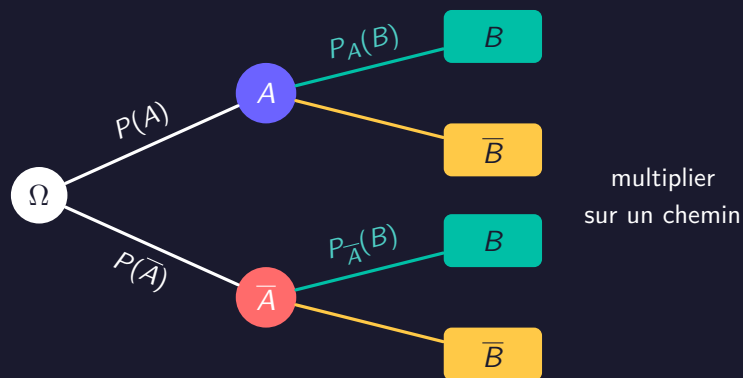


Probabilités conditionnelles

Arbres pondérés et hasard

Modéliser ■ Conditionner ■ Simuler



Seconde générale ■ Mathématiques ■ Programme officiel

 Cours complet 15 exercices Problème défi Corrigés

Table des matières

1	 Pourquoi modéliser le hasard ?	3
2	 Expérience, issues et évènements	3
2.1	L'univers rassemble toutes les issues	3
2.2	Traduire avec les ensembles	4
3	 Loi de probabilité sur un univers fini	4
3.1	Probabilités des issues	4
3.2	Le cas de l'équiprobabilité	5
4	 Calculer avec les évènements	5
4.1	Évènement contraire	5
4.2	Réunion de deux évènements	6
5	 Probabilités conditionnelles	6
5.1	Réduire l'univers au groupe connu	6
5.2	Retrouver une intersection	7
6	 Construire un arbre pondéré	7
6.1	Ce que porte chaque branche	7
6.2	Multiplier le long d'un chemin	8
7	 Passer du texte au tableau et à l'arbre	9
8	 Tests : faux positifs et inversion	9
8.1	Quatre situations à distinguer	9
9	 Fréquences et loi des grands nombres	10
9.1	Observer avec Python	11
10	 Pour aller plus loin - Accessible à tous	11
10.1	Inverser un conditionnement : formule de Bayes	11
10.2	Indépendance de deux évènements	12
10.3	Deux tests conditionnellement indépendants	13
11	 Boîte à outils et erreurs à éviter	14
12	 Exercices progressifs	15
13	 Problème défi : comprendre un dépistage rare	19
14	 Corrigés détaillés	21
15	 Corrigé du problème défi	26
16	 Fiche-mémoire	30

1 ? Pourquoi modéliser le hasard ?

Quand on lance une pièce, on ne peut pas prévoir le résultat du prochain lancer. Pourtant, on peut décrire les résultats possibles et mesurer leurs chances. Les probabilités ne suppriment pas le hasard : elles construisent un **modèle** pour raisonner malgré l'incertitude.

Intuition | Prévoir une proportion, pas un résultat isolé

Dire qu'un évènement a une probabilité de 0,7 ne signifie pas qu'il se produira à coup sûr sept fois lors des dix prochains essais. Cela signifie que, dans de très longues répétitions comparables, sa fréquence a tendance à se rapprocher de 0,7.

Exemple | Deux modèles possibles

Pour une pièce supposée équilibrée, on choisit le modèle $P(\text{pile}) = P(\text{face}) = 1/2$. Pour une pièce réelle inconnue, on peut répéter les lancers et proposer un modèle à partir des fréquences observées.

Attention | Une loi de probabilité est une hypothèse

Le calcul ne démontre jamais qu'un dé est équilibré. L'équiprobabilité vient d'une hypothèse du modèle, justifiée par l'énoncé, par la fabrication de l'objet ou par des observations. Il faut toujours annoncer cette hypothèse.

2 Expérience, issues et évènements

2.1 L'univers rassemble toutes les issues

Définition | Vocabulaire fondamental

- Une **expérience aléatoire** a un résultat que l'on ne connaît pas à l'avance.
- Une **issue** est un résultat possible.
- L'**univers**, noté Ω , est l'ensemble de toutes les issues.
- Un **évènement** est un sous-ensemble de Ω .
- Un évènement est **élémentaire** lorsqu'il ne contient qu'une seule issue.

Exemple | Lancer un dé à six faces

On note le nombre obtenu. Alors

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

L'évènement A : « obtenir un nombre pair » est $A = \{2, 4, 6\}$. L'évènement « obtenir 5 » est élémentaire.

2.2 Traduire avec les ensembles

✓ Propriété | ET, OU, NON

Pour deux évènements A et B :

- $A \cap B$ signifie « A **et** B » ;
- $A \cup B$ signifie « A **ou** B », éventuellement les deux ;
- $\bar{A}$ signifie « **non** A » ;
- $\emptyset$ est l'évènement impossible et Ω l'évènement certain.

💡 Exemple | Lire une intersection

Avec un dé, soit $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{4, 5, 6\}$. Alors

$$A \cap B = \{4, 6\}, \quad A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}, \quad \bar{A} = \{1, 3, 5\}.$$

✂ Méthode | Toujours commencer par traduire

1. décris l'expérience ;
2. écris l'univers ;
3. nomme les évènements ;
4. transforme « et », « ou », « non » en symboles avant de calculer.

3 Loi de probabilité sur un univers fini

3.1 Probabilités des issues

📖 Définition | Loi de probabilité

Sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, une loi de probabilité associe à chaque issue ω_i un nombre p_i tel que

$$p_i \geq 0 \quad \text{et} \quad p_1 + \dots + p_n = 1.$$

Pour un évènement A , on additionne les probabilités des issues qui le composent :

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i.$$

💡 Exemple | Une roue non équilibrée

Une roue porte les lettres a, b, c, d avec les probabilités suivantes.

Issue	a	b	c	d
Probabilité	0,15	0,25	0,40	0,20

Si $V = \{a, c\}$, alors $P(V) = 0,15 + 0,40 = 0,55$.

 *Démonstration* | Pourquoi une probabilité est-elle entre 0 et 1 ?

Une probabilité est une somme de nombres positifs : elle est donc positive. Elle ne peut pas dépasser la somme de toutes les probabilités des issues, qui vaut 1. Ainsi, pour tout évènement A ,

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

3.2 Le cas de l'équiprobabilité

Définition | Équiprobabilité

Les issues sont équiprobables lorsqu'elles ont toutes la même probabilité. Si Ω contient N issues, chacune a alors la probabilité $1/N$ et

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

 *Démonstration* | D'où vient la formule ?

Si les N issues ont la même probabilité p , alors leur somme vaut $Np = 1$, donc $p = 1/N$. Si A contient k issues, on additionne k fois $1/N$:

$$P(A) = \frac{k}{N} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

Attention | Compter seulement après avoir justifié

La formule des cardinaux n'est valable que dans une situation d'équiprobabilité. Sur la roue précédente, les quatre lettres ne sont pas équiprobables : compter les lettres donnerait une réponse fausse.

4 Calculer avec les évènements

4.1 Évènement contraire

Théorème | Probabilité du contraire

Pour tout évènement A ,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

 *Démonstration* | Le certain se partage en deux

Comme A et $\bar{A}$ sont incompatibles et forment ensemble Ω , on a directement

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \quad \text{donc} \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

💡 Exemple | « Au moins une fois »

Si la probabilité de ne jamais réussir une expérience est 0,18, alors la probabilité de réussir au moins une fois vaut

$$1 - 0,18 = 0,82.$$

Le contraire est souvent plus simple à calculer que l'évènement demandé.

4.2 Réunion de deux évènements

★ Théorème | Formule de la réunion

Pour deux évènements A et B ,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

✎ Démonstration | Retirer le double comptage

Dans $P(A) + P(B)$, les issues de $A \cap B$ sont comptées une fois avec A et une seconde fois avec B . On soustrait donc une occurrence de leur probabilité.

💡 Exemple | Deux clubs

Dans un lycée, $P(A) = 0,38$ pour le club artistique, $P(S) = 0,31$ pour le club sportif et $P(A \cap S) = 0,12$. Alors

$$P(A \cup S) = 0,38 + 0,31 - 0,12 = 0,57.$$

5 📉 Probabilités conditionnelles

5.1 Réduire l'univers au groupe connu

📖 Définition | Probabilité de B sachant A

Si $P(A) > 0$, la probabilité de B sachant A , notée $P_A(B)$, est

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Conditionner par A signifie que l'on sait déjà que A est réalisé : A devient le nouvel univers.

🧠 Intuition | Le dénominateur vient après « parmi »

« Parmi les individus de A , quelle part vérifie aussi B ? » Le groupe de référence est A , donc $P(A)$ apparaît au dénominateur. C'est exactement la même idée qu'une fréquence conditionnelle dans un tableau croisé.

💡 Exemple | Depuis un tableau d'effectifs

On choisit au hasard un élève parmi 200.

	Musique	Pas musique	Total
Sport	72	48	120
Pas sport	28	52	80
Total	100	100	200

Avec S : « pratique un sport » et M : « pratique la musique »,

$$P_S(M) = \frac{72}{120} = 0,60, \quad P_M(S) = \frac{72}{100} = 0,72.$$

⚠ Attention | Inverser le conditionnement change la question

$P_A(B)$ et $P_B(A)$ ont le même numérateur $P(A \cap B)$, mais pas le même dénominateur. Ils sont donc généralement différents. « Parmi les sportifs, musiciens » n'est pas la même question que « parmi les musiciens, sportifs ».

5.2 Retrouver une intersection

★ Théorème | Formule multiplicative

Si $P(A) > 0$, alors

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

Si $P(B) > 0$, on a aussi $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.

🖋 Démonstration | Une simple transformation

La définition donne

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

En multipliant les deux membres par $P(A)$, on obtient la formule. Elle signifie : « probabilité d'atteindre A , puis proportion de B à l'intérieur de A ».

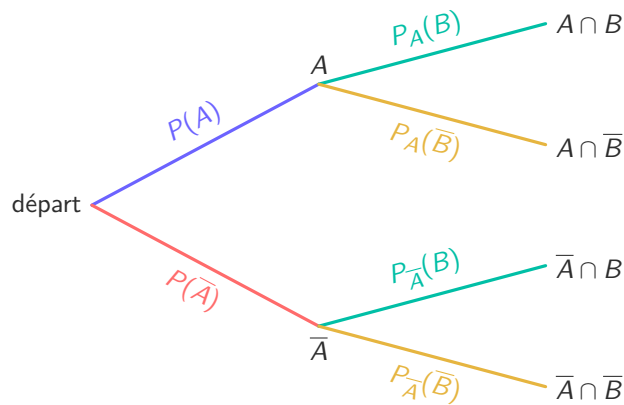
6 🧩 Construire un arbre pondéré

6.1 Ce que porte chaque branche

📖 Définition | Arbre de probabilité

Un arbre pondéré représente des choix ou des informations successives.

- Au premier niveau figurent des probabilités simples : $P(A)$ et $P(\bar{A})$.
- Après A figurent des probabilités conditionnelles : $P_A(B)$ et $P_A(\bar{B})$.
- Les branches issues d'un même noeud ont une somme égale à 1.



✂ Méthode | Compléter les branches complémentaires

À chaque noeud, deux branches complémentaires totalisent 1 :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A), \quad P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B).$$

Le complément dépend du noeud : après A , on reste conditionné par A .

6.2 Multiplier le long d'un chemin

★ Théorème | Probabilité d'un chemin

La probabilité d'un chemin est le produit des pondérations de ses branches. Par exemple,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

💡 Exemple | Deux ateliers

Un objet vient de l'atelier A avec probabilité 0,6 et de l'atelier B avec probabilité 0,4. Le taux de défaut vaut 0,02 après A et 0,05 après B . Si D signifie « défectueux »,

$$P(A \cap D) = 0,6 \times 0,02 = 0,012, \quad P(B \cap D) = 0,4 \times 0,05 = 0,020.$$

Les deux chemins vers D sont incompatibles, donc $P(D) = 0,012 + 0,020 = 0,032$.

✂ Méthode | Lire un arbre sans se perdre

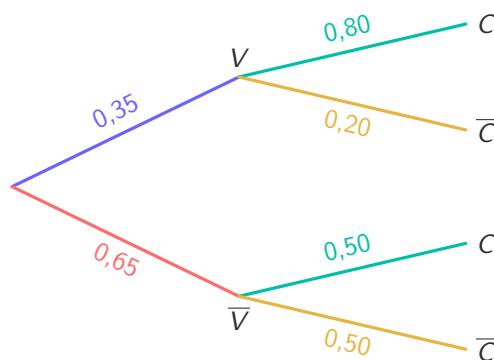
1. écris sur chaque branche la probabilité correspondant au noeud d'où elle part ;
2. complète les branches complémentaires ;
3. multiplie pour calculer un chemin ;
4. additionne seulement des chemins incompatibles menant à l'évènement recherché.

7 ⇌ Passer du texte au tableau et à l'arbre

💡 Exemple | Une phrase bien ordonnée

« 35 % des élèves viennent à vélo. Parmi eux, 80 % portent un casque. Parmi les autres, 50 % portent un casque. » Avec V : « vient à vélo » et C : « porte un casque », cela donne

$$P(V) = 0,35, \quad P_V(C) = 0,80, \quad P_{\bar{V}}(C) = 0,50.$$



On obtient

$$P(C) = 0,35 \times 0,80 + 0,65 \times 0,50 = 0,605.$$

⚠ Attention | Ne jamais multiplier des probabilités prises au hasard

On multiplie uniquement des branches qui se suivent sur un même chemin. On additionne des chemins distincts seulement lorsqu'ils réalisent tous l'évènement demandé.

✓ Propriété | Lien avec un tableau d'effectifs

Si l'on raisonne sur 1 000 élèves, l'arbre précédent conduit à 350 cyclistes, dont 280 casqués, et 650 non-cyclistes, dont 325 casqués. Les probabilités d'un arbre et les fréquences d'un tableau décrivent les mêmes proportions dans deux registres différents.

8 ✎ Tests : faux positifs et inversion

8.1 Quatre situations à distinguer

On note M : « la personne est malade » et T : « le test est positif ».

📖 Définition | Sensibilité et spécificité

- La **sensibilité** est $P_M(T)$: probabilité d'un test positif parmi les malades.
- La **spécificité** est $P_{\bar{M}}(\bar{T})$: probabilité d'un test négatif parmi les non-malades.
- Un **faux positif** réalise $\bar{M} \cap T$.
- Un **faux négatif** réalise $M \cap \bar{T}$.

💡 Exemple | Pourquoi un test positif ne suffit pas à lire la sensibilité

Dans une population de 10 000 personnes, 2 % sont malades. Un test a une sensibilité de 95 % et une spécificité de 90 %.

	Test positif	Test négatif	Total
Malade	190	10	200
Non-malade	980	8 820	9 800
Total	1 170	8 830	10 000

Ainsi,

$$P_M(T) = \frac{190}{200} = 95 \%, \quad P_T(M) = \frac{190}{1170} \approx 16,2 \%.$$

🧠 Intuition | L'effet du taux de base

Les non-malades sont ici très nombreux. Même si seulement 10 % d'entre eux ont un faux positif, ils peuvent produire plus de tests positifs que les malades. La composition de la population compte autant que les performances du test.

⚠️ Attention | Un modèle, pas un diagnostic personnel

Ces calculs expliquent le vocabulaire probabiliste d'un test. Une décision médicale réelle dépend du test utilisé, du contexte clinique et de professionnels de santé ; elle ne se réduit pas à un exercice de seconde.

9 📈 Fréquences et loi des grands nombres

★ Théorème | Version vulgarisée au programme

Lorsque le nombre n de répétitions est grand, sauf exception, la fréquence observée d'un événement est proche de sa probabilité.

⚠️ Attention | Ce que cette phrase ne dit pas

Elle ne dit pas que la fréquence est exactement égale à la probabilité, ni qu'elle s'en rapproche à chaque nouvelle répétition. Les fluctuations restent aléatoires, mais deviennent généralement plus petites à grande échelle.

9.1 Observer avec Python

On simule un évènement de probabilité 0,4 grâce à `random()`, qui fournit un nombre pseudo-aléatoire entre 0 et 1.

```
1 from random import random
2
3 n = 10000
4 succes = 0
5
6 for _ in range(n):
7     if random() < 0.4:
8         succes = succes + 1
9
10 frequence = succes / n
11 print(frequence)
```

Méthode | Lire le programme ligne par ligne

À chaque répétition, la condition `random() < 0.4` est vraie avec une probabilité proche de 0,4. Le compteur `succes` enregistre le nombre de réussites ; le quotient `succes / n` est leur fréquence.

Intuition | Une seule simulation ne prouve rien

Pour observer la stabilisation, relance le programme pour plusieurs valeurs de n , par exemple 10, 100, 1000 et 10000. Les résultats changent à chaque exécution, mais les fréquences sont généralement plus resserrées autour de 0,4 quand n augmente.

10 Pour aller plus loin - Accessible à tous

Intuition | Statut de cette partie

Le socle officiel est entièrement traité dans les sections précédentes. Les résultats suivants préparent aux classes très exigeantes, mais chaque formule est reconstruite pas à pas et ne demande aucun prérequis caché.

10.1 Inverser un conditionnement : formule de Bayes

Théorème | Formule de Bayes

Si $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors

$$P_B(A) = \frac{P(A) P_A(B)}{P(B)}.$$

 Démonstration | La même intersection vue de deux côtés

La formule multiplicative donne

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

et la définition de $P_B(A)$ donne

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

En remplaçant l'intersection par la première expression, on obtient la formule de Bayes.

 Exemple | Retrouver l'atelier d'origine

Dans l'exemple des ateliers, $P(A \cap D) = 0,012$ et $P(D) = 0,032$. Donc

$$P_D(A) = \frac{0,012}{0,032} = 0,375.$$

Parmi les objets défectueux, 37,5 % proviennent de l'atelier A.

10.2 Indépendance de deux évènements

 Définition | Indépendance

Deux évènements A et B sont indépendants lorsque savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B :

$$P_A(B) = P(B).$$

Lorsque $P(A) > 0$, cette égalité équivaut à

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

 Démonstration | Passer d'un critère à l'autre

En partant de $P_A(B) = P(B)$ et en utilisant $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$, on obtient

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Réciproquement, si cette égalité est vraie et $P(A) > 0$, on divise par $P(A)$ pour retrouver $P_A(B) = P(B)$.

 Attention | Indépendants ne signifie pas incompatibles

Des évènements incompatibles ne peuvent pas se produire ensemble : $P(A \cap B) = 0$. Deux évènements indépendants de probabilités non nulles ont au contraire $P(A \cap B) = P(A)P(B) > 0$.

10.3 Deux tests conditionnellement indépendants

Si deux tests sont indépendants une fois l'état M connu, et si chacun est positif avec probabilité 0,95 parmi les malades, alors

$$P_M(T_1 \cap T_2) = 0,95^2 = 0,9025.$$

Cette hypothèse doit être annoncée : deux tests réalisés de la même façon peuvent partager des sources d'erreur et ne pas être indépendants.

11 Boîte à outils et erreurs à éviter

Méthode | Équiprobabilité

$$P(A) = \text{Card}(A) / \text{Card}(\Omega).$$

Méthode | Contraire

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Méthode | Réunion

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Méthode | Conditionnelle

$$P_A(B) = P(A \cap B) / P(A).$$

Méthode | Arbre

Branches d'un noeud : somme 1.

Méthode | Chemin

Multiplie les branches successives.

Méthode | Plusieurs chemins

Additionne les chemins incompatibles utiles.

Attention | Réflexes

Annonce le modèle, lis l'ordre du conditionnement et distingue fréquence observée et probabilité théorique.

Intuition | La question qui sauve

Avant tout calcul conditionnel, demande-toi : « qu'est-ce que je sais déjà ? » Cette information donne le premier évènement du chemin et le groupe de référence du dénominateur.

12 Exercices progressifs



Intuition | Mode d'emploi

Écris les évènements avant les calculs. Sur un arbre, complète d'abord toutes les branches complémentaires. Pour une conditionnelle, reformule toujours par une phrase commençant par « parmi ».

Exercice 1 : Décrire une expérience

On lance une pièce puis un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4.

1. Écrire l'univers sous forme de couples.
2. Donner son cardinal.
3. Écrire l'évènement A : « obtenir pile et un nombre pair ».

Exercice 2 : ET, OU, NON

On lance un dé équilibré à six faces. Soit A : « obtenir un nombre pair » et B : « obtenir au moins 4 ». Écrire A , B , $A \cap B$, $A \cup B$ et $\bar{A}$, puis calculer leurs probabilités.

Exercice 3 : Compléter une loi

Une variable aléatoire prend quatre issues a, b, c, d avec

$$P(a) = 0,10, \quad P(b) = 0,20, \quad P(c) = x, \quad P(d) = 0,35.$$

Déterminer x , puis calculer la probabilité de $E = \{b, c\}$.

Exercice 4 : Compter en équiprobabilité

On choisit uniformément un entier entre 1 et 20. Calculer la probabilité d'obtenir :

1. un multiple de 3 ;
2. un carré parfait ;
3. un multiple de 3 ou un carré parfait.

Exercice 5 : Contraire et réunion

On sait que

$$P(A) = 0,62, \quad P(B) = 0,45, \quad P(A \cap B) = 0,28.$$

Calculer $P(\bar{A})$, $P(A \cup B)$ et la probabilité que ni A ni B ne se réalise.

Exercice 6 ★★☆☆ : Conditionner dans un tableau

On choisit au hasard un élève dans le tableau suivant.

	Musique	Pas musique	Total
Sport	72	48	120
Pas sport	28	52	80
Total	100	100	200

Calculer et interpréter $P_S(M)$, $P_M(S)$, $P_{\bar{S}}(M)$ et $P_M(\bar{S})$.

Exercice 7 ★★☆☆ : Traduire sans inverser

Dans un établissement, 40 % des élèves sont demi-pensionnaires. Parmi eux, 30 % participent à un atelier ; parmi les externes, 18 % participent à un atelier.

1. Définir deux évènements D et A .
2. Traduire les trois données en probabilités.
3. Expliquer pourquoi aucune donnée ne fournit directement $P_A(D)$.

Exercice 8 ★★☆☆ : Construire et exploiter un arbre

On a

$$P(V) = 0,35, \quad P_V(C) = 0,80, \quad P_{\overline{V}}(C) = 0,50.$$

1. Construire l'arbre complet.
2. Calculer $P(V \cap C)$ et $P(\overline{V} \cap C)$.
3. En déduire $P(C)$.

Exercice 9 ★★☆☆ : Retrouver une branche

On sait que

$$P(A) = 0,40, \quad P_A(B) = 0,75, \quad P(B) = 0,48.$$

Calculer $P(A \cap B)$, puis déterminer $P_{\overline{A}}(B)$ à l'aide d'un arbre.**Exercice 10** ★★☆☆ : Comprendre un test

Sur 1 000 personnes, 4 % sont malades. Un test a une sensibilité de 90 % et une spécificité de 95 %.

1. Construire le tableau d'effectifs.
2. Calculer la fréquence des personnes malades parmi les tests positifs.
3. Comparer ce résultat à la sensibilité et expliquer la différence.

Exercice 11 ★★☆☆ : De l'arbre au tableauUne entreprise reçoit 60 % de ses colis du fournisseur F . Parmi les colis de F , 3 % sont endommagés ; parmi les autres, 7 % le sont.

1. Construire l'arbre.
2. Sur une base de 10 000 colis, dresser le tableau d'effectifs attendu.
3. Calculer la probabilité qu'un colis soit endommagé.

Exercice 12 ★★☆☆ : Lire une simulation

On exécute le programme suivant.

```

1 from random import random
2 n = 5000
3 compteur = 0
4 for _ in range(n):
5     if random() < 0.27:
6         compteur = compteur + 1
7 print(compteur / n)
```

Que simule-t-il ? Autour de quelle valeur la sortie doit-elle généralement se situer ? Que changerait le remplacement de 5 000 par 50 ?

Exercice 13 ★★★☆☆ : Une probabilité cachée

On sait que

$$P(A) = 0,25, \quad P(B) = 0,45, \quad P_A(B) = 0,80.$$

Déterminer $P_{\overline{A}}(B)$.

Exercice 14 ★★☆☆ : Retrouver l'origine d'un défaut

Une usine utilise la machine X pour 70 % de sa production et la machine Y pour le reste. Les taux de défaut sont respectivement 1 % et 4 %. Un objet choisi au hasard est défectueux. Calculer la probabilité qu'il provienne de Y .

Exercice 15 ★★☆☆ : Tester une indépendance

On donne

$$P(A) = 0,40, \quad P(B) = 0,30, \quad P(A \cap B) = 0,12.$$

1. Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.
2. Montrer que A et B sont indépendants.
3. Que deviendrait la conclusion si $P(A \cap B) = 0,15$?

13 🦋 Problème défi : comprendre un dépistage rare

🧠 Intuition | Objectif

Ce problème construit pas à pas un paradoxe apparent : un test performant peut produire beaucoup de faux positifs lorsque la maladie est rare. Les dernières questions montrent comment un second test et le taux de base modifient l'interprétation.

On modélise une campagne concernant 20 000 personnes. On suppose que 1 % sont malades. Un test est positif pour 95 % des personnes malades et négatif pour 98 % des personnes non malades.

On note M : « malade » et T : « test positif ».

Partie A - Construire le modèle

1. Traduire les trois pourcentages par $P(M)$, $P_M(T)$ et $P_{\overline{M}}(\overline{T})$.
2. Calculer $P(\overline{M})$, $P_M(\overline{T})$ et $P_{\overline{M}}(T)$.
3. Construire l'arbre pondéré complet.
4. Nommer les chemins correspondant à un vrai positif, un faux positif, un vrai négatif et un faux négatif.

Partie B - Raisonner sur 20 000 personnes

5. Calculer le nombre de personnes malades et non malades.
6. Parmi les malades, calculer les nombres de tests positifs et négatifs.
7. Parmi les non-malades, calculer les nombres de tests positifs et négatifs.
8. Dresser le tableau croisé complet.
9. Calculer $P(T)$ de deux manières : avec le tableau, puis avec l'arbre.
10. Calculer $P_T(M)$ et l'interpréter par une phrase.
11. Expliquer pourquoi $P_T(M)$ est très différent de la sensibilité $P_M(T)$.

Partie C - Deux tests positifs

On effectue un second test identique sur un nouvel échantillon. On suppose que, lorsque l'état de santé est fixé, les deux résultats sont indépendants.

12. Expliquer le rôle de cette nouvelle hypothèse.
13. Calculer $P_M(T_1 \cap T_2)$ et $P_{\overline{M}}(T_1 \cap T_2)$.
14. Calculer $P(M \cap T_1 \cap T_2)$ et $P(\overline{M} \cap T_1 \cap T_2)$.
15. En déduire la probabilité d'être malade sachant que les deux tests sont positifs.
16. Comparer avec la réponse à la question 10.

Partie D - Le taux de base change

Dans une population plus exposée, on suppose maintenant que 5 % des personnes sont malades. Les performances du test restent les mêmes.

17. Sur 20 000 personnes, construire les quatre effectifs du nouveau tableau.
18. Calculer la probabilité d'être malade parmi les tests positifs.
19. Expliquer pourquoi cette probabilité a changé alors que le test est identique.

Partie E - Simuler et garder un esprit critique

20. Compléter les deux conditions manquantes du programme ci-dessous pour simuler la situation initiale.

```
1 from random import random
2
3 n = 20000
4 positifs = 0
5 malades_parmi_positifs = 0
6
7 for _ in range(n):
8     malade = random() < ...
9     if malade:
10         test_positif = random() < ...
11     else:
12         test_positif = random() < 0.02
13     if test_positif:
14         positifs = positifs + 1
15     if malade:
16         malades_parmi_positifs += 1
17
18 print(malades_parmi_positifs / positifs)
```

21. Quelle valeur la sortie doit-elle approcher lorsque n est grand ?
22. Pourquoi les résultats changent-ils d'une exécution à l'autre ?
23. Donner deux raisons pour lesquelles ce modèle ne suffit pas à prendre une décision médicale réelle.

Attention | Avant le corrigé

Ne confonds jamais « positif parmi les malades » avec « malade parmi les positifs ». Dessine les groupes ou construis un tableau de 20 000 personnes avant de manipuler les formules.

14 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Construire des couples*

On note P pour pile et F pour face. L'univers est

$$\Omega = \{(P, 1), (P, 2), (P, 3), (P, 4), (F, 1), (F, 2), (F, 3), (F, 4)\}.$$

Il contient $2 \times 4 = 8$ issues. L'évènement demandé est

$$A = \{(P, 2), (P, 4)\}.$$

Corrigé 2

 *Démonstration / Traduire avant de compter*

On a

$$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{4, 5, 6\}.$$

Donc

$$A \cap B = \{4, 6\}, \quad A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}, \quad \bar{A} = \{1, 3, 5\}.$$

Le dé étant équilibré,

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad P(\bar{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Corrigé 3

 *Démonstration / La somme vaut 1*

Les probabilités des quatre issues totalisent 1, donc

$$0,10 + 0,20 + x + 0,35 = 1.$$

Ainsi,

$$x = 1 - 0,65 = \boxed{0,35}.$$

Comme $E = \{b, c\}$,

$$P(E) = 0,20 + 0,35 = \boxed{0,55}.$$

Corrigé 4

 *Démonstration / Compter sans oublier l'intersection*

Il y a 20 issues équiprobables.

— Les multiples de 3 sont 3, 6, 9, 12, 15, 18 : probabilité $6/20 = \boxed{3/10}$.

— Les carrés parfaits sont 1, 4, 9, 16 : probabilité $4/20 = \boxed{1/5}$.

— Le nombre 9 appartient aux deux listes. La réunion contient $6 + 4 - 1 = 9$ nombres, donc sa probabilité vaut $\boxed{9/20}$.

Corrigé 5

 *Démonstration / Utiliser le contraire et la réunion*

$$P(\bar{A}) = 1 - 0,62 = \boxed{0,38}.$$

Puis

$$P(A \cup B) = 0,62 + 0,45 - 0,28 = \boxed{0,79}.$$

« Ni A ni B » est le contraire de $A \cup B$, donc

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0,79 = \boxed{0,21}.$$

Corrigé 6

 *Démonstration / Le groupe connu donne le dénominateur*

Parmi les 120 sportifs, 72 pratiquent la musique :

$$P_S(M) = \frac{72}{120} = \boxed{0,60}.$$

Parmi les 100 musiciens, 72 sont sportifs :

$$P_M(S) = \frac{72}{100} = \boxed{0,72}.$$

Parmi les 80 non-sportifs, 28 pratiquent la musique :

$$P_{\bar{S}}(M) = \frac{28}{80} = \boxed{0,35}.$$

Enfin, parmi les 100 musiciens, 28 ne sont pas sportifs :

$$P_M(\bar{S}) = \frac{28}{100} = \boxed{0,28}.$$

Corrigé 7

 *Démonstration / Respecter l'ordre de la phrase*

Notons D : « demi-pensionnaire » et A : « participe à un atelier ». Les données deviennent

$$P(D) = 0,40, \quad P_D(A) = 0,30, \quad P_{\overline{D}}(A) = 0,18.$$

La quantité $P_A(D)$ demanderait : « parmi les participants à l'atelier, quelle proportion est demi-pensionnaire ? ». On ne connaît pas encore l'effectif ou la probabilité du groupe A ; cette valeur n'est donc pas une donnée directe.

Corrigé 8

 *Démonstration / Multiplier les chemins*

Les branches complémentaires valent

$$P(\overline{V}) = 0,65, \quad P_V(\overline{C}) = 0,20, \quad P_{\overline{V}}(\overline{C}) = 0,50.$$

Les deux chemins utiles donnent

$$P(V \cap C) = 0,35 \times 0,80 = \boxed{0,28},$$

$$P(\overline{V} \cap C) = 0,65 \times 0,50 = \boxed{0,325}.$$

Ils sont incompatibles et couvrent tous les cas où C est réalisé. Ainsi,

$$P(C) = 0,28 + 0,325 = \boxed{0,605}.$$

Corrigé 9

 *Démonstration / Isoler le second chemin*

Le chemin A puis B vaut

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = 0,40 \times 0,75 = \boxed{0,30}.$$

Or B est réalisé soit par le chemin $A \cap B$, soit par le chemin $\overline{A} \cap B$. Donc

$$P(\overline{A} \cap B) = 0,48 - 0,30 = 0,18.$$

Comme $P(\overline{A}) = 0,60$,

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{0,18}{0,60} = \boxed{0,30}.$$

Corrigé 10

 *Démonstration / Construire les quatre cases*

Il y a $0,04 \times 1000 = 40$ malades et 960 non-malades.

- Parmi les malades, 90 % sont positifs : 36 positifs et 4 négatifs.
- Parmi les non-malades, 95 % sont négatifs : 912 négatifs et 48 positifs.

	Positif	Négatif	Total
Malade	36	4	40
Non-malade	48	912	960
Total	84	916	1 000

Parmi les 84 tests positifs, 36 concernent une personne malade :

$$P_T(M) = \frac{36}{84} = \frac{3}{7} \approx \boxed{42,9\%}.$$

La sensibilité 90 % conditionne par « malade » ; le résultat 42,9 % conditionne par « test positif ».

Corrigé 11

 *Démonstration / Choisir une base compatible*

Notons E : « endommagé ». L'arbre porte

$$P(F) = 0,60, \quad P_F(E) = 0,03, \quad P_{\bar{F}}(E) = 0,07.$$

Sur 10 000 colis, on obtient 6 000 colis de F , dont 180 endommagés, et 4 000 autres colis, dont 280 endommagés.

	Endommagé	Intact	Total
F	180	5 820	6 000
$\bar{F}$	280	3 720	4 000
Total	460	9 540	10 000

Ainsi,

$$P(E) = \frac{460}{10000} = \boxed{0,046} = \boxed{4,6\%}.$$

Corrigé 12

 *Démonstration / Identifier l'évènement simulé*

Chaque répétition réalise un succès lorsque $\text{random}() < 0,27$. Le programme simule donc 5 000 répétitions d'un évènement de probabilité 0,27 et affiche sa fréquence.

Pour $n = 5\,000$, la sortie se situe généralement près de 0,27. Avec seulement 50 répétitions, les fluctuations seraient beaucoup plus visibles : une sortie comme 0,20 ou 0,34 ne serait pas surprenante.

Corrigé 13

 *Démonstration / Décomposer selon A et $\bar{A}$*

Le premier chemin vers B vaut

$$P(A \cap B) = 0,25 \times 0,80 = 0,20.$$

Il reste donc

$$P(\bar{A} \cap B) = 0,45 - 0,20 = 0,25.$$

Comme $P(\bar{A}) = 0,75$,

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{0,25}{0,75} = \boxed{\frac{1}{3}} \approx \boxed{33,3\%}.$$

Corrigé 14

 *Démonstration / Remonter un arbre*

Notons D : « défectueux ». Les deux chemins menant à D ont pour probabilités

$$P(X \cap D) = 0,70 \times 0,01 = 0,007,$$

$$P(Y \cap D) = 0,30 \times 0,04 = 0,012.$$

Ainsi,

$$P(D) = 0,007 + 0,012 = 0,019.$$

Parmi les objets défectueux, la part issue de Y vaut

$$P_D(Y) = \frac{0,012}{0,019} = \frac{12}{19} \approx \boxed{63,2\%}.$$

Bien que Y ne produise que 30 % des objets, son taux de défaut plus élevé le rend majoritaire parmi les défauts.

Corrigé 15

 *Démonstration / Comparer à la probabilité initiale*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,12}{0,40} = \boxed{0,30} = P(B).$$

Ainsi, savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B : les événements sont indépendants. On vérifie aussi

$$P_B(A) = \frac{0,12}{0,30} = \boxed{0,40} = P(A).$$

Si $P(A \cap B) = 0,15$, alors

$$P_A(B) = \frac{0,15}{0,40} = 0,375 \neq P(B),$$

donc ils ne seraient plus indépendants.

15 Corrigé du problème défi

Partie A - Construire le modèle

 Démonstration / Questions 1 à 4

1. Les données sont

$$P(M) = 0,01, \quad P_M(T) = 0,95, \quad P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,98.$$

2. Par complément,

$$P(\overline{M}) = 0,99, \quad P_M(\overline{T}) = 0,05, \quad P_{\overline{M}}(T) = 0,02.$$

3. L'arbre se lit ainsi : une première séparation $M/\overline{M}$, puis une séparation $T/\overline{T}$ depuis chacun des deux noeuds. Les poids sont ceux calculés ci-dessus.

4.

- vrai positif : $M \cap T$;
- faux positif : $\overline{M} \cap T$;
- vrai négatif : $\overline{M} \cap \overline{T}$;
- faux négatif : $M \cap \overline{T}$.

Partie B - Raisonner sur 20 000 personnes

 Démonstration / Questions 5 à 11

5. Le nombre de malades est

$$0,01 \times 20000 = 200.$$

Il y a donc $20\,000 - 200 = 19\,800$ non-malades.

6. Parmi les 200 malades, 95 % ont un test positif :

$$0,95 \times 200 = 190.$$

Les 10 autres ont un test négatif.

7. Parmi les 19 800 non-malades, 2 % ont un faux positif :

$$0,02 \times 19800 = 396.$$

Les $19\,800 - 396 = 19\,404$ autres ont un test négatif.

8. On obtient

	Positif	Négatif	Total
Malade	190	10	200
Non-malade	396	19 404	19 800
Total	586	19 414	20 000

9. Avec le tableau,

$$P(T) = \frac{586}{20000} = \boxed{0,0293}.$$

Avec l'arbre,

$$P(T) = 0,01 \times 0,95 + 0,99 \times 0,02 = 0,0095 + 0,0198 = \boxed{0,0293}.$$

10. Parmi les 586 tests positifs, 190 concernent une personne malade :

$$P_T(M) = \frac{190}{586} = \frac{95}{293} \approx \boxed{32,4\%}.$$

11. La sensibilité $P_M(T) = 95\%$ regarde les tests positifs parmi seulement 200 malades. La probabilité $P_T(M)$ regarde les malades parmi 586 tests positifs. Comme les non-malades sont très nombreux, leurs 396 faux positifs pèsent fortement dans le second groupe.

Partie C - Deux tests positifs

 Démonstration / Questions 12 à 16

12. L'indépendance conditionnelle autorise à multiplier les probabilités des deux résultats une fois l'état de santé fixé. Sans cette hypothèse, connaître la probabilité de chaque test séparé ne suffirait pas à calculer celle de deux positifs.

13. Parmi les malades,

$$P_M(T_1 \cap T_2) = 0,95^2 = \boxed{0,9025}.$$

Parmi les non-malades,

$$P_{\overline{M}}(T_1 \cap T_2) = 0,02^2 = \boxed{0,0004}.$$

14. En tenant compte du taux de base,

$$P(M \cap T_1 \cap T_2) = 0,01 \times 0,9025 = 0,009025,$$

$$P(\overline{M} \cap T_1 \cap T_2) = 0,99 \times 0,0004 = 0,000396.$$

15. La probabilité de deux tests positifs vaut

$$0,009025 + 0,000396 = 0,009421.$$

Donc

$$P_{T_1 \cap T_2}(M) = \frac{0,009025}{0,009421} \approx \boxed{95,8 \%}.$$

16. Après un seul test positif, le modèle donnait environ 32,4 %. Après deux tests positifs conditionnellement indépendants, il donne environ 95,8 %. Le second test réduit fortement le poids des faux positifs dans ce modèle.

Partie D - Le taux de base change

 Démonstration / Questions 17 à 19

17. Il y a maintenant $0,05 \times 20000 = 1000$ malades et 19 000 non-malades.

— malades positifs : $0,95 \times 1000 = 950$; malades négatifs : 50 ;

— non-malades positifs : $0,02 \times 19000 = 380$; non-malades négatifs : 18 620.

	Positif	Négatif	Total
Malade	950	50	1 000
Non-malade	380	18 620	19 000
Total	1 330	18 670	20 000

18.

$$P_T(M) = \frac{950}{1330} = \frac{95}{133} \approx \boxed{71,4 \%}.$$

19. Le test conserve la même sensibilité et la même spécificité, mais la population contient davantage de malades. Les vrais positifs deviennent donc plus nombreux par rapport aux faux positifs. La probabilité après un test dépend du taux de base de la population étudiée.

Partie E - Simuler et garder un esprit critique *Démonstration / Questions 20 à 23*

20. Dans la situation initiale, les lignes manquantes sont

```
1 malade = random() < 0.01
2 ...
3 test_positif = random() < 0.95
```

21. Pour un grand nombre de répétitions, la sortie doit être proche de

$$P_T(M) \approx \boxed{0,324}.$$

22. Les appels à `random()` produisent de nouvelles réalisations pseudo-aléatoires à chaque exécution. Les effectifs fluctuent donc autour de leurs valeurs attendues ; la fréquence affichée n'est pas exactement constante.

23. Plusieurs limites doivent être signalées. Par exemple :

- la sensibilité, la spécificité et le taux de maladie peuvent dépendre de la population et du protocole ;
- les résultats de deux tests ne sont pas nécessairement indépendants ;
- un modèle ne contient ni symptômes, ni antécédents, ni qualité du prélèvement ;
- une décision réelle exige une interprétation professionnelle et souvent des examens complémentaires.

16 Fiche-mémoire

Sur un arbre : compléter, multiplier, puis additionner

Définition | Univers et évènement

Ω contient toutes les issues. Un évènement A est un sous-ensemble de Ω .

Définition | Équiprobabilité

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

Définition | Contraire

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Définition | Réunion

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Définition | Conditionnelle

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

« Sachant A » signifie que A est le groupe de référence.

Méthode | Chemin

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B).$$

Méthode | Arbre

1. complète à 1 ;
2. multiplie sur un chemin ;
3. additionne les chemins utiles.

Méthode | Loi des grands nombres

Pour n grand, la fréquence observée est généralement proche de la probabilité.

Attention | Les quatre pièges

Utiliser l'équiprobabilité sans l'annoncer ; confondre $P_A(B)$ et $P_B(A)$; additionner au lieu de multiplier sur un chemin ; prendre une fréquence simulée pour une valeur théorique exacte.

Réflexe final : reformule chaque probabilité conditionnelle avec « parmi », puis surligne le groupe de référence.