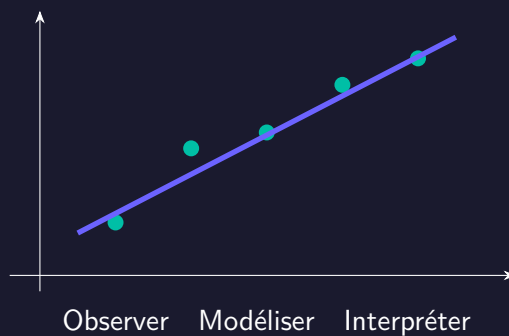


FICHE 01

Ajustements et modèles non linéaires

Statistiques ■ Comprendre et s'entraîner



Terminale professionnelle
Année scolaire 2026–2027

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	Pourquoi ce chapitre ?	3
2	L'idée avant la formule	3
3	Le cours formel	3
3.1	Construire un ajustement affine	3
3.2	Interpolation et extrapolation	4
3.3	Reconnaître un modèle non linéaire	5
3.4	Comparer deux modèles sur les mêmes données	7
3.5	Rédiger une conclusion fondée sur des données	8
4	Boîte à outils	9
5	Exercices progressifs	11
6	Problème — Pour aller plus loin	13
7	Indices des exercices	14
8	Corrigés détaillés	16
9	Corrigé du problème	22
10	Variante autonome et bilan	24
11	Fiche-mémoire	24
12	Indices des pauses et des preuves	25
13	Explications des pauses et des preuves	27

1 Pourquoi ce chapitre ?

Le modèle affine n'est pas toujours adapté. Comparer les écarts et les rapports aide à choisir une courbe qui décrit mieux les données. **Ton parcours.** Module du programme professionnel pour les groupements A, B, C. Les automatismes, le raisonnement et les outils numériques se travaillent tout au long du parcours.

- Construire un ajustement affine.
- Interpolation et extrapolation.
- Reconnaître un modèle non linéaire.
- Comparer deux modèles sur les mêmes données.
- Rédiger une conclusion fondée sur des données.

2 L'idée avant la formule

Des différences constantes évoquent une droite ; des rapports constants évoquent une exponentielle. Un bon ajustement doit aussi rester plausible dans son contexte.

3 Le cours formel

3.1 Construire un ajustement affine

Intuition | Construire la notion pas à pas

Remplacer un nuage par une tendance. Un ajustement affine utilise une droite $\hat{y} = ax + b$ pour prévoir y à partir de x . Le symbole $\hat{y}$ désigne une valeur prévue, tandis que y désigne une observation. Les deux ne coïncident pas nécessairement.

Mesurer ce que la droite manque. Le résidu est $e_i = y_i - \hat{y}_i$. Il est positif lorsque l'observation se situe au-dessus de la droite et négatif lorsqu'elle se situe en dessous. Additionner les résidus signés peut masquer des erreurs par compensation ; les carrés évitent cette compensation.

Distinguer les méthodes. La méthode de Mayer relie les points moyens de deux groupes de points ordonnés. La méthode des moindres carrés cherche la droite qui minimise la somme des carrés des résidus verticaux. Ces critères ne donnent pas nécessairement la même droite.

Évaluer le résultat au-delà de la formule. On observe le nuage avant l'ajustement et les résidus après. Une courbure régulière des résidus suggère qu'une droite est mal adaptée. Une petite erreur sur les observations ne garantit pas une bonne prévision loin de la zone étudiée.

Définition | Comprendre la notion

Un ajustement remplace un nuage imparfaitement aligné par une relation approchée $y = ax + b$. Une droite au jugé, une droite de Mayer ou une régression peuvent donner des ajustements différents. La méthode de Mayer partage les points ordonnés en deux groupes et relie leurs points moyens. La méthode des moindres carrés choisit a, b pour minimiser la somme des carrés des écarts verticaux $\sum (y_i - (ax_i + b))^2$; on utilise un outil numérique pour la déterminer. L'écart $y_i - \hat{y}_i$ s'appelle un résidu. Un nuage courbé ou des résidus organisés signalent qu'une droite peut être inadéquate. Arrondis les coefficients seulement à la précision utile.

 Exemple | Exemple commenté

Pour les points $(0; 1)$, $(1; 3)$, $(2; 4)$, une régression affine donne $\hat{y} = 1,5x + 7/6$. Les prévisions sont $7/6$, $8/3$ et $25/6$. Les résidus observation moins prévision sont donc $-1/6$, $1/3$ et $-1/6$. Leur somme est nulle, mais les erreurs ne sont pas toutes nulles. La somme des carrés vaut $1/36 + 1/9 + 1/36 = 1/6$. Ce calcul rend visible une dispersion que la somme signée annulerait. Le point moyen est $G(1; 8/3)$. La droite passe bien par lui puisque $1,5 + 7/6 = 8/3$. Pour un affichage, on peut arrondir la constante à $1,1667$; pour contrôler les résidus, garder $7/6$ évite les petites erreurs d'arrondi.

 Attention | Comprendre une erreur fréquente

Un résidu négatif n'est pas une erreur « plus petite que zéro » à annuler. Il indique le côté de la droite où se trouve l'observation ; son carré contribue positivement au critère d'ajustement.

À toi d'essayer : Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Les moindres carrés minimisent. . .

1. Le nombre de points du nuage
2. La somme des carrés des résidus verticaux
3. La somme des abscisses

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 25 [Explication](#), p. 27

3.2 Interpolation et extrapolation

 Intuition | Construire la notion pas à pas

Situer la demande par rapport aux observations. Une interpolation utilise le modèle à l'intérieur de l'intervalle des abscisses observées. Une extrapolation le prolonge à l'extérieur. Dans les deux cas, le résultat reste une estimation ; l'extrapolation ajoute l'hypothèse que la tendance continue hors de la zone connue.

Décoder les dates et les unités. Le rang x peut être le nombre d'années après une date de référence, et non l'année du calendrier. Si 2022 porte le rang zéro, 2026 porte le rang 4. Remplacer x par 2026 produirait une erreur de sens, même si le calcul était arithmétiquement exact.

Savoir quelle variable on cherche. Pour prévoir y à partir d'une valeur de x , on remplace x dans la formule. Pour trouver quand un objectif y sera atteint, on résout une équation en x , puis on reconvertit le rang en date si nécessaire.

Appliquer les limites du phénomène. Un effectif ne peut pas être négatif, une proportion reste entre zéro et un, une capacité peut plafonner. Une prévision qui viole ces limites signale que le modèle ne peut pas être prolongé jusque-là. Une valeur admissible ne suffit toutefois pas à garantir sa fiabilité.

Définition | Comprendre la notion

Une interpolation estime une valeur pour une abscisse à l'intérieur de l'intervalle observé. Une extrapolation utilise le modèle en dehors de cet intervalle ; elle demande davantage de prudence. Pour prévoir y , remplace x dans le modèle. Pour chercher la valeur de x correspondant à un objectif, résous l'équation du modèle. Si x est une date codée, reviens ensuite à la date réelle. Même à l'intérieur de l'intervalle, une prévision n'est pas une certitude individuelle. Vérifie son ordre de grandeur, son unité et la pertinence du modèle ; évite les extrapolations incompatibles avec une limite physique ou un marché saturé.

Exemple | Exemple commenté

Les années 2020 à 2024 sont codées de x égal à 0 à x égal à 4, avec le modèle $y = 12x + 80$. Pour 2023, le rang est $2023 - 2020 = 3$; la prévision vaut $12 \times 3 + 80 = 116$. Comme 3 appartient à $[0; 4]$, il s'agit d'une interpolation.

Pour 2027, le rang est 7 et la prévision vaut $12 \times 7 + 80 = 164$. Le rang 7 est hors de l'intervalle observé : c'est une extrapolation. Le calcul utilise la même formule, mais la justification est plus fragile puisque l'on suppose la poursuite de la tendance trois ans après la dernière observation.

Pour un objectif de 140, l'équation $12x + 80 = 140$ donne $x = 5$, donc l'année 2025 selon le modèle. Ce résultat constitue lui aussi une extrapolation.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Une formule peut fournir un nombre sans que ce nombre ait un sens dans le contexte. Vérifier le domaine observé et les limites physiques fait partie de la réponse, pas seulement du commentaire final.

À toi d'essayer : Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Prédire hors de l'intervalle observé est...

1. Une mesure exacte
2. Une extrapolation
3. Une interpolation

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 25](#) [Explication, p. 27](#)

3.3 Reconnaître un modèle non linéaire

Intuition | Construire la notion pas à pas

Observer la forme avant de choisir une famille. Une droite représente une variation constante de y par unité de x . Si le nuage se courbe régulièrement, ce taux varie et un modèle non linéaire peut être plus pertinent. Il faut examiner tout le nuage, pas seulement deux points.

Comparer différences et rapports. Pour des abscisses régulièrement espacées, des différences constantes suggèrent un modèle affine. Pour des ordonnées positives, des rapports constants suggèrent un modèle exponentiel. Ces tests supposent des pas d'abscisse identiques ; sans cela, leur lecture directe serait trompeuse.

Utiliser les résidus pour voir une structure oubliée. Un résidu positif signifie que le modèle sous-estime l'observation, un résidu négatif qu'il la surestime. Si ces signes s'organisent selon une courbe, les erreurs ne ressemblent pas à de petites fluctuations sans structure : la famille choisie manque peut-être une partie du phénomène.

Ne pas confondre souplesse et pertinence. Un modèle compliqué peut traverser beaucoup de points mais se comporter mal entre eux ou au-delà. On examine sa cohérence avec le contexte, ses domaines de définition et des observations supplémentaires avant de lui faire confiance.

Définition | Comprendre la notion

Une droite ne convient pas à tous les nuages. Une courbure régulière peut inviter à examiner un modèle polynomial, exponentiel ou puissance à l'aide d'un outil numérique. À pas d'abscisse constant, des différences approximativement constantes suggèrent un modèle affine ; des rapports approximativement constants pour des ordonnées positives suggèrent un modèle exponentiel. Le choix ne repose pas seulement sur un coefficient : examine les résidus, les unités, le domaine de définition et la cohérence du phénomène. Un modèle plus compliqué peut épouser les données sans mieux prédire.

Exemple | Exemple commenté

Aux abscisses 0, 1, 2, 3, les valeurs sont 100, 80, 64, 51,2. Les différences sont -20, -16 et -12,8 : une même augmentation de x ne produit pas une même variation de y . Une droite ne décrit donc pas exactement ces quatre points.

Les rapports valent en revanche $80/100 = 0,8$, $64/80 = 0,8$ et $51,2/64 = 0,8$. Le modèle $y = 100 \times 0,8^x$ retrouve tous les relevés. À x égal à 4, il prévoit $51,2 \times 0,8 = 40,96$.

Cette dernière valeur reste une extrapolation si les observations s'arrêtent à 3. La constance des rapports sur les données justifie un modèle compatible, mais ne prouve pas que le taux de baisse restera constant.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Des rapports constants ne se lisent directement comme un facteur par unité de x que si les pas d'abscisse sont constants et connus. Un doublement après un jour n'est pas le même rythme qu'un doublement après trois jours.

À toi d'essayer : Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Des ordonnées positives multipliées à chaque pas par 1,2 suggèrent. . .

1. Un modèle affine exact
2. Un modèle exponentiel
3. Une constante

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 25](#) [Explication, p. 27](#)

3.4 Comparer deux modèles sur les mêmes données** Intuition | Construire la notion pas à pas**

Comparer sur une base commune. Deux modèles doivent être évalués sur les mêmes observations, pour la même variable et dans la même unité. Sinon, une différence d'indicateur peut provenir du changement d'échelle plutôt que de la qualité de prévision.

Choisir un sens à l'erreur. Le résidu signé $y - \hat{y}$ indique si le modèle sous-estime ou surestime. La valeur absolue mesure la taille de l'écart ; le carré donne davantage de poids aux grandes erreurs. Le choix du critère dépend de ce que l'on veut pénaliser.

Ne pas compter seulement les points exacts. Un modèle qui tombe juste sur deux observations mais commet une forte erreur sur une troisième peut être moins bon qu'un modèle légèrement imprécis partout. On calcule le critère sur toute la série.

Évaluer aussi la prévision. L'erreur sur les données ayant servi à choisir le modèle peut être optimiste. Quand c'est possible, on vérifie sur d'autres observations. La simplicité, la plausibilité physique et la stabilité du modèle complètent le calcul ; un modèle plus compliqué n'est pas automatiquement préférable.

** Définition | Comprendre la notion**

Pour comparer des modèles, garde les mêmes observations et la même variable expliquée. Calcule leurs prévisions, puis les résidus et un indicateur commun, par exemple la somme des carrés des résidus. Le modèle de plus faible erreur sur les données n'est pas automatiquement le meilleur en prévision. Il peut être trop compliqué ou contredire une contrainte physique. Si possible, réserve des observations pour un contrôle distinct de l'ajustement. Ne compare pas directement un R^2 calculé sur y à un R^2 calculé sur $\log(y)$: les échelles d'erreur diffèrent.

** Exemple | Exemple commenté**

Pour les observations 10, 13, 16, A prévoit 10, 12, 14 et B prévoit 11, 13, 15. Les résidus de A sont 0, 1, 2 : sa somme des carrés vaut $0 + 1 + 4 = 5$. Les résidus de B sont -1, 0, 1 : sa somme des carrés vaut $1 + 0 + 1 = 2$.

B est donc meilleur selon ce critère sur cette série. Sa somme des résidus signés vaut pourtant zéro, ce qui ne signifie pas qu'il n'a aucune erreur : les écarts -1 et 1 se compensent.

Cette comparaison ne garantit pas que B sera meilleur pour une date future. Il faut encore examiner la cohérence des formules et, si possible, leur comportement sur des observations qui n'ont pas servi à l'ajustement.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Additionner les résidus signés peut masquer une erreur importante : 2 et -2 se compensent, mais les deux prévisions restent fausses. Utilise le critère demandé sur les tailles des erreurs.

À toi d'essayer : Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Des résidus 2 et -2 donnent une somme des carrés de...

1. 4
2. 0
3. 8

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 25](#) [Explication, p. 27](#)

3.5 Rédiger une conclusion fondée sur des données**🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas**

Relier le calcul à la décision. Une valeur numérique ne répond pas seule à une question pratique. On précise ce qu'elle mesure, sa population, son unité et le seuil auquel on la compare : capacité, tolérance, délai ou budget.

Distinguer les statuts des informations. Une observation est une donnée recueillie ; une estimation provient d'un calcul ou d'un modèle ; une hypothèse indique ce qui est supposé. Les présenter séparément évite de transformer une prévision en certitude.

La qualité de l'échantillon compte. Un grand nombre de réponses ne corrige pas automatiquement une sélection qui exclut certaines personnes. On examine qui peut répondre, à quel moment et par quel moyen, puis on limite la conclusion à la population effectivement représentée.

Décider près d'un seuil. Si plusieurs modèles raisonnables donnent des résultats de part et d'autre d'une capacité, le calcul ne permet pas de garantir qu'elle suffira. On étudie alors l'erreur habituelle, les conséquences d'un dépassement et les informations qui pourraient réduire l'incertitude.

📖 Définition | Comprendre la notion

Une conclusion statistique précise la question, la population, les données utilisées, le modèle et le résultat avec son unité. Elle distingue un fait observé, une estimation et une hypothèse. Un échantillon biaisé ne devient pas représentatif uniquement parce qu'il est grand. Une mesure peut comporter de l'incertitude ; une prévision peut être sensible aux valeurs atypiques ou au choix du modèle. Pour une décision, confronte le résultat aux contraintes : coût, tolérance, délai ou capacité. Ne donne pas une précision plus grande que celle permise par les données. Signale clairement les informations qui manquent pour conclure.

💡 Exemple | Exemple commenté

Un modèle prévoit 124,7 commandes et la capacité disponible est 120. On commence par interpréter : le résultat est une estimation, pas un comptage effectué. Pour le présenter, on annonce environ 125 commandes selon le modèle.

La différence calculée avant arrondi est $124,7 - 120 = 4,7$ commandes, soit un dépassement estimé d'environ cinq commandes. Cela indique qu'une marge de capacité mérite d'être étudiée.

Une conclusion complète peut être : « Si la tendance se maintient, la demande prévue est d'environ 125 commandes, au-dessus de la capacité de 120. Il faut examiner une marge et les erreurs de prévision avant de garantir la prise en charge. » Elle relie le résultat, la décision et la limite, sans prétendre connaître exactement le nombre futur.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Un résultat présenté avec plusieurs décimales peut sembler précis sans être fiable. La précision du calcul ne corrige ni un biais d'enquête ni une hypothèse de modèle fragile.

À toi d'essayer : Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Une très grande enquête biaisée est forcément représentative. . .

1. Faux
2. Vrai
3. Vrai à partir de 1 000 réponses

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 26](#) [Explication, p. 27](#)

4 Boîte à outils

🔧 Méthode | Construire un ajustement affine

1. Observe le nuage et précise la méthode d'ajustement utilisée.
2. Calcule ou relève les coefficients a et b avec une précision suffisante.
3. Calcule les prévisions $\hat{y}_i$, puis les résidus $y_i - \hat{y}_i$.
4. Compare les carrés des résidus et leur organisation, pas seulement leur somme signée.
5. Présente les valeurs obtenues comme des prévisions dépendant du modèle.

🔧 Méthode | Interpolation et extrapolation

1. Relève l'intervalle observé, le codage de x et les unités.
2. Convertis la demande en abscisse et distingue interpolation et extrapolation.
3. Calcule une image ou résous l'équation correspondant à l'objectif.
4. Reconvertis le résultat en date ou en quantité et arrondis avec une précision justifiée.
5. Contrôle les limites physiques et indique la dépendance au modèle.

 Méthode | Reconnaître un modèle non linéaire

1. Vérifie l'espacement des abscisses et observe la forme générale du nuage.
2. Calcule différences et, pour des valeurs non nulles adaptées au modèle, rapports successifs.
3. Propose une famille cohérente avec ces observations et le contexte.
4. Teste la formule sur tous les points puis examine les résidus.
5. Présente les valeurs futures comme conditionnelles au maintien de la règle.

 Méthode | Comparer deux modèles sur les mêmes données

1. Utilise les mêmes données et reconstruis toutes les prévisions dans la même unité.
2. Calcule les résidus observation moins prévision.
3. Applique le même critère à chaque modèle : valeurs absolues ou carrés, selon la question.
4. Compare les totaux et examine quelles observations contribuent le plus à l'erreur.
5. Complète la conclusion par les limites du domaine, du modèle et du contrôle prédictif.

 Méthode | Rédiger une conclusion fondée sur des données

1. Rappelle la question et la population concernée.
2. Présente le résultat avec son unité et un arrondi adapté.
3. Indique s'il s'agit d'une observation ou d'une prévision dépendant d'hypothèses.
4. Compare le résultat au seuil ou à la contrainte de décision.
5. Signale précisément le biais ou l'information manquante qui limite la conclusion.

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases ; 6 à 10 demandent plusieurs étapes ; 11 à 15 t'invitent à choisir, justifier et contrôler. Cherche avant de consulter les indices.

Exercice 1 — Utiliser une droite fournie ★★☆☆

Un ajustement donne $y = 2,5x + 8$. Quelle valeur prévoit-il pour $x = 6$?

Exercice 2 — Identifier la zone ★★☆☆

On observe des durées entre 2 et 12 min. Prédire à 8 min est-il une interpolation ? Et à 20 min ?

Exercice 3 — Des rapports constants ★★☆☆

Pour les rangs 0, 1, 2, les valeurs sont 5, 15, 45. Propose un modèle exponentiel.

Exercice 4 — Une erreur absolue ★★☆☆

Une observation vaut 48 et une prévision 52. Donne le résidu et l'erreur absolue.

Exercice 5 — Arrondir avec sens ★★☆☆

Un modèle prévoit 42,73 clients. Comment présenter ce résultat ?

Exercice 6 — Un ajustement de Mayer ★★☆☆

Les deux sous-groupes ont pour points moyens $G_1(2; 7)$ et $G_2(6; 15)$. Détermine la droite de Mayer.

Exercice 7 — Une date codée ★★☆☆

Le rang 0 correspond à 2022 et le modèle est $y = 6x + 50$. Quelle prévision donne-t-il pour 2026 ?

Exercice 8 — Une courbure quadratique ★★☆☆

Les valeurs aux abscisses 0, 1, 2, 3 sont 1, 2, 5, 10. Vérifie le modèle $y = x^2 + 1$ et prévois à 4.

Exercice 9 — Comparer des carrés ★★☆☆

A donne des résidus 1, -1, 2 ; B donne 0, 0, 3. Compare leurs sommes des carrés.

Exercice 10 — Une enquête sélective ★★☆☆

Un magasin demande uniquement aux clients présents à 10 h en semaine leur préférence d'horaire. Quelle limite faut-il signaler ?

Exercice 11 — Comparer des résidus ★★☆☆

Pour $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 5)$, compare les sommes des carrés des résidus des modèles A : $y = 2x$ et B : $y = 2x + 1$.

Exercice 12 — Un modèle qui devient impossible ★★☆☆

Un ajustement $p(x) = 110 - 5x$ donne un pourcentage. Peut-on l'utiliser pour toute valeur positive de x ?

Exercice 13 — Un résidu organisé ★★ ★

Une droite donne des résidus positifs au début et à la fin, négatifs au milieu. Que suggère cette organisation ?

Exercice 14 — Deux R carrés incomparables ★★ ★

Un modèle affine sur y a $R^2 = 0,96$; une droite sur $\log(y)$ a $R^2 = 0,98$. Peut-on annoncer que le second prédit forcément mieux y ?

Exercice 15 — Décider près d'un seuil ★★ ★

La capacité est 200 unités. Deux modèles raisonnables prévoient 198 et 207. Peut-on garantir qu'elle suffira ?

6 Problème — Pour aller plus loin

Choisir un modèle pour des mesures

On observe, aux temps $x = 0, 1, 2, 3$, les valeurs $y = 5, 10, 20, 40$.

1. Calcule les différences puis les rapports successifs.
2. Écris un modèle exponentiel qui reproduit les valeurs.
3. Détermine la droite passant par les points extrêmes et compare sa prévision en $x = 1$ à l'observation.
4. Prévois y en $x = 4$ avec les deux modèles.
5. Explique comment examiner la qualité d'un modèle et le risque d'extrapolation.

7 Indices des exercices

Exercice 1

Indice 1. Remplace l'abscisse dans l'équation.

Indice 2. Distingue valeur prédite et valeur mesurée.

Exercice 2

Indice 1. Compare l'abscisse à l'intervalle observé.

Indice 2. À l'intérieur : interpolation ; à l'extérieur : extrapolation.

Exercice 3

Indice 1. Compare les quotients des valeurs successives.

Indice 2. La valeur initiale donne le coefficient devant la puissance.

Exercice 4

Indice 1. Le résidu garde un signe.

Indice 2. L'erreur absolue mesure la taille de l'écart.

Exercice 5

Indice 1. Le caractère étudié est un nombre de personnes.

Indice 2. Conserve la distinction entre prévision et observation.

Exercice 6

Indice 1. La droite passe par les deux points moyens.

Indice 2. Calcule pente puis ordonnée à l'origine.

Exercice 7

Indice 1. Calcule l'écart à l'année de référence.

Indice 2. 2022 porte le rang 0.

Exercice 8

Indice 1. Teste toutes les abscisses.

Indice 2. Pour prévoir, remplace x par 4.

Exercice 9

Indice 1. Éleve chaque résidu au carré.

Indice 2. Deux résidus nuls ne suffisent pas à conclure.

Exercice 10

Indice 1. Qui n'a aucune chance d'être interrogé ?

Indice 2. La sélection dépend de la variable que l'on veut étudier.

Exercice 11

Indice 1. Calcule observation moins prévision pour chaque point.

Indice 2. Éleve les résidus au carré avant de les additionner.

Exercice 12

Indice 1. Un pourcentage a des bornes naturelles.

Indice 2. Résous séparément $p(x) \geq 0$ et $p(x) \leq 100$.

Exercice 13

Indice 1. Des résidus sans structure attendue ne devraient pas dessiner une courbure.

Indice 2. Un résidu positif signifie observation au-dessus du modèle.

Exercice 14

Indice 1. Les deux régressions n'expliquent pas exactement la même variable.

Indice 2. Reviens à l'échelle de y avant de comparer les erreurs.

Exercice 15

Indice 1. Compare les deux prévisions au même seuil.

Indice 2. Une différence de modèle a une conséquence sur la décision.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La droite est fournie ; on cherche la valeur qu'elle prévoit pour une abscisse précise.

Construire la réponse.

1. On remplace x par 6 : $\hat{y} = 2,5 \times 6 + 8$.
2. La multiplication donne 15 ; l'addition donne $15 + 8 = 23$.

Vérifier. La droite part de 8 à x égal à zéro et gagne 2,5 par unité d'abscisse. Six unités ajoutent 15, ce qui confirme 23.

Conclure. Le modèle prévoit 23 pour x égal à 6 ; ce n'est pas nécessairement une valeur mesurée.

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le critère est la position de l'abscisse demandée par rapport à l'intervalle observé.

Construire la réponse.

1. Les observations couvrent $[2; 12]$ minutes.
2. Comme $2 \leq 8 \leq 12$, 8 minutes est à l'intérieur : on interpole.
3. Comme $20 > 12$, 20 minutes est à l'extérieur : on extrapole.

Vérifier. Le type de prévision dépend de la durée demandée, pas de la valeur de y que donnera le modèle.

Conclure. À 8 minutes, c'est une interpolation ; à 20 minutes, une extrapolation.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On recherche un modèle exponentiel aux rangs entiers 0, 1 et 2.

Construire la réponse.

1. Les rapports successifs sont $15/5 = 3$ et $45/15 = 3$. On retient donc le facteur $q = 3$.
2. Au rang 0, $Aq^0 = A$; la valeur initiale 5 impose $A = 5$.
3. Le modèle est $y = 5 \times 3^x$. Il prévoit au rang 3 : $5 \times 3^3 = 5 \times 27 = 135$.

Vérifier. Aux rangs 0, 1 et 2, le modèle donne 5, 15 et 45, exactement les observations. La prévision 135 suppose que le même facteur se poursuit.

Conclure. Un modèle compatible est $y = 5 \times 3^x$; il prévoit 135 au rang 3.

Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le résidu conserve un signe ; l'erreur absolue ne conserve que la taille de l'écart.

Construire la réponse.

1. Le résidu vaut $48 - 52 = -4$.
2. L'erreur absolue vaut $|-4| = 4$.
3. Le signe négatif signifie que la prévision dépasse l'observation : le modèle surestime de 4 unités.

Vérifier. En retirant 4 à la prévision 52, on retrouve l'observation 48. L'écart de taille 4 ne devient pas négatif.

Conclure. Le résidu est -4 et l'erreur absolue est 4.

Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le modèle produit une valeur décimale, mais le nombre de clients effectivement présents sera entier.

Construire la réponse.

1. Le résultat calculé est 42,73. Pour une présentation à l'unité la plus proche, on l'arrondit à 43.
2. On conserve les mots « environ » et « selon le modèle » pour indiquer qu'il s'agit d'une prévision.
3. On ne remplace pas cette formulation par « 43 clients observés », puisqu'aucun comptage réel n'est fourni.

Vérifier. L'écart entre 42,73 et 43 vaut 0,27, inférieur à l'écart avec 42 qui vaut 0,73. Cet arrondi ne quantifie pas l'incertitude de la prévision.

Conclure. On annonce « environ 43 clients selon le modèle ».

Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La droite de Mayer doit passer par les deux points moyens fournis.

Construire la réponse.

1. La pente est la variation verticale divisée par la variation horizontale : $a = (15 - 7)/(6 - 2) = 8/4 = 2$.
2. On écrit alors $y = 2x + b$. Au point $G_1(2; 7)$, $7 = 4 + b$, donc $b = 3$.
3. L'équation obtenue est $y = 2x + 3$.

Vérifier. Pour le second point, $2 \times 6 + 3 = 15$. Les deux points moyens satisfont donc l'équation, comme l'exige la méthode.

Conclure. La droite de Mayer est $y = 2x + 3$.

Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. x compte les années écoulées depuis 2022 ; il ne représente pas directement l'année.

Construire la réponse.

1. Le rang de 2026 est $x = 2026 - 2022 = 4$.
2. On remplace ce rang : $\hat{y} = 6 \times 4 + 50 = 24 + 50 = 74$.

Vérifier. Au rang zéro, la formule donne 50 pour 2022. Quatre hausses annuelles de 6 ajoutent 24, ce qui retrouve 74. L'intervalle observé n'étant pas précisé ici, on ne peut pas classer cette prévision en interpolation ou extrapolation.

Conclure. Le modèle prévoit 74 pour 2026.

Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On vérifie le modèle proposé sur chacune des quatre observations avant de l'utiliser.

Construire la réponse.

1. À x égal à 0, $x^2 + 1 = 1$; à x égal à 1, la valeur est 2.
2. À x égal à 2, $2^2 + 1 = 5$; à x égal à 3, $3^2 + 1 = 10$. Les quatre données sont retrouvées.
3. À x égal à 4, la prévision est $4^2 + 1 = 16 + 1 = 17$.

Vérifier. Les différences observées sont 1, 3 et 5 : elles augmentent, ce qui est cohérent avec une courbure quadratique et non avec une droite exacte. Cela ne démontre pas à lui seul la règle au-delà de 3.

Conclure. Le modèle correspond aux quatre points et prévoit 17 à x égal à 4, sous réserve de sa validité hors des observations.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On compare les sommes des carrés sur les trois observations, même si certains résidus sont nuls.

Construire la réponse.

1. Pour A, $1^2 + (-1)^2 + 2^2 = 1 + 1 + 4 = 6$.
2. Pour B, $0^2 + 0^2 + 3^2 = 0 + 0 + 9 = 9$.
3. Comme $6 < 9$, A possède le plus faible total d'erreur quadratique.

Vérifier. B passe exactement par deux observations, mais son erreur 3 sur la troisième contribue 9 à elle seule. Le carré pénalise fortement cette grande erreur.

Conclure. A est meilleur selon ce critère sur les données considérées.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On cherche quelles personnes sont exclues par le mode de sélection de l'enquête.

Construire la réponse.

1. Seuls les clients présents à 10 h en semaine peuvent répondre. Les personnes indisponibles à cet horaire n'ont aucune chance d'être interrogées.
2. La disponibilité à 10 h est liée à la préférence d'horaire que l'on cherche à étudier : la sélection peut donc favoriser cet horaire.
3. Augmenter seulement le nombre de réponses dans ce même créneau ne supprime pas le biais.
4. Il faut varier les horaires et les modes de recueil pour atteindre aussi les personnes absentes à 10 h.

Vérifier. Une conclusion sur tous les clients à partir des seuls présents à 10 h dépasserait la population effectivement représentée.

Conclusion. L'enquête présente un biais de sélection lié à l'horaire ; elle peut surestimer la préférence pour le créneau de 10 h.

Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On compare les deux modèles avec le même critère sur les mêmes trois observations.

Construire la réponse.

1. A prévoit 0, 2, 4. Les résidus sont $1 - 0 = 1$, $2 - 2 = 0$, $5 - 4 = 1$. Leur somme des carrés vaut $1^2 + 0^2 + 1^2 = 2$.
2. B prévoit 1, 3, 5. Les résidus sont $1 - 1 = 0$, $2 - 3 = -1$, $5 - 5 = 0$. Leur somme des carrés vaut $0^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1$.
3. Comme $1 < 2$, B a la plus faible erreur quadratique parmi ces deux modèles sur cette série.

Vérifier. Le carré de -1 vaut 1, pas -1. B n'est pas pour autant déclaré meilleur que toute droite possible, ni garanti pour des prévisions hors des observations.

Conclusion. Selon la somme des carrés des résidus, B ajuste mieux ces données que A.

Corrigé 12

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le résultat représente une proportion exprimée en pourcentage ; il doit être compris entre 0 et 100.

Construire la réponse.

1. La condition $110 - 5x \geq 0$ donne $-5x \geq -110$, puis $x \leq 22$ après division par -5 et inversion du sens.
2. La condition $110 - 5x \leq 100$ donne $-5x \leq -10$, puis $x \geq 2$.
3. Il faut satisfaire les deux conditions : $2 \leq x \leq 22$.

Vérifier. À x égal à 2, le modèle donne 100 ; à x égal à 22, il donne 0. Avant 2, il dépasse 100, et après 22 il devient négatif. Même dans l'intervalle admissible, la validité statistique dépend des observations ayant servi à l'ajustement.

Conclure. On ne peut pas utiliser ce modèle pour toute valeur positive de x ; son interprétation comme proportion impose au moins $x \in [2; 22]$.

Corrigé 13

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On traduit les signes des résidus en position de la droite par rapport aux observations.

Construire la réponse.

1. Au début et à la fin, un résidu positif signifie $y > \hat{y}$: la droite passe sous les observations.
2. Au milieu, un résidu négatif signifie $y < \hat{y}$: la droite passe au-dessus.
3. Cette organisation en forme de creux suggère une courbure que la droite ne reproduit pas.
4. On examine alors une famille non linéaire justifiée par le phénomène et l'on compare ses résidus sur les mêmes données.

Vérifier. Une structure visible ne désigne pas automatiquement une fonction précise. Plusieurs modèles peuvent être courbés ; le contexte et les données doivent permettre de les départager.

Conclure. Les résidus suggèrent que l'ajustement affine est inadapté et qu'un modèle non linéaire mérite d'être étudié.

Corrigé 14

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les deux indicateurs ne portent pas sur la même variable expliquée.

Construire la réponse.

1. Le premier R^2 mesure un ajustement des valeurs y ; le second mesure un ajustement des valeurs $\log(y)$.
2. Une différence donnée sur les logarithmes ne correspond pas à une différence constante dans l'unité initiale. Comparer directement 0,96 et 0,98 ne compare donc pas les mêmes erreurs.
3. Il faut reconstruire les prévisions de y à partir de la droite logarithmique, puis calculer un critère commun dans l'échelle de y .
4. Pour une conclusion prédictive, on examine aussi des observations réservées et les limites du phénomène.

Vérifier. Un meilleur ajustement en logarithme peut mieux représenter certaines erreurs relatives sans minimiser les erreurs absolues en y . Cela explique pourquoi le classement peut changer d'une échelle à l'autre.

Conclure. Non : on ne peut pas annoncer une meilleure prévision de y sur la seule comparaison de ces deux R^2 .

Corrigé 15

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les deux prévisions doivent être comparées à la même capacité de 200 unités.

Construire la réponse.

1. La première prévision, 198, est inférieure à la capacité de 2 unités.
2. La seconde, 207, la dépasse de 7 unités.
3. Les modèles raisonnables conduisent donc à des décisions différentes. On ne peut pas garantir une capacité suffisante sur cette base.
4. On examine les erreurs passées, les hypothèses qui expliquent l'écart et les conséquences d'un manque pour décider d'une marge éventuelle.

Vérifier. Faire simplement la moyenne des deux prévisions ne supprimerait pas l'incertitude. Leur désaccord autour du seuil est précisément l'information à prendre en compte.

Conclure. La capacité peut être dépassée ; les données fournies ne permettent ni de garantir qu'elle suffira ni d'affirmer qu'un dépassement se produira.

9 Corrigé du problème

1. **Comprendre la question.** Des écarts constants suggèrent un modèle affine ; des rapports constants suggèrent un modèle exponentiel.

Construire la réponse.

- (a) Les différences successives valent $10-5=5$, $20-10=10$ et $40-20=20$. Elles ne sont pas constantes.
(b) Les rapports valent $10/5 = 2$, $20/10 = 2$ et $40/20 = 2$.

Vérifier. Les abscisses sont régulièrement espacées d'une unité, ce qui permet cette comparaison directe des évolutions.

Conclure. Les données indiquent un doublement à chaque unité de temps, compatible avec un modèle exponentiel.

2. **Comprendre la question.** La valeur au temps zéro fixe le coefficient initial et le doublement fixe la base.

Construire la réponse.

- (a) On propose $y = 5 \times 2^x$.
(b) Aux temps 0, 1, 2 et 3, les puissances valent 1, 2, 4 et 8 : les valeurs sont bien 5, 10, 20 et 40.
(c) Comme les ordonnées sont positives, on peut aussi écrire $\log y = \log 5 + x \log 2$: les données transformées sont alignées.

Vérifier. Le modèle retrouve tous les points, mais cette concordance ne prouve pas que la même loi restera vraie après le dernier temps observé.

Conclure. Le modèle exponentiel proposé est $y = 5 \times 2^x$.

3. **Comprendre la question.** La droite relie les deux extrémités, mais il faut tester sa concordance avec les points intermédiaires.

Construire la réponse.

- (a) La pente est $(40 - 5)/(3 - 0) = 35/3$.
(b) Le point d'abscisse zéro fixe l'ordonnée à l'origine à 5, donc $y = (35/3)x + 5$.
(c) En x égal à 1, la droite prédit $35/3 + 5 = 50/3$ au lieu de 10.
(d) La prévision dépasse l'observation de $50/3 - 10 = 20/3$.

Vérifier. Passer exactement par les points extrêmes ne garantit pas de passer par les autres observations.

Conclure. Le modèle affine reproduit les extrémités mais surestime sensiblement l'observation en x égal à 1.

4. **Comprendre la question.** On évalue les deux modèles au même temps situé au-delà des données.

Construire la réponse.

- (a) L'exponentielle donne $5 \times 2^4 = 80$.
(b) La droite donne $(35/3) \times 4 + 5 = 155/3$.

Vérifier. L'exponentielle conserve un rapport constant et la droite un accroissement constant ; leurs extrapolations doivent donc diverger.

Conclure. Les prévisions en 4 sont 80 pour l'exponentielle et $155/3$ pour la droite.

5. **Comprendre la question.** La qualité d'un modèle se juge sur les observations et sur son usage prévu.

Construire la réponse.

- (a) On calcule les résidus observation moins prévision pour chaque point, puis on regarde leur taille et leur organisation.
(b) Des écarts systématiques, comme une courbure ignorée par une droite, peuvent indiquer un modèle inadapté.

- (c) On examine aussi si le mécanisme supposé est plausible : une quantité ne double pas forcément indéfiniment.
- (d) Le temps 4 est hors de la plage observée $[0;3]$: il faut confronter la prévision à de nouvelles mesures.

Vérifier. Un ajustement exact sur quatre données n'apporte pas de garantie universelle sur toutes les données futures.

Conclure. L'exponentielle décrit mieux ces observations ; son extrapolation reste une hypothèse à vérifier.

10 Variante autonome et bilan

Les valeurs 12, 18, 27 sont observées aux rangs 0, 1, 2. Propose un modèle et une prévision au rang 3.

À toi d'essayer : Vérifie ta démarche

Résous la variante, puis explique pourquoi ta méthode s'applique.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 26](#) [Explication, p. 27](#)

- Je peux expliquer : construire un ajustement affine.
- Je peux expliquer : interpolation et extrapolation.
- Je peux expliquer : reconnaître un modèle non linéaire.
- Je peux expliquer : comparer deux modèles sur les mêmes données.
- Je peux expliquer : rédiger une conclusion fondée sur des données.

11 Fiche-mémoire

Construire un ajustement affine.

1. Observe le nuage et précise la méthode d'ajustement utilisée.
2. Calcule ou relève les coefficients a et b avec une précision suffisante.
3. Calcule les prévisions $\hat{y}_i$, puis les résidus $y_i - \hat{y}_i$.
4. Compare les carrés des résidus et leur organisation, pas seulement leur somme signée.
5. Présente les valeurs obtenues comme des prévisions dépendant du modèle.

Interpolation et extrapolation.

1. Relève l'intervalle observé, le codage de x et les unités.
2. Convertis la demande en abscisse et distingue interpolation et extrapolation.
3. Calcule une image ou résous l'équation correspondant à l'objectif.
4. Reconvertis le résultat en date ou en quantité et arrondis avec une précision justifiée.
5. Contrôle les limites physiques et indique la dépendance au modèle.

Reconnaître un modèle non linéaire.

1. Vérifie l'espacement des abscisses et observe la forme générale du nuage.
2. Calcule différences et, pour des valeurs non nulles adaptées au modèle, rapports successifs.
3. Propose une famille cohérente avec ces observations et le contexte.
4. Teste la formule sur tous les points puis examine les résidus.
5. Présente les valeurs futures comme conditionnelles au maintien de la règle.

Comparer deux modèles sur les mêmes données.

1. Utilise les mêmes données et reconstruis toutes les prévisions dans la même unité.
2. Calcule les résidus observation moins prévision.
3. Applique le même critère à chaque modèle : valeurs absolues ou carrés, selon la question.
4. Compare les totaux et examine quelles observations contribuent le plus à l'erreur.
5. Complète la conclusion par les limites du domaine, du modèle et du contrôle prédictif.

Rédiger une conclusion fondée sur des données.

1. Rappelle la question et la population concernée.
2. Présente le résultat avec son unité et un arrondi adapté.
3. Indique s'il s'agit d'une observation ou d'une prévision dépendant d'hypothèses.
4. Compare le résultat au seuil ou à la contrainte de décision.
5. Signale précisément le biais ou l'information manquante qui limite la conclusion.

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Les écarts sont mesurés verticalement entre observation et prévision.

Indice 2 — Un pas de plus.

On les élève au carré pour éviter les compensations entre signes.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Compare l'abscisse demandée avec les bornes des données disponibles.

Indice 2 — Un pas de plus.

À l'extérieur, on prolonge la tendance au-delà des observations.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Une multiplication répétée par le même facteur conduit à une puissance.

Indice 2 — Un pas de plus.

Après n pas, le facteur cumulé est $1,2^n$.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Élève chacun des deux résidus au carré avant de les additionner.

Indice 2 — Un pas de plus.

Le carré d'un nombre négatif est positif.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve**Indice 1 — Une piste.**

La taille agit sur la quantité d'information, mais le biais vient du mode de sélection.

Indice 2 — Un pas de plus.

Un groupe exclu reste exclu même si les autres répondants sont très nombreux.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche**Indice 1 — Une piste.**

Repère les données utiles et l'inconnue. Reviens à la méthode correspondante dans la boîte à outils.

Indice 2 — Un pas de plus.

Contrôle les unités, les bornes et la plausibilité du résultat avant de lire la correction.

[Revenir à la recherche, p. 24](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Les moindres carrés minimisent la somme des carrés des résidus verticaux.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Il s'agit d'une extrapolation, dont la validité dépend de la poursuite du modèle hors de la zone observée.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Ces données suggèrent un modèle exponentiel de la forme $A \times 1,2^x$ pour des pas unitaires en x .

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

$2^2 + (-2)^2 = 4 + 4 = 8$, et non zéro.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Faux : une grande enquête biaisée n'est pas forcément représentative.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche

Comprendre la question. Les trois observations sont positives et données à des rangs consécutifs.

Construire la réponse.

1. Les rapports sont $18/12 = 1,5$ et $27/18 = 1,5$, tandis que les différences 6 et 9 ne sont pas constantes.
2. Le modèle proposé est donc $y = 12 \times 1,5^x$, qui redonne 12 au rang zéro.
3. Au rang 3, il prévoit $12 \times 1,5^3 = 12 \times 3,375 = 40,5$.

Vérifier. On peut également prolonger une fois la dernière valeur : $27 \times 1,5 = 40,5$.

Conclure. La prévision est 40,5 au rang 3 ; c'est une extrapolation à contrôler par une nouvelle observation.

[Revenir à la recherche, p. 24](#)