.

✎ Démonstration | Développer le produit des coefficients

$$K = (1 + t_1)(1 + t_2) = 1 + t_1 + t_2 + t_1 t_2.$$

Comme $T = K - 1$, il reste $T = t_1 + t_2 + t_1 t_2$.

💡 Exemple | Pourquoi l'addition est parfois une approximation

Deux hausses de 2 % donnent exactement

$$T = 0,02 + 0,02 + 0,02^2 = 0,0404 = 4,04 \, \%.$$

Dire « environ 4 % » est raisonnable, mais 4,04 % est la valeur exacte.

9.3 Taux moyen sur plusieurs périodes

📖 Définition | Taux moyen multiplicatif

Un taux moyen r sur n périodes produit le même coefficient global K que les évolutions réelles :

$$(1 + r)^n = K.$$

Pour deux périodes avec $K > 0$ et $1 + r > 0$,

$$r = \sqrt{K} - 1.$$

 Démonstration | Cas de deux périodes

Appliquer deux fois le taux r multiplié par $(1+r)^2$. Pour reproduire le coefficient global K , on impose $(1+r)^2 = K$. Le coefficient $1+r$ étant positif dans ce contexte, $1+r = \sqrt{K}$, donc $r = \sqrt{K} - 1$.

 Exemple | Une hausse puis une baisse

Une grandeur augmente de 21 % puis baisse de 10 %. Son coefficient global vaut

$$K = 1,21 \times 0,90 = 1,089.$$

Le taux constant équivalent sur chacune des deux périodes est

$$r = \sqrt{1,089} - 1 \approx 0,0436,$$

soit environ 4,36 % par période.

9.4 Quand la partie et le total évoluent tous les deux

 Théorème | Évolution d'une proportion

Une partie d'effectif n_i dans un total N_i a pour proportion $p_i = n_i/N_i$. Si la partie est multipliée par k_n et le total par k_N , alors

$$p_f = p_i \times \frac{k_n}{k_N}.$$

La proportion augmente si $k_n > k_N$, reste stable si $k_n = k_N$, et diminue si $k_n < k_N$.

 Démonstration | Comparer deux vitesses de croissance

On a $n_f = k_n n_i$ et $N_f = k_N N_i$. Donc

$$p_f = \frac{n_f}{N_f} = \frac{k_n n_i}{k_N N_i} = \frac{k_n}{k_N} \times \frac{n_i}{N_i} = p_i \frac{k_n}{k_N}.$$

Ce n'est pas la croissance absolue de la partie qui décide, mais sa croissance comparée à celle du total.

 Exemple | Un effectif augmente, mais sa proportion diminue

Un club compte 200 membres, dont 80 jeunes : $p_i = 40\%$. L'effectif des jeunes augmente de 10 %, tandis que l'effectif total augmente de 25 %. Alors

$$p_f = 0,40 \times \frac{1,10}{1,25} = 0,352 = 35,2\%.$$

Il y a davantage de jeunes (88 au lieu de 80), mais leur proportion a diminué car le club entier a grandi plus vite.

10 Boîte à outils et erreurs à éviter

Méthode | Proportion

$$p = \frac{\text{partie}}{\text{tout}} ; \text{nomme le tout.}$$

Méthode | Calculer une partie

$$n = pN \text{ avec } p \text{ sous forme décimale.}$$

Méthode | Proportion de proportion

Multiplie les proportions le long des inclusions.

Méthode | Taux

$$t = \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_f}{V_i} - 1.$$

Méthode | Coefficient

Hausse : $1 + r$; baisse : $1 - r$.

Méthode | Évolutions successives

Multiplie les coefficients, puis retire 1.

Méthode | Évolution réciproque

Prends l'inverse du coefficient direct.

Attention | Réflexes

Ne confonds ni pourcentage et nombre décimal, ni points et taux, ni taux successifs et somme.

Intuition | La question qui sauve presque tous les calculs

Avant toute opération, demande : *quel nombre joue le rôle de référence ?* Pour une proportion, c'est le tout ; pour une évolution, c'est la valeur initiale ; pour un pourcentage de pourcentage, la référence change au milieu.

11 Exercices

Pour chaque exercice, rédige les étapes, nomme la valeur de référence et contrôle la cohérence du résultat. Les étoiles indiquent une progression ; elles ne ferment la porte à personne.

Exercice 1 : Trois écritures d'une proportion

Complète les égalités en donnant, pour chaque nombre, une écriture fractionnaire simplifiée, une écriture décimale et un pourcentage :

$$0,42, \quad \frac{7}{20}, \quad 12,5\%, \quad \frac{5}{8}.$$

Exercice 2 : Partie, proportion ou total

1. Calcule 15 % de 840.
2. Dans une médiathèque, 126 livres représentent 15 % du fonds. Combien y a-t-il de livres au total ?
3. Parmi 480 personnes, 156 répondent oui. Calcule la proportion correspondante en pourcentage.

Exercice 3 : Comparer deux groupes

Dans le groupe A, 84 personnes sur 240 utilisent le vélo. Dans le groupe B, elles sont 117 sur 360.

1. Calcule les deux proportions.
2. Dans quel groupe l'usage du vélo est-il proportionnellement le plus fréquent ?
3. Donne l'écart en points de pourcentage.

Exercice 4 : Un pourcentage de pourcentage

Une association compte 1 000 membres. 72 % sont majeurs et, parmi les majeurs, 35 % sont bénévoles.

1. Combien y a-t-il de membres majeurs ?
2. Combien sont à la fois majeurs et bénévoles ?
3. Quelle proportion de toute l'association représentent-ils ?

Exercice 5 : Retrouver la référence intermédiaire

Dans un lycée, 42 % des élèves sont demi-pensionnaires. Les élèves de seconde demi-pensionnaires représentent 16,8 % de tous les élèves.

1. Quelle proportion des demi-pensionnaires est en seconde ?
2. Si le lycée compte 1 250 élèves, donne les deux effectifs concernés.

Exercice 6 : Décrire deux évolutions

Pour chaque passage, calcule la variation absolue, le taux d'évolution et le coefficient multiplicateur :

$$250 \longrightarrow 285, \quad 360 \longrightarrow 306.$$

Exercice 7 : Appliquer une hausse ou une baisse

1. Un abonnement de 480 euros augmente de 12,5 %. Calcule son nouveau prix.
2. Une réserve de 75 litres diminue de 16 %. Quelle quantité reste-t-il ?

Exercice 8 ★★☆☆ : Retrouver la valeur initiale

1. Après une baisse de 15 %, une valeur est égale à 204. Retrouve sa valeur initiale.
2. Après une hausse de 15 %, un salaire mensuel est égal à 575 euros dans un modèle simplifié. Retrouve la valeur avant hausse.

Exercice 9 ★★☆☆ : Deux évolutions successives

Une quantité augmente de 8 %, puis diminue de 5 %.

1. Calcule le coefficient global et le taux global.
2. Applique ces évolutions à une valeur initiale de 1 200.
3. Compare le taux exact à la somme 8 % – 5 %.

Exercice 10 ★★☆☆ : Revenir au départ

Une grandeur augmente de 18 %.

1. Calcule le coefficient multiplicateur réciproque.
2. Déduis le taux de baisse nécessaire pour revenir exactement au départ, au centième de pourcentage près.
3. Vérifie avec une valeur initiale de 500.

Exercice 11 ★★☆☆ : Points ou pourcentage ?

Une proportion passe de 24 % à 30 %.

1. Calcule l'écart en points de pourcentage.
2. Calcule l'évolution relative de cette proportion.
3. Dans une population constante de 1 500 personnes, combien d'individus supplémentaires sont concernés ?

Exercice 12 ★★☆☆ : Lire des indices base 100

Le prix d'un produit vaut 75 euros à la date de base, d'indice 100. Plus tard, son indice vaut 112, puis 126.

1. Calcule le prix correspondant à l'indice 112.
2. Calcule le prix correspondant à l'indice 126.
3. Quel est le taux d'évolution entre les indices 112 et 126 ?

Exercice 13 ★★★☆☆ : Mélanger sans moyenner trop vite

Une classe de 24 élèves compte 75 % de lecteurs réguliers. Une autre classe de 36 élèves en compte 50 %.

1. Calcule le nombre de lecteurs réguliers dans chaque classe.
2. Calcule la proportion dans la réunion des deux classes.
3. Explique pourquoi la moyenne simple de 75 % et 50 % ne convient pas.

Exercice 14 ★★☆☆ : Une évolution répétée

Une population de bactéries, initialement égale à 5 000, augmente de 3 % à chacune de cinq étapes.

1. Écris le coefficient global sous forme d'une puissance.
2. Calcule la population finale à l'unité près.
3. Calcule le taux d'évolution global au centième de pourcentage près.
4. Compare avec l'approximation $5 \times 3 \%$.

Exercice 15 ★★☆☆ : Une proportion qui évolue

Une catégorie représente initialement 32 % d'une population.

1. L'effectif de la catégorie augmente de 20 % et l'effectif total de 8 %. Calcule la nouvelle proportion.
2. Le total augmente maintenant de 10 %. De quel taux la catégorie doit-elle augmenter pour représenter 40 % du nouveau total ?
3. Explique pourquoi on doit comparer deux coefficients multiplicateurs.

12 🦉 Problème : *La Cantine solidaire* ★★ ★

🧠 Intuition | Le défi

Un lycée étudie les choix alimentaires de ses élèves et l'évolution du coût de sa cantine. Le problème relie proportions emboîtées, évolutions successives, réciproques, indices et taux répétés. Chaque partie réutilise un réflexe du cours.

Partie A - Une enquête dans le lycée

Le lycée compte 1 200 élèves. 65 % sont demi-pensionnaires, notés D . Les autres sont externes, notés X . Parmi les demi-pensionnaires, 40 % choisissent régulièrement le menu végétarien. Parmi les externes, cette proportion est de 25 %.

1. Calcule le nombre de demi-pensionnaires.
2. Calcule le nombre d'externes.
3. Calcule le nombre de demi-pensionnaires choisissant le menu végétarien.
4. Calcule le nombre d'externes choisissant ce menu.
5. Déduis l'effectif total puis la proportion de tous les élèves choisissant régulièrement le menu végétarien.
6. Retrouve cette proportion avec la formule de moyenne pondérée.

Partie B - Le prix d'un repas

Le prix initial d'un repas est $P_0 = 4,80$ euros. Il augmente d'abord de 12 %, puis bénéficie d'une réduction de 5 %. Une subvention réduit ensuite le prix obtenu de 20 %.

7. Donne les coefficients multiplicateurs des deux premières évolutions.
8. Calcule le prix après la hausse de 12 %.
9. Calcule le prix après la réduction de 5 %.
10. Calcule le coefficient et le taux globaux des deux premières évolutions.
11. Calcule le prix final après la subvention.
12. Calcule le coefficient et le taux globaux entre P_0 et ce prix final.

Partie C - Ajuster une subvention

Une enveloppe initiale de 50 000 euros diminue de 8 %. Elle doit ensuite augmenter d'un taux r pour atteindre 51 520 euros.

13. Calcule l'enveloppe après la diminution.
14. Écris une équation vérifiée par r .
15. Résous cette équation et exprime r en pourcentage.
16. Quel taux aurait-il fallu appliquer juste après la baisse de 8 % pour revenir à 50 000 euros ?

Partie D - Des indices pour suivre le prix

On attribue l'indice 100 au prix initial P_0 .

17. Donne successivement l'indice après la hausse, après la réduction, puis après la subvention.
18. Calcule le taux d'évolution entre l'indice atteint après la hausse et l'indice final.
19. L'année suivante, le prix final augmente de 10 %. Calcule le nouvel indice et compare-le à 100.
20. Déduis le nouveau prix exact.

Partie E - Un plan sur trois années

Un second budget de 50 000 euros augmente du même taux r pendant deux années, puis diminue de 10 % la troisième année. Il vaut alors exactement 54 450 euros.

21. Traduis la situation par une équation faisant intervenir $(1 + r)^2$.
22. Résous l'équation en sachant que $1 + r > 0$.
23. Calcule le taux global exact et explique pourquoi le calcul naïf $r + r - 10\%$ ne donne pas ce résultat.

13 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration* / *Passer par l'écriture décimale*

$$\begin{aligned}0,42 &= \frac{42}{100} = \frac{21}{50} = 42 \%, \\ \frac{7}{20} &= 0,35 = 35 \%, \\ 12,5 \% &= 0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}, \\ \frac{5}{8} &= 0,625 = 62,5 \%. \end{aligned}$$

Chaque ligne décrit une seule proportion sous trois formes différentes.

Corrigé 2

 *Démonstration* / *Identifier l'inconnue*

1. La partie vaut $0,15 \times 840 = \boxed{126}$.

2. Ici $126 = 0,15N$, donc

$$N = \frac{126}{0,15} = \boxed{840}.$$

3. La proportion de réponses positives est

$$\frac{156}{480} = \frac{13}{40} = 0,325 = \boxed{32,5 \%}.$$

Corrigé 3

 *Démonstration* / *Comparer des proportions, pas seulement des effectifs*

Dans le groupe A,

$$p_A = \frac{84}{240} = 0,35 = 35 \%.$$

Dans le groupe B,

$$p_B = \frac{117}{360} = 0,325 = 32,5 \%.$$

L'usage du vélo est donc proportionnellement plus fréquent dans le groupe A. L'écart vaut

$$35 - 32,5 = \boxed{2,5 \text{ points de pourcentage}}.$$

Corrigé 4

 *Démonstration / Descendre dans les ensembles emboîtés*

Le nombre de majeurs est

$$1\,000 \times 0,72 = 720.$$

Parmi eux, le nombre de bénévoles est

$$720 \times 0,35 = \boxed{252}.$$

La proportion dans toute l'association vaut

$$\frac{252}{1\,000} = 0,252 = \boxed{25,2\%}.$$

On retrouve directement $0,72 \times 0,35 = 0,252$.

Corrigé 5

 *Démonstration / Changer de population de référence*

Notons S les élèves de seconde demi-pensionnaires. Puisque $S \subset D$,

$$p_D(S) = \frac{p_E(S)}{p_E(D)} = \frac{0,168}{0,42} = \boxed{0,40 = 40\%}.$$

Pour 1 250 élèves, le nombre de demi-pensionnaires vaut

$$1\,250 \times 0,42 = 525,$$

et le nombre d'élèves de seconde demi-pensionnaires vaut

$$1\,250 \times 0,168 = 210.$$

Le contrôle $210/525 = 0,40$ confirme le résultat.

Corrigé 6

 *Démonstration / Calculer les trois mesures*

Pour $250 \rightarrow 285$,

$$\Delta V = 35, \quad t = \frac{35}{250} = 0,14 = 14\%, \quad k = \frac{285}{250} = 1,14.$$

Pour $360 \rightarrow 306$,

$$\Delta V = -54, \quad t = \frac{-54}{360} = -0,15 = -15\%, \quad k = \frac{306}{360} = 0,85.$$

Les signes sont cohérents : la première évolution est une hausse, la seconde une baisse.

Corrigé 7

 *Démonstration | Transformer chaque taux en coefficient*

Une hausse de 12,5 % a pour coefficient 1,125 :

$$480 \times 1,125 = \boxed{540 \text{ euros}}.$$

Une baisse de 16 % a pour coefficient 0,84 :

$$75 \times 0,84 = \boxed{63 \text{ litres}}.$$

Corrigé 8

 *Démonstration | Diviser par le coefficient*

Après une baisse de 15 %, le coefficient est 0,85. Ainsi

$$V_i = \frac{204}{0,85} = \boxed{240}.$$

Après une hausse de 15 %, le coefficient est 1,15. Ainsi

$$V_i = \frac{575}{1,15} = \boxed{500 \text{ euros}}.$$

Dans les deux cas, on peut contrôler en remultipliant par le coefficient.

Corrigé 9

 *Démonstration | Multiplier avant de soustraire 1*

Le coefficient global est

$$K = 1,08 \times 0,95 = \boxed{1,026}.$$

Le taux global vaut donc $1,026 - 1 = 0,026$, soit une **hausse de 2,6 %**. La valeur finale est

$$1\,200 \times 1,026 = \boxed{1\,231,2}.$$

La somme naïve donne $8\% - 5\% = 3\%$. L'écart vient du terme $0,08 \times (-0,05) = -0,004$, soit $-0,4$ point.

Corrigé 10

 *Démonstration | Prendre l'inverse exact*

Le coefficient direct est $1,18 = 59/50$. Son inverse vaut

$$k_{\text{réc}} = \frac{50}{59} \approx 0,84746.$$

Le taux réciproque est donc

$$\frac{50}{59} - 1 = -\frac{9}{59} \approx -0,15254,$$

soit une **baisse d'environ** 15,25 %. Avec une valeur initiale de 500,

$$500 \times 1,18 = 590, \quad 590 \times \frac{50}{59} = 500.$$

Corrigé 11

 *Démonstration / Deux réponses, deux références*

L'écart vaut

$$30 - 24 = \boxed{6 \text{ points de pourcentage}}.$$

L'évolution relative, calculée par rapport aux 24 % initiaux, vaut

$$\frac{30 - 24}{24} = \frac{6}{24} = 0,25 = \boxed{25 \%}.$$

Dans une population de 1 500 personnes, les effectifs passent de $1\,500 \times 0,24 = 360$ à $1\,500 \times 0,30 = 450$, soit $\boxed{90}$ personnes supplémentaires.

Corrigé 12

 *Démonstration / L'indice est un coefficient multiplié par 100*

À l'indice 112, le prix est

$$75 \times \frac{112}{100} = \boxed{84 \text{ euros}}.$$

À l'indice 126, il est

$$75 \times \frac{126}{100} = \boxed{94,50 \text{ euros}}.$$

Entre ces deux dates,

$$k = \frac{126}{112} = 1,125,$$

donc le prix a augmenté de $\boxed{12,5 \%}$.

Corrigé 13

 *Démonstration / Pondérer par les effectifs*

Dans la première classe, il y a $24 \times 0,75 = 18$ lecteurs réguliers. Dans la seconde, il y en a $36 \times 0,50 = 18$. Au total,

$$p = \frac{18 + 18}{24 + 36} = \frac{36}{60} = \boxed{60 \%}.$$

La moyenne simple donnerait 62,5 %, car elle accorderait le même poids aux deux classes. Or la seconde classe, dont la proportion est plus faible, compte davantage d'élèves.

Corrigé 14

 *Démonstration / Utiliser une puissance*

Le coefficient global est

$$K = 1,03^5 \approx 1,159274.$$

La population finale vaut

$$5\,000 \times 1,03^5 \approx 5\,796,37,$$

soit 5 796 bactéries à l'unité près. Le taux global est

$$1,03^5 - 1 \approx 0,159274 = \text{15,93 \%}.$$

L'approximation $5 \times 3\% = 15\%$ oublie les augmentations produites sur les augmentations précédentes ; elle est ici inférieure d'environ 0,93 point.

Corrigé 15

 *Démonstration / Faire évoluer le numérateur et le dénominateur*

La nouvelle proportion vaut

$$p_f = 0,32 \times \frac{1,20}{1,08} = \frac{16}{45} \approx \text{35,56 \%}.$$

Dans la seconde situation, notons k le coefficient de la catégorie. On veut

$$0,40 = 0,32 \times \frac{k}{1,10}.$$

Ainsi

$$k = \frac{0,40 \times 1,10}{0,32} = 1,375.$$

La catégorie doit donc augmenter de 37,5 \%. Le quotient $k/1,10$ compare sa croissance à celle de la population totale : c'est lui qui détermine l'évolution de la proportion.

14 Corrigé du problème

Partie A - Une enquête dans le lycée

 *Démonstration / Effectifs puis moyenne pondérée*

1. Le nombre de demi-pensionnaires est

$$1\,200 \times 0,65 = \boxed{780}.$$

2. Les externes représentent 35 % du lycée, donc

$$1\,200 - 780 = \boxed{420}.$$

3. Parmi les demi-pensionnaires,

$$780 \times 0,40 = \boxed{312}$$

choisissent régulièrement le menu végétarien.

4. Parmi les externes,

$$420 \times 0,25 = \boxed{105}$$

le choisissent régulièrement.

5. L'effectif favorable total vaut $312 + 105 = 417$. Sa proportion dans tout le lycée est

$$\frac{417}{1\,200} = 0,3475 = \boxed{34,75 \%}.$$

6. La moyenne pondérée donne directement

$$\frac{780 \times 0,40 + 420 \times 0,25}{1\,200} = \frac{312 + 105}{1\,200} = 0,3475.$$

On retrouve bien 34,75 %.

Partie B - Le prix d'un repas

 *Démonstration / Suivre la chaîne des coefficients*

7. La hausse de 12 % a pour coefficient 1,12. La réduction de 5 % a pour coefficient 0,95.

8. Après la hausse,

$$P_1 = 4,80 \times 1,12 = \boxed{5,376 \text{ euros}}.$$

9. Après la réduction,

$$P_2 = 5,376 \times 0,95 = \boxed{5,1072 \text{ euros}}.$$

10. Pour les deux premières évolutions,

$$K_2 = 1,12 \times 0,95 = \boxed{1,064}.$$

Le taux global vaut $1,064 - 1 = \boxed{6,4 \%}$.

11. La subvention correspond au coefficient 0,80. Ainsi

$$P_3 = 5,1072 \times 0,80 = \boxed{4,08576 \text{ euros}}.$$

12. Entre P_0 et P_3 , le coefficient global est

$$K = 1,12 \times 0,95 \times 0,80 = \boxed{0,8512}.$$

Le taux global vaut $0,8512 - 1 = -0,1488$: le prix final est inférieur de $\boxed{14,88\%}$ au prix initial.

Partie C - Ajuster une subvention

 *Démonstration* / Une valeur cible impose un coefficient

13. Après une baisse de 8%,

$$50\,000 \times 0,92 = \boxed{46\,000 \text{ euros}}.$$

14. L'augmentation de taux r doit vérifier

$$\boxed{46\,000(1 + r) = 51\,520}.$$

15. On divise par 46 000 :

$$1 + r = \frac{51\,520}{46\,000} = 1,12,$$

d'où $\boxed{r = 0,12 = 12\%}$.

16. Pour revenir de 46 000 à 50 000, il faut le coefficient réciproque

$$\frac{1}{0,92} = \frac{25}{23} \approx 1,08696.$$

Le taux réciproque est donc environ $\boxed{8,70\%}$, et non 8%.

Partie D - Des indices pour suivre le prix

 *Démonstration* / Les indices suivent les mêmes coefficients

17. En partant de l'indice 100 :

$$I_1 = 100 \times 1,12 = \boxed{112},$$

$$I_2 = 112 \times 0,95 = \boxed{106,4}, \quad I_3 = 106,4 \times 0,80 = \boxed{85,12}.$$

18. Entre l'indice 112 et l'indice 85,12,

$$k = \frac{85,12}{112} = 0,76.$$

Il s'agit donc d'une $\boxed{\text{baisse de } 24\%}$. On retrouve $0,95 \times 0,80 = 0,76$.

19. Après une hausse de 10 %,

$$I_4 = 85,12 \times 1,10 = \boxed{93,632}.$$

Cet indice reste inférieur à 100 de $100 - 93,632 = 6,368$ points ; le prix reste donc 6,368 % sous le prix de base.

20. Le nouveau prix exact vaut

$$P_4 = 4,80 \times \frac{93,632}{100} = \boxed{4,494336 \text{ euros}}.$$

Partie E - Un plan sur trois années



Démonstration / Une équation du second degré très particulière

21. Les deux hausses multiplient par $(1 + r)^2$, puis la baisse de 10 % multiplie par 0,90. Ainsi

$$\boxed{50\,000(1 + r)^2 \times 0,90 = 54\,450}.$$

22. Comme $50\,000 \times 0,90 = 45\,000$,

$$(1 + r)^2 = \frac{54\,450}{45\,000} = 1,21.$$

Puisque $1 + r > 0$,

$$1 + r = \sqrt{1,21} = 1,10,$$

donc $\boxed{r = 10\%}$.

23. Le coefficient global exact vaut

$$1,10^2 \times 0,90 = 1,089,$$

soit une $\boxed{\text{hausse globale de } 8,9\%}$. Le calcul naïf $10\% + 10\% - 10\% = 10\%$ additionne des taux appliqués à des bases différentes. Le produit des coefficients conserve exactement ces changements de base.

15 Fiche-mémoire

Définition | Proportion

$$p = \frac{n}{N}, \quad n = pN, \quad N = \frac{n}{p}.$$

Toujours identifier le tout N .

★ Théorème | Proportion de proportion

Si $A \subset B \subset E$,

$$p_E(A) = p_E(B) \times p_B(A).$$

On multiplie le long des inclusions.

Définition | Évolution

$$\Delta V = V_f - V_i, \quad t = \frac{V_f - V_i}{V_i},$$

$$k = \frac{V_f}{V_i} = 1 + t.$$

✓ Propriété | Hausse et baisse

Hausse de $r\%$: multiplier par

$$1 + \frac{r}{100}.$$

Baisse de $r\%$: multiplier par

$$1 - \frac{r}{100}.$$

★ Théorème | Évolutions successives

$$K = k_1 k_2 \cdots k_n, \quad T = K - 1,$$

avec $k_j = 1 + t_j$ à chaque étape. Pour un taux t répété n fois :

$$K = (1 + t)^n.$$

★ Théorème | Évolution réciproque

$$k_{\text{réc}} = \frac{1}{k}, \quad t_{\text{réc}} = \frac{1}{1 + t} - 1.$$

Ne change jamais seulement le signe du taux.

✓ Propriété | Indice base 100

$$I = 100 \frac{V}{V_0}, \quad k = \frac{I_2}{I_1}.$$

Un écart d'indices n'est pas toujours un taux.

Attention | Les quatre pièges

Pourcentage $\neq$ décimal ; proportion $\neq$ évolution ; points $\neq$ taux relatif ; taux successifs $\neq$ somme.

Un pourcentage n'a de sens qu'avec sa référence.

Si tu sais nommer le tout ou la valeur initiale, le calcul devient presque toujours plus simple.

« Toujours identifier le tout de référence. »