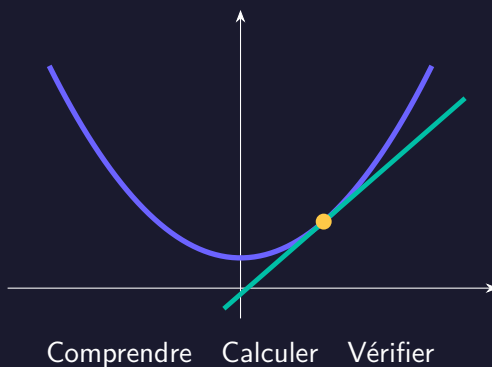


FICHE 04

Fonctions polynômes de degré trois

Analyse ■ Comprendre et s'entraîner



Terminale professionnelle
Année scolaire 2026–2027

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	Pourquoi ce chapitre ?	3
2	L'idée avant la formule	3
3	Le cours formel	3
3.1	La fonction cube et ses transformations	3
3.2	Dériver les polynômes de degré au plus trois	4
3.3	Zéros et formes factorisées d'un polynôme cubique	6
3.4	Étudier les variations d'une fonction cubique	7
3.5	Optimiser un modèle cubique	8
4	Boîte à outils	9
5	Exercices progressifs	11
6	Problème — Pour aller plus loin	13
7	Indices des exercices	14
8	Corrigés détaillés	16
9	Corrigé du problème	21
10	Variante autonome et bilan	22
11	Fiche-mémoire	22
12	Indices des pauses et des preuves	23
13	Explications des pauses et des preuves	25

1 Pourquoi ce chapitre ?

Une fonction cubique peut changer plusieurs fois de sens de variation. La dérivée quadratique et les valeurs aux bornes permettent de choisir le meilleur réglage. **Ton parcours.** Module du programme professionnel pour les groupements A, B, C. Les automatismes, le raisonnement et les outils numériques se travaillent tout au long du parcours.

- La fonction cube et ses transformations.
- Dériver les polynômes de degré au plus trois.
- Zéros et formes factorisées d'un polynôme cubique.
- Étudier les variations d'une fonction cubique.
- Optimiser un modèle cubique.

2 L'idée avant la formule

Un point où la dérivée est nulle est seulement un candidat. Le signe de part et d'autre et le domaine déterminent s'il s'agit d'un maximum, d'un minimum ou d'aucun des deux.

3 Le cours formel

3.1 La fonction cube et ses transformations

Intuition | Construire la notion pas à pas

Multiplier trois fois le même nombre. Le cube x^3 désigne $x \times x \times x$. Pour un nombre négatif, les deux premiers facteurs donnent un produit positif, puis le troisième rend le résultat négatif. Le cube conserve donc le signe de x , contrairement au carré.

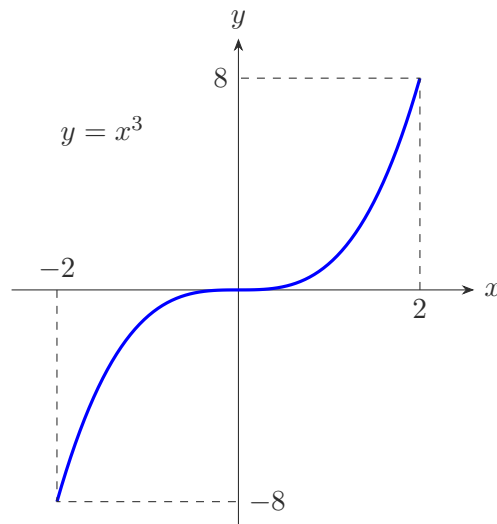
Une fonction qui traverse toutes les valeurs. La fonction cube est strictement croissante sur les réels. Chaque réel possède un unique antécédent, appelé racine cubique. Ainsi $x^3 = 8$ a une seule solution réelle, 2 ; on n'ajoute pas -2, dont le cube vaut -8.

Comprendre la tangente en zéro. Sa dérivée est $3x^2$, positive en dehors de zéro et nulle en zéro. Le signe ne change pas : la fonction continue de croître en traversant l'origine. La tangente y est horizontale, mais la courbe a des valeurs plus petites à gauche et plus grandes à droite.

Résoudre une expression transformée. Dans $ax^3 + b = c$ avec $a \neq 0$, commence par isoler le cube en soustrayant b et divisant par a . Cherche ensuite la racine cubique. Une vérification dans l'équation initiale contrôle les opérations inverses.

Définition | Comprendre la notion

La fonction cube est $f(x) = x^3$, définie sur $\mathbb{R}$. Elle est impaire, strictement croissante, et son signe est celui de x . Sa courbe passe par l'origine et admet une tangente horizontale en ce point. Son taux de variation local est donné par $f'(x) = 3x^2$. Cette dérivée ne change pas de signe au passage par zéro : il n'y a donc pas d'extremum en zéro. Tout réel y possède un unique antécédent par la fonction cube, appelé racine cubique. Contrairement à un carré, un cube peut être négatif. Un facteur devant le cube ou un décalage modifie la courbe et doit être pris en compte.



💡 Exemple | Exemple commenté

Pour $x^3 = -27$, on reconnaît $(-3)^3 = -27$: l'unique solution est -3. Il faut conserver le signe négatif, possible pour une puissance impaire.

Pour calculer l'image de -2 par $g(x) = 2x^3 + 1$, on effectue d'abord le cube : $(-2)^3 = -8$. On multiplie ensuite par 2, puis on ajoute 1 : $g(-2) = -16 + 1 = -15$.

Calculer $(2 \times (-2) + 1)^3$ donnerait une autre expression. Les parenthèses et l'ordre des opérations précisent ce qui est élevé au cube : ici seulement x .

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

La règle « deux racines opposées » concerne certaines équations avec un carré. Un cube égal à un réel possède toujours une seule solution réelle.

À toi d'essayer : Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

$$(-4)^3 =$$

1. -12
2. 64
3. -64

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.2 Dériver les polynômes de degré au plus trois

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Dériver une expression, puis calculer une pente. La fonction dérivée donne une formule valable pour toutes les abscisses autorisées. On remplace x par une valeur seulement après avoir établi cette formule. Substituer d'abord transformerait la fonction en une constante et ferait perdre l'information de variation.

Traiter les termes séparément. Les règles de dérivation s'appliquent à une somme terme par terme. Le coefficient d'un terme est conservé et multiplie la dérivée de sa puissance. Ainsi $5x^2$ donne $5 \times 2x = 10x$.

Le terme bx donne b , puisque la pente d'une droite $y = bx$ est constante. Un terme constant c donne zéro : déplacer toute une courbe verticalement ne modifie pas ses pentes. Les signes moins doivent être intégrés aux coefficients.

Manipuler un paramètre. Une lettre comme a peut désigner un nombre fixe alors que x est la variable. On dérive par rapport à x en conservant a . Une condition sur la pente, telle que $f'(1) = 11$, devient ensuite une équation pour déterminer a .

Un polynôme et sa dérivée sont définis sur tous les réels. La valeur $f(a)$ décrit une hauteur, tandis que $f'(a)$ décrit une pente : elles ne sont pas interchangeables.

Définition | Comprendre la notion

$(c)' = 0$, $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$. La dérivée d'une somme est la somme des dérivées, et $(kf)' = kf'$ pour une constante k . Un terme constant disparaît parce que sa valeur ne varie pas. Applique la règle à chaque terme en gardant les signes. Une fois la fonction dérivée calculée, on peut évaluer sa valeur en un point. Ne remplace pas x trop tôt : dériver une valeur numérique donnerait zéro et perdrait la variation.

Exemple | Exemple commenté

Pour $f(x) = x^3 - 4x + 7$, la dérivée du cube est $3x^2$, celle de $-4x$ est -4 et celle de 7 est 0 . Donc $f'(x) = 3x^2 - 4$.

La pente en 2 vaut $3 \times 2^2 - 4 = 12 - 4 = 8$. Il faut calculer le carré avant la multiplication : 3×2^2 vaut 12 , pas 36 . La hauteur est $f(2) = 8 - 8 + 7 = 7$.

Si l'on souhaite une tangente, on utilisera les deux résultats : $y = 8(x - 2) + 7$. L'exemple montre pourquoi la dérivation et l'évaluation de la fonction sont deux calculs complémentaires.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Dans $-3x^2$, le signe moins et le coefficient 3 restent devant le carré. La valeur en 2 est -12 , et non le carré de -6 .

À toi d'essayer : Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

La dérivée de $3x^2$ est...

1. $6x^2$
2. $6x$
3. $3x$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.3 Zéros et formes factorisées d'un polynôme cubique**🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas**

Chercher où la courbe coupe ou touche l'axe. Une racine d'un polynôme est un nombre qui annule sa valeur. Graphiquement, c'est l'abscisse d'un point de la courbe situé sur l'axe horizontal. Ce n'est pas un point où la dérivée s'annule.

Choisir la forme utile. Une expression factorisée permet la règle du produit nul : au moins un facteur doit être nul. Une expression développée peut parfois se factoriser par un facteur commun ou une identité remarquable. Tester une valeur proposée confirme une racine, sans prouver qu'elle est la seule.

Compter les racines distinctes. Un polynôme de degré trois peut avoir une, deux ou trois racines réelles distinctes. Dans $(x - 1)^2(x + 3)$, le facteur carré répète la racine 1, mais ne crée pas une nouvelle valeur distincte.

Interpréter une racine répétée. Un facteur carré reste positif de part et d'autre de son zéro. Si les autres facteurs gardent leur signe, la fonction touche l'axe sans le traverser à cet endroit. Une simple recherche de changements de signe peut donc manquer cette racine.

📖 Définition | Comprendre la notion

Un polynôme de degré trois s'écrit $ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a \neq 0$. Ses zéros se recherchent par lecture graphique, factorisation disponible, test d'une valeur proposée ou outil numérique. S'il est donné sous forme de produit, un zéro annule au moins un facteur. Tester une racine consiste à remplacer x et vérifier que le résultat est zéro. Une courbe cubique peut avoir un, deux ou trois zéros réels distincts ; une racine peut être répétée. Il n'est pas nécessaire de mémoriser une formule générale de résolution du troisième degré. Un balayage ou solveur doit être contrôlé et ne pas masquer une autre racine.

💡 Exemple | Exemple commenté

Pour $f(x) = x(x - 1)(x + 2)$, le produit s'annule si x , $x - 1$ ou $x + 2$ est nul. Les solutions sont donc 0, 1 et -2.

Le développement donne $(x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$, puis $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$. Cette seconde forme permet de calculer une image, mais rend les racines moins visibles.

Vérifions par exemple -2 : $(-2)^3 + (-2)^2 - 2(-2) = -8 + 4 + 4 = 0$. La vérification confirme cette racine ; c'est la factorisation complète qui justifie que les trois valeurs listées couvrent toutes les possibilités.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Une courbe qui ne traverse pas l'axe peut néanmoins s'y annuler. Une racine double peut être invisible dans une recherche fondée uniquement sur les changements de signe.

À toi d'essayer : Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Un polynôme cubique peut avoir trois racines réelles distinctes. . .

1. Non
2. Seulement s'il est nul partout
3. Oui

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.4 Étudier les variations d'une fonction cubique**🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas**

Étudier un cubique grâce à un second degré. La dérivée d'un polynôme de degré trois est de degré deux. La difficulté se déplace donc vers le signe de ce second degré. Une forme factorisée rend cette étude particulièrement lisible.

Séparer les deux fonctions. Les zéros de la dérivée indiquent les points où la pente de la courbe initiale est nulle. Pour connaître la hauteur de ces points, il faut revenir à la fonction initiale. Remplacer ces hauteurs par zéro confondrait les deux fonctions.

Construire le tableau. Place les bornes et les zéros de la dérivée dans l'ordre. Détermine le signe de chaque facteur sur les intervalles obtenus, puis celui du produit. Traduis chaque signe positif en croissance et chaque signe négatif en décroissance.

Reconnaître local et global. Un maximum local dépasse les valeurs voisines, mais une borne éloignée peut avoir une valeur plus grande ou égale. Sur un intervalle fermé, calcule et compare les images de tous les points critiques autorisés et des deux bornes. Un même extremum global peut être atteint en plusieurs endroits.

📖 Définition | Comprendre la notion

La dérivée d'un polynôme de degré trois est un polynôme de degré deux. Après dérivation, cherche ses racines avec la forme disponible ou un outil numérique, puis étudie son signe. Une forme factorisée de la dérivée permet un tableau de signes ; ce tableau donne les variations de la fonction initiale. Calcule les images des points critiques et des bornes du domaine. Les zéros de f ne sont pas les zéros de sa dérivée. Un cubique peut avoir deux extrema locaux, ou rester croissant sur tout l'intervalle étudié. La conclusion doit correspondre au domaine professionnel ou technique imposé.

💡 Exemple | Exemple commenté

Pour $f(x) = x^3 - 3x$ sur $[-2; 2]$, la dérivée vaut $3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$. Avant -1, les deux facteurs variables sont négatifs : le produit est positif. Entre -1 et 1, leurs signes sont contraires ; après 1, ils sont positifs.

La fonction croît, décroît puis croît. Les hauteurs sont $f(-2) = -2$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$ et $f(2) = 2$.

Le maximum local en -1 vaut 2, valeur également atteinte à la borne 2. Le minimum local en 1 vaut -2, aussi atteint à la borne -2. Comparer les bornes évite de perdre ces autres points où les extrema globaux sont atteints.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Les abscisses où $f' = 0$ ne donnent pas les valeurs extrêmes. Il faut encore calculer f à ces abscisses et comparer avec les bornes.

À toi d'essayer : Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

La dérivée d'un polynôme de degré trois est de degré...

1. Quatre
2. Deux
3. Trois

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.5 Optimiser un modèle cubique

Intuition | Construire la notion pas à pas

Un modèle cubique peut changer deux fois de sens. Une grandeur représentée par un polynôme de degré trois possède une dérivée de degré deux. Celle-ci peut avoir deux zéros : il faut donc examiner tous ceux qui appartiennent au domaine.

Lire les signes d'un produit. Après factorisation, détermine le signe de chaque facteur sur les intervalles délimités par les zéros. Le signe du coefficient placé devant le produit compte aussi. Une dérivée telle que $-3x(x - 4)$ est positive entre 0 et 4, car elle multiplie deux facteurs négatifs et un positif.

Comparer les candidats. Les changements de signe donnent les extrema locaux. Les valeurs aux bornes permettent de trancher pour l'ensemble du domaine. Une valeur critique située en dehors de la plage étudiée doit être écartée.

Respecter le modèle. Un bénéfice ou un volume n'a de sens que pour les quantités admises. Si une production est entière, compare les entiers voisins des candidats continus. Si la plage autorisée change, reprends les variations sur cette nouvelle plage : le meilleur choix peut devenir une borne.

Définition | Comprendre la notion

Un coût ou un volume peut être modélisé par un polynôme cubique. L'optimisation suit la même méthode : domaine, dérivée, signes, valeurs candidates, interprétation. La dérivée quadratique peut avoir deux racines ; toutes celles qui appartiennent au domaine doivent être examinées. Si les racines sont données numériquement, conserve assez de précision pour comparer les valeurs. Pour une production entière, teste les entiers proches de chaque candidat continu et les bornes. Le modèle

reste conditionnel à ses hypothèses ; une extrapolation hors de la plage de production ne constitue pas une prévision fiable.

Exemple | Exemple commenté

Pour $B(x) = -x^3 + 6x^2$ sur $[0; 6]$, la dérivée est $-3x^2 + 12x = -3x(x - 4)$. Entre 0 et 4, x est positif et $x - 4$ négatif : la dérivée est positive. Après 4, les deux facteurs variables sont positifs et la dérivée devient négative.

B croît jusqu'à 4 puis décroît. Les valeurs candidates sont $B(0) = 0$, $B(4) = -64 + 96 = 32$ et $B(6) = -216 + 216 = 0$.

Le maximum global est donc 32, atteint en 4. La factorisation $B(x) = x^2(6 - x)$ confirme aussi que les valeurs sont positives ou nulles sur le domaine, et nulles aux deux bornes.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Deux zéros de la dérivée ne signifient pas deux maxima. Seul le tableau de signes permet de distinguer minimum, maximum, borne et simple tangente horizontale.

À toi d'essayer : Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Si deux racines de la dérivée appartiennent au domaine, on doit...

1. Garder la plus grande sans calcul
2. Garder seulement la première
3. Examiner les deux et les bornes

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 25](#)

4 Boîte à outils

Méthode | La fonction cube et ses transformations

1. Identifie exactement la quantité élevée au cube.
2. Conserve le signe pour une puissance impaire.
3. Dans une équation, isole x^3 avant de chercher x .
4. Utilise la stricte croissance pour justifier l'unicité.
5. Vérifie la solution dans l'expression initiale.

Méthode | Dériver les polynômes de degré au plus trois

1. Repère la variable de dérivation et les coefficients constants.
2. Dérive chaque terme avec son signe.
3. Réunis les termes pour obtenir la fonction dérivée.
4. Remplace ensuite la variable par l'abscisse demandée.

5. Pour un paramètre, traduit la pente imposée en équation et vérifie la valeur trouvée.

Méthode | Zéros et formes factorisées d'un polynôme cubique

1. Écris l'équation $f(x) = 0$.
2. Cherche une factorisation ou utilise celle qui est donnée.
3. Annule chaque facteur et résous les équations simples.
4. Compte les valeurs distinctes, même si un facteur est répété.
5. Vérifie les solutions et distingue annulation et changement de signe.

Méthode | Étudier les variations d'une fonction cubique

1. Dérive la fonction et factorise sa dérivée si possible.
2. Ordonne les zéros de la dérivée dans le domaine.
3. Construis les signes des facteurs puis du produit.
4. Traduis ces signes en variations de la fonction initiale.
5. Calcule les images des bornes et points critiques pour conclure sur les extrema.

Méthode | Optimiser un modèle cubique

1. Précise le domaine du modèle.
2. Dérive, factorise puis trouve tous les zéros de la dérivée.
3. Étudie le signe de chaque facteur, coefficient compris.
4. Calcule les valeurs aux candidats autorisés et aux bornes.
5. Compare et interprète la meilleure valeur réalisable.

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases ; 6 à 10 demandent plusieurs étapes ; 11 à 15 t'invitent à choisir, justifier et contrôler. Cherche avant de consulter les indices.

Exercice 1 — Un cube négatif ★☆☆

Calcule $(-2)^3$ et $(-3)^3$.

Exercice 2 — Dériver terme à terme ★☆☆

Dérive $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 4$.

Exercice 3 — Trois facteurs ★☆☆

Résous $(x - 2)(x + 1)(x - 4) = 0$.

Exercice 4 — Une dérivée quadratique ★☆☆

Calcule la dérivée de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

Exercice 5 — Un point critique ★☆☆

Pour $V(x) = -x^3 + 9x^2$ sur $[0; 9]$, trouve les zéros de la dérivée.

Exercice 6 — Une équation cubique simple ★★☆☆

Résous $2x^3 + 5 = 21$.

Exercice 7 — Une pente en un point ★★☆☆

Pour $g(x) = -x^3 + 6x$, calcule la dérivée puis sa valeur en 2.

Exercice 8 — Tester une racine ★★☆☆

Pour $f(x) = x^3 - 4x$, vérifie que 2 est une racine puis trouve toutes les racines.

Exercice 9 — Les variations associées ★★☆☆

On donne $f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$. Décris les variations de f sur $[0; 4]$.

Exercice 10 — Le volume maximal ★★☆☆

Poursuis l'étude de $V(x) = -x^3 + 9x^2$ sur $[0; 9]$.

Exercice 11 — Une dérivée nulle ★★★

Pourquoi le point d'abscisse zéro de la courbe du cube n'est-il pas un minimum ?

Exercice 12 — Trouver un paramètre ★★★

On a $h(x) = ax^3 + 2x$ et $h'(1) = 14$. Détermine a .

Exercice 13 — Une racine répétée ★★★

Combien de racines réelles distinctes possède $f(x) = (x - 1)^2(x + 3)$? Le signe change-t-il en 1 ?

Exercice 14 — Extrema globaux ★★ ★

Pour $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ sur $[0; 4]$, utilise la dérivée précédente pour déterminer minimum et maximum globaux.

Exercice 15 — Fabrication restreinte ★★ ★

Le même modèle impose finalement $x \in [1; 4]$. Quel est le maximum autorisé ?

6 Problème — Pour aller plus loin

Optimiser un modèle cubique

Un indicateur de performance est $f(x) = -x^3 + 6x^2$ sur $[0;6]$.

1. Factorise f et donne ses zéros dans le domaine.
2. Calcule et factorise f' .
3. Étudie son signe puis les variations de f .
4. Compare les valeurs aux bornes et au point critique pour trouver le maximum.
5. Résous $f(x) \geq 0$ sur le domaine et explique la différence entre signe et croissance.

7 Indices des exercices

Exercice 1

Indice 1. Écris trois facteurs identiques.

Indice 2. Le troisième facteur réintroduit un signe négatif.

Exercice 2

Indice 1. Applique une règle distincte à chaque terme.

Indice 2. La dérivée d'une constante est nulle.

Exercice 3

Indice 1. Applique la règle du produit nul.

Indice 2. Résous séparément chaque équation linéaire.

Exercice 4

Indice 1. Dérive chaque terme.

Indice 2. Le trinôme a pour racines 1 et 3.

Exercice 5

Indice 1. Dérive puis mets x en facteur.

Indice 2. Applique le produit nul.

Exercice 6

Indice 1. Isole le cube.

Indice 2. La fonction cube est strictement croissante.

Exercice 7

Indice 1. Calcule d'abord la fonction dérivée.

Indice 2. Remplace ensuite x par l'abscisse demandée.

Exercice 8

Indice 1. Le facteur x est commun.

Indice 2. Utilise la différence de deux carrés.

Exercice 9

Indice 1. Étudie le signe d'un produit de deux facteurs.

Indice 2. Le signe est négatif entre les deux racines.

Exercice 10

Indice 1. Utilise le signe des trois facteurs.

Indice 2. Calcule aussi les valeurs aux deux bornes.

Exercice 11

Indice 1. Compare les signes des images de part et d'autre.

Indice 2. Une pente nulle ne suffit pas à définir un extremum.

Exercice 12

Indice 1. Traite a comme une constante pendant la dérivation.

Indice 2. La condition sur la pente devient une équation en a .

Exercice 13

Indice 1. Un carré s'annule sans forcément changer de signe.

Indice 2. Observe aussi le signe de l'autre facteur près de 1.

Exercice 14

Indice 1. Évalue la fonction aux points critiques et aux bornes.

Indice 2. Compare les quatre résultats, pas seulement ceux des extrema locaux.

Exercice 15

Indice 1. Réexamine le domaine avant de réutiliser le maximum précédent.

Indice 2. Tout l'intervalle autorisé est avant 6.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Une puissance trois correspond à un produit de trois facteurs identiques.

Construire la réponse.

1. $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = 4(-2) = -8$.
2. $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = 9(-3) = -27$.

Vérifier. Les deux cubes sont négatifs, comme leurs bases, puisque l'exposant est impair.

Conclure. $(-2)^3 = -8$ et $(-3)^3 = -27$.

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les quatre termes utilisent les règles du cube, du carré, de la fonction affine et de la constante.

Construire la réponse.

1. $2x^3$ donne $2 \times 3x^2 = 6x^2$.
2. $5x^2$ donne $10x$; $-3x$ donne -3 ; 4 donne zéro.
3. On réunit les résultats : $f'(x) = 6x^2 + 10x - 3$.

Vérifier. Le degré maximal a diminué de 3 à 2 et le signe du coefficient -3 est conservé.

Conclure. $f'(x) = 6x^2 + 10x - 3$ sur les réels.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le membre de gauche est déjà factorisé.

Construire la réponse.

1. $x - 2 = 0$ donne $x = 2$.
2. $x + 1 = 0$ donne $x = -1$.
3. $x - 4 = 0$ donne $x = 4$.
4. La règle du produit nul garantit qu'il n'y a pas d'autre solution.

Vérifier. Chacune des trois valeurs annule l'un des facteurs, donc tout le produit.

Conclure. L'ensemble des solutions est $\{-1; 2; 4\}$.

Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On cherche une dérivée sous une forme adaptée à l'étude de son signe.

Construire la réponse.

1. Les dérivées de x^3 , $-6x^2$, $9x$ et 2 sont $3x^2$, $-12x$, 9 et 0.
2. On obtient $3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$.

3. Comme $(x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$, la dérivée vaut $3(x-1)(x-3)$.

Vérifier. Le développement redonne $3x^2 - 12x + 9$.

Conclure. $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$.

Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les points critiques s'obtiennent en annulant la dérivée.

Construire la réponse.

1. $V'(x) = -3x^2 + 18x$.
2. On met $-3x$ en facteur : $V'(x) = -3x(x-6)$.
3. Le produit est nul pour $x = 0$ ou $x = 6$.

Vérifier. En développant $-3x(x-6)$, on retrouve $-3x^2 + 18x$. Les deux zéros sont dans $[0; 9]$.

Conclure. La dérivée s'annule en 0 et en 6.

Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On doit isoler le cube avant de chercher son antécédent.

Construire la réponse.

1. En soustrayant 5 des deux côtés, $2x^3 = 16$.
2. En divisant par 2, $x^3 = 8$.
3. Comme $2^3 = 8$ et que la fonction cube est strictement croissante, $x = 2$ est l'unique solution.

Vérifier. Dans l'équation initiale, $2 \times 2^3 + 5 = 16 + 5 = 21$.

Conclure. L'unique solution réelle est $x = 2$.

Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On cherche la fonction dérivée, puis une valeur de cette fonction.

Construire la réponse.

1. La dérivée de $-x^3$ est $-3x^2$ et celle de $6x$ est 6.
2. On obtient $g'(x) = -3x^2 + 6$.
3. En 2, $g'(2) = -3 \times 4 + 6 = -6$.

Vérifier. La dérivée négative donne une pente descendante en 2. L'image $g(2) = -8 + 12 = 4$ est une autre grandeur.

Conclure. $g'(x) = -3x^2 + 6$ et la pente en 2 vaut -6.

Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le test demandé doit être suivi d'une recherche de toutes les racines.

Construire la réponse.

1. $f(2) = 2^3 - 4 \times 2 = 8 - 8 = 0$: 2 est une racine.
2. On met x en facteur : $f(x) = x(x^2 - 4)$.
3. La différence de carrés donne $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.
4. Le produit nul donne $x = 0$, $x = 2$ ou $x = -2$.

Vérifier. Les trois substitutions annulent la fonction. Trouver seulement 2 aurait omis deux solutions.

Conclure. Les racines réelles sont -2, 0 et 2.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La dérivée est donnée : il reste à étudier le signe de ses facteurs.

Construire la réponse.

1. Sur $[0; 1[$, les deux facteurs variables sont négatifs : le produit est positif.
2. Sur $]1; 3[$, ils ont des signes contraires : le produit est négatif.
3. Sur $]3; 4]$, ils sont tous deux positifs : le produit est positif.
4. Le coefficient 3 ne change aucun de ces signes.

Vérifier. Le signe passe de positif à négatif en 1, puis de négatif à positif en 3.

Conclure. f croît sur $[0; 1]$, décroît sur $[1; 3]$, puis croît sur $[3; 4]$. Elle a un maximum local en 1 et un minimum local en 3.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les zéros de la dérivée doivent être complétés par une étude de signes et de valeurs.

Construire la réponse.

1. Pour $0 < x < 6$, les signes de -3 , x et $x - 6$ donnent un produit positif.
2. Pour $6 < x \leq 9$, ils donnent un produit négatif. V croît donc jusqu'à 6 puis décroît.
3. $V(0) = 0$, $V(6) = -216 + 324 = 108$ et $V(9) = -729 + 729 = 0$.

Vérifier. La plus grande des valeurs candidates est 108 ; le changement de signe positif puis négatif confirme le maximum en 6.

Conclure. Le maximum de V sur $[0; 9]$ est 108, atteint pour $x = 6$.

Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Une dérivée nulle ne suffit pas à établir un minimum.

Construire la réponse.

1. $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$, donc la tangente est horizontale.
2. Pour tout petit $h > 0$, $f(-h) = -h^3 < 0$ et $f(h) = h^3 > 0$.
3. Il existe donc des valeurs inférieures et supérieures à $f(0)$ aussi près de zéro que l'on veut.

Vérifier. La dérivée $3x^2$ reste positive de part et d'autre : aucun changement de sens ne se produit.

Conclure. Le point d'abscisse zéro n'est ni un minimum ni un maximum.

Corrigé 12

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le coefficient a reste constant pendant la dérivation.

Construire la réponse.

1. $h'(x) = 3ax^2 + 2$.
2. La condition en 1 donne $3a \times 1^2 + 2 = 14$.
3. On soustrait 2 puis divise par 3 : $3a = 12$, donc $a = 4$.

Vérifier. Avec cette valeur, $h'(1) = 12 \times 1^2 + 2 = 14$, comme demandé.

Conclure. Le coefficient recherché est $a = 4$.

Corrigé 13

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On distingue le nombre de facteurs et le nombre de valeurs qui annulent la fonction.

Construire la réponse.

1. $(x - 1)^2 = 0$ donne seulement $x = 1$; $x + 3 = 0$ donne $x = -3$.
2. La racine 1 est répétée deux fois, mais constitue une seule valeur.
3. Près de 1, $(x - 1)^2$ est positif de chaque côté et $x + 3$ reste positif. Le produit garde donc le même signe.

Vérifier. Par exemple les valeurs en 0,9 et 1,1 sont toutes deux positives, alors que la valeur en 1 est nulle.

Conclure. Il y a deux racines distinctes, -3 et 1 ; le signe ne change pas en 1.

Corrigé 14

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les extrema globaux demandent de comparer les points critiques avec les bornes.

Construire la réponse.

1. Les candidats sont $x = 0, 1, 3$ et 4.

2. $f(0) = 2$ et $f(1) = 1 - 6 + 9 + 2 = 6$.
3. $f(3) = 27 - 54 + 27 + 2 = 2$ et $f(4) = 64 - 96 + 36 + 2 = 6$.
4. Les variations précédentes garantissent qu'aucune autre valeur ne sort de l'intervalle $[2; 6]$.

Vérifier. Les valeurs aux bornes coïncident ici avec celles des extrema locaux : il faut conserver tous les points où elles sont atteintes.

Conclure. Le minimum global est 2, atteint en 0 et 3. Le maximum global est 6, atteint en 1 et 4.

Corrigé 15

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le choix doit maintenant appartenir à $[1; 4]$.

Construire la réponse.

1. Le point critique 6 n'est plus autorisé.
2. Sur $[1; 4]$, x est positif et $x - 6$ négatif ; $-3x(x - 6)$ est donc positif.
3. V croît sur tout le nouvel intervalle. Son maximum est $V(4) = -64 + 144 = 80$.

Vérifier. La borne gauche donne $V(1) = -1 + 9 = 8$, inférieur à 80. La valeur 108 est inaccessible sous cette contrainte.

Conclure. Le maximum autorisé est 80, obtenu pour $x = 4$.

9 Corrigé du problème

1. **Comprendre la question.** Une factorisation permet de lire les zéros et le signe de la fonction.

Construire la réponse.

(a) Les deux termes contiennent x^2 : $f(x) = x^2(-x + 6) = x^2(6 - x)$.

(b) Le produit est nul lorsque $x^2 = 0$ ou $6 - x = 0$, donc pour x égal à 0 ou 6.

Vérifier. Les deux racines appartiennent au domaine $[0;6]$. Le facteur carré répète la racine zéro sans créer une autre valeur distincte.

Conclure. $f(x) = x^2(6 - x)$ et les zéros sont 0 et 6.

2. **Comprendre la question.** On dérive terme par terme puis on met un facteur commun en évidence.

Construire la réponse.

(a) La dérivée de $-x^3$ vaut $-3x^2$ et celle de $6x^2$ vaut $12x$.

(b) $f'(x) = -3x^2 + 12x = 3x(4 - x)$.

Vérifier. En développant la forme factorisée, on retrouve $12x$ moins trois x au carré.

Conclure. $f'(x) = 3x(4 - x)$.

3. **Comprendre la question.** Sur le domaine, le facteur x est positif sauf à la borne zéro.

Construire la réponse.

(a) Pour $0 < x < 4$, les facteurs 3, x et $4 - x$ sont positifs : la dérivée est positive.

(b) En 4, la dérivée est nulle. Pour $4 < x \leq 6$, le dernier facteur devient négatif et la dérivée négative.

(c) La fonction croît donc de 0 à 4, puis décroît de 4 à 6.

Vérifier. Le changement de signe positif puis négatif en 4 annonce un maximum.

Conclure. f est croissante sur $[0;4]$ et décroissante sur $[4;6]$.

4. **Comprendre la question.** Un maximum global se détermine en comparant les candidats et les bornes.

Construire la réponse.

(a) $f(0) = 0$.

(b) $f(4) = -64 + 96 = 32$.

(c) $f(6) = -216 + 216 = 0$.

Vérifier. Les variations démontrent que toute autre valeur du domaine est au plus égale à celle de 4.

Conclure. Le maximum est 32, atteint pour le réglage x égal à 4.

5. **Comprendre la question.** Le signe de la fonction et celui de sa dérivée répondent à deux questions distinctes.

Construire la réponse.

(a) Sur $[0;6]$, $x^2 \geq 0$ et $6 - x \geq 0$, donc $f(x) \geq 0$.

(b) La fonction est strictement positive entre 0 et 6, et nulle aux deux bornes.

(c) Entre 4 et 6, elle décroît tout en restant positive : ses valeurs baissent mais demeurent au-dessus de zéro.

Vérifier. Le signe indique la position par rapport à l'axe ; les variations indiquent le sens de l'évolution lorsque x augmente.

Conclure. Les solutions de $f(x)$ supérieure ou égale à zéro sont tout l'intervalle $[0;6]$.

10 Variante autonome et bilan

Étudie $g(x) = x^3 - 3x^2$ sur $[0;3]$ et trouve le minimum.

À toi d'essayer : Vérifie ta démarche

Résous la variante, puis explique pourquoi ta méthode s'applique.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 25](#)

- Je peux expliquer : la fonction cube et ses transformations.
- Je peux expliquer : dériver les polynômes de degré au plus trois.
- Je peux expliquer : zéros et formes factorisées d'un polynôme cubique.
- Je peux expliquer : étudier les variations d'une fonction cubique.
- Je peux expliquer : optimiser un modèle cubique.

11 Fiche-mémoire

La fonction cube et ses transformations.

1. Identifie exactement la quantité élevée au cube.
2. Conserve le signe pour une puissance impaire.
3. Dans une équation, isole x^3 avant de chercher x .
4. Utilise la stricte croissance pour justifier l'unicité.
5. Vérifie la solution dans l'expression initiale.

Dériver les polynômes de degré au plus trois.

1. Repère la variable de dérivation et les coefficients constants.
2. Dérive chaque terme avec son signe.
3. Réunis les termes pour obtenir la fonction dérivée.
4. Remplace ensuite la variable par l'abscisse demandée.
5. Pour un paramètre, traduit la pente imposée en équation et vérifie la valeur trouvée.

Zéros et formes factorisées d'un polynôme cubique.

1. Écris l'équation $f(x) = 0$.
2. Cherche une factorisation ou utilise celle qui est donnée.
3. Annule chaque facteur et résous les équations simples.
4. Compte les valeurs distinctes, même si un facteur est répété.
5. Vérifie les solutions et distingue annulation et changement de signe.

Étudier les variations d'une fonction cubique.

1. Dérive la fonction et factorise sa dérivée si possible.
2. Ordonne les zéros de la dérivée dans le domaine.
3. Construis les signes des facteurs puis du produit.
4. Traduis ces signes en variations de la fonction initiale.
5. Calcule les images des bornes et points critiques pour conclure sur les extrema.

Optimiser un modèle cubique.

1. Précise le domaine du modèle.
2. Dérive, factorise puis trouve tous les zéros de la dérivée.
3. Étudie le signe de chaque facteur, coefficient compris.
4. Calcule les valeurs aux candidats autorisés et aux bornes.
5. Compare et interprète la meilleure valeur réalisable.

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Écris la puissance comme le produit de trois facteurs égaux à -4.

Indice 2 — Un pas de plus.

Les deux premiers facteurs négatifs donnent un produit positif; le troisième change à nouveau son signe.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Le coefficient 3 reste devant lorsque tu dérites.

Indice 2 — Un pas de plus.

La dérivée du carré est $2x$; multiplie-la par le coefficient initial.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Un exemple suffit à montrer que trois racines distinctes sont possibles.

Indice 2 — Un pas de plus.

Considère le produit $x(x-1)(x+1)$.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Observe le terme de plus haut degré, ax^3 avec a non nul.

Indice 2 — Un pas de plus.

Sa dérivée est $3ax^2$; les autres termes donnent des degrés plus petits.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve**Indice 1 — Une piste.**

Un zéro de la dérivée est un candidat, pas une conclusion.

Indice 2 — Un pas de plus.

Le maximum global peut aussi se trouver à une extrémité du domaine.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche**Indice 1 — Une piste.**

Repère les données utiles et l'inconnue. Reviens à la méthode correspondante dans la boîte à outils.

Indice 2 — Un pas de plus.

Contrôle les unités, les bornes et la plausibilité du résultat avant de lire la correction.

[Revenir à la recherche, p. 22](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

$(-4)^3 = (-4)(-4)(-4) = 16(-4) = -64$. Une puissance impaire conserve le signe négatif de la base.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

La dérivée de $3x^2$ est $3 \times 2x = 6x$. L'exposant diminue d'une unité et multiplie le coefficient ; le nombre 3 ne disparaît pas.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Oui : le polynôme $x(x-1)(x+1) = x^3 - x$ possède les trois racines distinctes -1, 0 et 1. Chaque valeur annule un facteur. Tous les polynômes cubiques n'ont toutefois pas trois racines distinctes.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

La dérivée est de degré deux. Le coefficient dominant $3a$ reste non nul puisque a l'est ; aucun autre terme dérivé ne peut annuler ce terme de degré deux.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Il faut examiner les deux racines admissibles et les bornes, étudier les variations puis comparer les images utiles. Garder seulement le premier zéro de la dérivée peut manquer le meilleur résultat.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche

Comprendre la question. On dérive la variante puis on compare les valeurs aux points utiles.

Construire la réponse.

1. $g'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.
2. Sur $]0;2[$, la dérivée est négative ; sur $]2;3]$, elle est positive. g décroît puis croît.
3. $g(0) = 0$, $g(2) = 8 - 12 = -4$ et $g(3) = 27 - 27 = 0$.

Vérifier. La factorisation $g(x) = x^2(x-3)$ confirme que g reste négative ou nulle sur le domaine, sans préjuger de ses variations.

Conclure. Le minimum sur $[0;3]$ est -4, atteint en 2.

[Revenir à la recherche, p. 22](#)