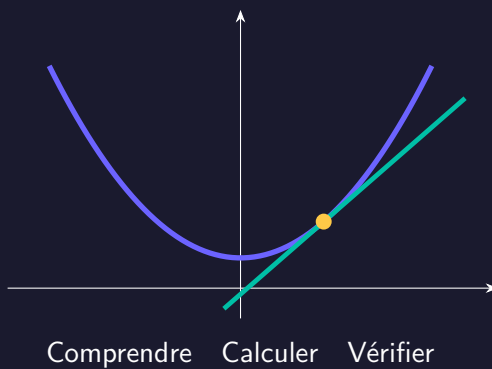


FICHE 05

# Exponentielles et logarithme décimal

Analyse ■ Comprendre et s'entraîner



Terminale professionnelle  
Année scolaire 2026–2027

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

## Table des matières

|           |                                                            |           |
|-----------|------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>  | <b>Pourquoi ce chapitre ?</b>                              | <b>3</b>  |
| <b>2</b>  | <b>L'idée avant la formule</b>                             | <b>3</b>  |
| <b>3</b>  | <b>Le cours formel</b>                                     | <b>3</b>  |
| 3.1       | Prolonger les puissances à des exposants réels . . . . .   | 3         |
| 3.2       | Modéliser une évolution exponentielle . . . . .            | 4         |
| 3.3       | Calculer un taux moyen d'évolution . . . . .               | 5         |
| 3.4       | Le logarithme décimal . . . . .                            | 7         |
| 3.5       | Résoudre un seuil exponentiel avec un logarithme . . . . . | 8         |
| <b>4</b>  | <b>Boîte à outils</b>                                      | <b>9</b>  |
| <b>5</b>  | <b>Exercices progressifs</b>                               | <b>11</b> |
| <b>6</b>  | <b>Problème — Pour aller plus loin</b>                     | <b>13</b> |
| <b>7</b>  | <b>Indices des exercices</b>                               | <b>14</b> |
| <b>8</b>  | <b>Corrigés détaillés</b>                                  | <b>16</b> |
| <b>9</b>  | <b>Corrigé du problème</b>                                 | <b>21</b> |
| <b>10</b> | <b>Variante autonome et bilan</b>                          | <b>22</b> |
| <b>11</b> | <b>Fiche-mémoire</b>                                       | <b>22</b> |
| <b>12</b> | <b>Indices des pauses et des preuves</b>                   | <b>23</b> |
| <b>13</b> | <b>Explications des pauses et des preuves</b>              | <b>25</b> |

# 1 Pourquoi ce chapitre ?

Une évolution proportionnelle répétée donne une exponentielle. Le logarithme retrouve ensuite le temps nécessaire pour atteindre un seuil. **Ton parcours.** Module du programme professionnel pour les groupements A, B, C. Les automatismes, le raisonnement et les outils numériques se travaillent tout au long du parcours.

- Prolonger les puissances à des exposants réels.
- Modéliser une évolution exponentielle.
- Calculer un taux moyen d'évolution.
- Le logarithme décimal.
- Résoudre un seuil exponentiel avec un logarithme.

## 2 L'idée avant la formule

Une même baisse en pourcentage retire une quantité de plus en plus petite lorsque la base diminue. Cela se distingue d'une perte fixe par période.

## 3 Le cours formel

### 3.1 Prolonger les puissances à des exposants réels

#### Intuition | Construire la notion pas à pas

**Prolonger les puissances à des durées non entières.** Une évolution multiplicative peut être observée après une demi-période, pas seulement après 1, 2 ou 3 périodes. Pour une base  $q > 0$ , la puissance  $q^x$  est ainsi définie pour tout réel  $x$  en conservant les règles des puissances.

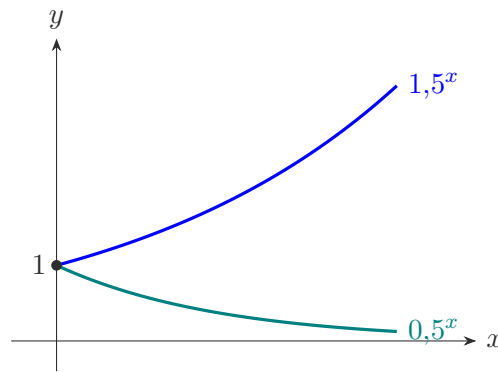
**Comprendre les exposants particuliers.** L'exposant zéro donne 1. Un exposant négatif signifie un inverse :  $q^{-n} = 1/q^n$ , et non un résultat négatif. L'exposant  $1/n$  donne la racine  $n$ -ième positive, car  $(q^{1/n})^n = q$ .

**Manipuler les expressions.** Multiplier deux puissances de même base additionne les exposants ; les diviser les soustrait. Élever une puissance à une autre puissance multiplie les exposants. Ces trois règles correspondent à trois opérations différentes.

**Lire l'évolution.** Si  $q > 1$ , les puissances augmentent avec  $x$ . Si  $0 < q < 1$ , elles diminuent. Elles restent toujours positives. La condition  $q > 0$  évite les difficultés d'une base négative, dont certaines racines ne seraient pas réelles.

#### Définition | Comprendre la notion

Pour une base  $q$  strictement positive, les puissances  $q^x$  sont définies pour tout réel  $x$ . On conserve  $q^{x+y} = q^x q^y$ ,  $q^{-x} = 1/q^x$  et  $(q^x)^y = q^{xy}$ . En particulier,  $q^{1/n}$  est la racine  $n$ -ième positive de  $q$ . Ces règles prolongent les suites géométriques à un temps continu. La fonction  $x \mapsto q^x$  est positive ; elle croît si  $q > 1$ , décroît si  $0 < q < 1$ , et vaut constamment 1 si  $q = 1$ . Une base négative ne permet pas ce prolongement réel pour tout  $x$ .



Même départ, deux rythmes d'évolution

### 💡 Exemple | Exemple commenté

$16^{1/2} = 4$  parce que  $4^2 = 16$ , et  $16^{1/4} = 2$  parce que  $2^4 = 16$ . On retient la racine positive dans cette notation de puissance réelle.

De son côté,  $2^{-3} = 1/2^3 = 1/8$ , un nombre positif plus petit que 1. Le signe moins porte sur l'exposant et inverse la puissance ; il ne change pas le signe de la base.

Pour vérifier les règles,  $16^{1/4} \times 16^{1/4} = 16^{1/2} = 4$  : multiplier deux fois 2 donne bien 4. Cette cohérence permet de répartir un coefficient multiplicateur sur plusieurs fractions de période.

### ⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Un exposant négatif ne rend pas la puissance négative. Avec une base positive, toutes les puissances réelles restent positives.

### À toi d'essayer : Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

$$4^{-1} =$$

1.  $1/4$
2.  $-1/4$
3.  $-4$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

## 3.2 Modéliser une évolution exponentielle

### 🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

**Un même pourcentage à chaque période.** Une évolution exponentielle multiplie la valeur courante par un même coefficient  $q$  à chaque unité de temps. Les augmentations absolues ne sont donc pas constantes : un même pourcentage représente davantage sur une base plus grande.

**Construire le modèle.** Si la valeur initiale est  $A$ , la valeur après  $t$  périodes est  $Aq^t$ . En zéro,  $q^0 = 1$ , ce qui redonne  $A$ . Après une période, on obtient  $Aq$  ; après deux,  $Aq^2$ .

**Traduire les pourcentages.** Une hausse de taux  $r$ , écrit en décimal, donne  $q = 1 + r$ . Une baisse de taux  $r$  donne  $q = 1 - r$ . « Conserver 75 % » signifie multiplier par 0,75, tandis que « perdre 75 % » signifie multiplier par 0,25.

**Fixer l'unité de temps.** Le coefficient  $q$  correspond exactement à l'unité utilisée pour  $t$ . Passer des années aux semestres change l'exposant ou le coefficient : on ne garde pas automatiquement le même  $q$ . Enfin, le modèle est une hypothèse d'évolution constante ; il ne garantit pas que le même taux restera réaliste indéfiniment.

### Définition | Comprendre la notion

Un modèle exponentiel s'écrit  $f(t) = Aq^t$ , avec  $A > 0$  et  $q > 0$ .  $A$  est la valeur à  $t = 0$  ;  $q$  est le coefficient multiplicateur par unité de temps. Un taux constant de  $+r$  donne  $q = 1 + r$  ; une baisse de taux  $r$  donne  $q = 1 - r$ . Une croissance exponentielle correspond à un taux relatif constant, pas à un accroissement absolu constant. Le choix de l'unité de temps est essentiel. Pour deux instants  $a$  et  $b$ ,  $f(b)/f(a) = q^{b-a}$ . Le modèle doit être limité au contexte où son taux reste plausible.

### Exemple | Exemple commenté

Le modèle  $f(t) = 500 \times 1,08^t$ , avec  $t$  en années, décrit une hausse annuelle de 8 %. À l'origine,  $f(0) = 500$ .

Après un an, la population modélisée est 540. La deuxième hausse porte sur 540, donc elle vaut  $0,08 \times 540 = 43,2$ , et non 40 comme la première. On obtient  $f(2) = 583,2$ .

La puissance donne directement le même résultat :  $500 \times 1,08^2 = 500 \times 1,1664 = 583,2$ . Pour une population réelle, on peut annoncer environ 583 individus tout en conservant les valeurs non arrondies dans les calculs intermédiaires.

### Attention | Comprendre une erreur fréquente

Une hausse annuelle de 21 % ne se partage pas en deux hausses semestrielles de 10,5 %. Les coefficients se multiplient : on cherche leur racine, pas la moitié du taux.

### À toi d'essayer : Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Dans  $Aq^t$ ,  $A$  représente...

1. La durée totale
2. La valeur à  $t = 0$
3. Le taux en pourcentage

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 23 [Explication](#), p. 25

## 3.3 Calculer un taux moyen d'évolution

### Intuition | Construire la notion pas à pas

**Remplacer plusieurs évolutions par une évolution constante équivalente.** Le taux moyen recherché doit produire exactement la même valeur finale s'il est répété pendant le même nombre de périodes. On ne cherche pas en général la moyenne arithmétique des pourcentages.

**Commencer par le coefficient global.** Si les valeurs initiale et finale sont connues et positives, le coefficient global est  $C = V_f/V_i$ . Si les taux successifs sont donnés, on multiplie leurs coefficients :  $C = (1 + t_1) \cdots (1 + t_n)$ .

**Partager multiplicativement.** Un coefficient constant  $q$  répété  $n$  fois donne  $q^n = C$ . On prend donc la racine  $n$ -ième positive :  $q = C^{1/n}$ . Le taux vaut ensuite  $q - 1$ , et non  $q$ . Pour l'exprimer en pourcentage, on multiplie par 100.

**Interpréter et contrôler.** Un coefficient global inférieur à 1 doit donner un taux moyen négatif. Indique la période correspondant au taux. Conserve suffisamment de décimales : arrondir  $q$  trop tôt peut modifier la valeur finale reconstituée après de nombreuses périodes.

### Définition | Comprendre la notion

Si le coefficient global sur  $n$  périodes est  $C > 0$ , le coefficient constant équivalent  $q$  vérifie  $q^n = C$ . Donc  $q = C^{1/n}$  et le taux moyen est  $t = C^{1/n} - 1$ . Si les taux successifs sont connus, calcule d'abord  $C = (1 + t_1) \cdots (1 + t_n)$ . Leur moyenne arithmétique n'est généralement pas le taux moyen multiplicatif. La réponse doit préciser la période : annuel, mensuel, ou par étape. Garde les coefficients non arrondis pendant le calcul puis vérifie que leur puissance reconstitue  $C$ .

### Exemple | Exemple commenté

Une valeur passe de 100 à 121 en deux ans. Le coefficient global est  $121/100 = 1,21$ . On cherche  $q$  tel que  $q^2 = 1,21$ , donc  $q = 1,1$ .

Le taux annuel moyen est  $1,1 - 1 = 0,1$ , soit 10 %. En effet, 100 devient 110, puis 121 : les deux hausses portent sur des bases différentes.

Diviser la hausse globale de 21 % par deux donnerait 10,5 %. Mais  $1,105^2 = 1,221025$ , qui conduirait à 122,1025 et ne reproduit pas la valeur finale demandée.

### Attention | Comprendre une erreur fréquente

N'oublie pas de soustraire 1 après la racine. Un coefficient moyen de 1,1 correspond à un taux de 10 %, pas à 110 %.

### À toi d'essayer : Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Le coefficient moyen sur  $n$  périodes est. . .

1.  $C/n$
2.  $C^{1/n}$
3.  $nC$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

## 3.4 Le logarithme décimal

### Intuition | Construire la notion pas à pas

**Retrouver un exposant.** Une puissance répond à la question « que vaut  $10^x$  ? ». Le logarithme décimal répond à la question inverse : « à quelle puissance faut-il élever 10 pour obtenir  $a$  ? ». Cela exige  $a > 0$ , puisque toute puissance de 10 est positive.

Les valeurs repères sont  $\log 1 = 0$ ,  $\log 10 = 1$  et  $\log 100 = 2$ . Un logarithme négatif est possible : il correspond à une puissance négative de 10, donc à un nombre situé entre 0 et 1. Ce n'est pas le logarithme d'un nombre négatif.

**Comprendre les propriétés.** Puisque multiplier des puissances additionne leurs exposants, le logarithme transforme un produit en somme. Il transforme aussi un quotient en différence et une puissance en multiplication :  $\log(a^r) = r \log a$ . Ces règles exigent des arguments strictement positifs.

**Utiliser la croissance.** Le logarithme est strictement croissant. On peut donc appliquer le logarithme aux deux membres positifs d'une égalité ou d'une inégalité. Il permet notamment de faire descendre un exposant inconnu. Aucune propriété ne permet de séparer directement le logarithme d'une somme.

### Définition | Comprendre la notion

Pour  $a > 0$ ,  $\log(a)$  est l'unique réel  $x$  tel que  $10^x = a$ . Ainsi  $\log(1) = 0$ ,  $\log(10) = 1$  et  $\log(10^x) = x$ . Pour  $a, b$  strictement positifs,  $\log(ab) = \log a + \log b$ ,  $\log(a/b) = \log a - \log b$  et  $\log(a^r) = r \log a$ . Il n'existe pas de règle analogue transformant le logarithme d'une somme en somme de logarithmes. Le logarithme décimal est strictement croissant sur  $]0; +\infty[$ . Il est négatif entre 0 et 1, nul en 1, positif au-delà. Son rôle est de retrouver un exposant et de comparer des ordres de grandeur.

### Exemple | Exemple commenté

$\log 1000 = 3$  parce que  $10^3 = 1000$ . Pour 0,01, on cherche  $10^x = 0,01$  : comme  $0,01 = 10^{-2}$ , le logarithme vaut -2.

Pour résoudre  $2^x = 7$ , les deux membres sont positifs. On prend leur logarithme :  $\log(2^x) = \log 7$ . La propriété des puissances donne  $x \log 2 = \log 7$ .

Comme  $\log 2 \neq 0$ , on peut diviser :  $x = \log 7 / \log 2 \approx 2,807$ . Le résultat se situe entre 2 et 3, ce qui est cohérent avec  $2^2 = 4 < 7 < 8 = 2^3$ .

### ⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Il faut distinguer  $\log(a + b)$  et  $\log a + \log b$ . La seconde expression se réunit en  $\log(ab)$ , uniquement lorsque  $a$  et  $b$  sont positifs.

### À toi d'essayer : Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

$$\log(10^4) =$$

1. 10
2. 40
3. 4

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

## 3.5 Résoudre un seuil exponentiel avec un logarithme

### 🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

**Trouver quand une quantité franchit un niveau.** Dans  $Aq^n$ , la variable  $n$  est dans l'exposant. Pour l'isoler, on commence par diviser par la valeur initiale positive  $A$ , puis on utilise le logarithme pour faire descendre l'exposant.

**Le point délicat est le signe de  $\log q$ .** Le logarithme conserve le sens d'une inégalité entre nombres positifs. Ensuite, diviser par  $\log q$  conserve le sens si  $q > 1$ , mais l'inverse si  $0 < q < 1$ , car ce logarithme est alors négatif.

**Passer d'une durée réelle à un rang entier.** Une condition comme  $n > 4,254$  impose d'attendre le rang 5. Si la borne calculée était exactement 4, la distinction entre  $n > 4$  et  $n \geq 4$  deviendrait décisive. Un simple arrondi au plus proche ne convient pas.

**Contrôler le premier rang.** Calcule la valeur au rang proposé et au rang précédent dans la formule initiale. L'une doit satisfaire le seuil et l'autre échouer. Les variations du modèle garantissent alors qu'il s'agit du premier franchissement.

Le cas  $q = 1$  est constant et se traite directement : on ne divise pas par  $\log 1 = 0$ .

### 📖 Définition | Comprendre la notion

Pour  $A > 0$ ,  $q > 0$ ,  $q \neq 1$  et  $B > 0$ , l'équation  $Aq^x = B$  donne  $x = \log(B/A)/\log q$ . Pour une inéquation, le logarithme conserve le sens, mais diviser par  $\log q$  le conserve si  $q > 1$  et l'inverse si  $0 < q < 1$ . Si le temps est compté en périodes entières, choisis ensuite l'entier adapté à l'inégalité stricte ou large. Vérifie cet entier et son voisin précédent dans l'expression initiale, avec une précision suffisante. Un logarithme d'un nombre négatif ou nul n'est jamais une étape autorisée.

### 💡 Exemple | Exemple commenté

Cherchons le premier entier  $n$  tel que  $100 \times 0,8^n < 50$ . On divise par 100 :  $0,8^n < 0,5$ . Les deux membres étant positifs, on prend le logarithme :  $n \log 0,8 < \log 0,5$ .

Comme  $\log 0,8 < 0$ , la division inverse le sens :  $n > \log 0,5 / \log 0,8 \approx 3,106$ . Le premier entier possible est 4.

Vérification : au rang 3, la valeur est 51,2, encore trop grande ; au rang 4, elle vaut 40,96 et passe sous 50. La suite étant décroissante, ce contrôle établit le premier rang recherché.

### ⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Le logarithme ne retourne pas l'inégalité : c'est la division par un logarithme négatif qui la retourne. Distinguer ces deux étapes évite une règle mémorisée à tort.

### À toi d'essayer : Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Pour  $0 < q < 1$ ,  $\log q$  est...

1. Nul
2. Positif
3. Négatif

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 25](#)

## 4 Boîte à outils

### ✂ Méthode | Prolonger les puissances à des exposants réels

1. Vérifie que la base est strictement positive.
2. Interprète un exposant négatif comme un inverse.
3. Interprète un exposant fractionnaire comme une racine positive.
4. Choisis la règle adaptée à un produit, quotient ou puissance de puissance.
5. Contrôle le résultat en revenant à une puissance entière si possible.

### ✂ Méthode | Modéliser une évolution exponentielle

1. Repère la valeur initiale et l'unité de temps.
2. Traduis le taux ou la proportion conservée en coefficient  $q$ .
3. Écris  $f(t) = Aq^t$  et contrôle  $f(0) = A$ .
4. Calcule la puissance avant de multiplier par  $A$ .
5. Arrondis seulement à la fin et précise que le résultat dépend du modèle.

### ✂ Méthode | Calculer un taux moyen d'évolution

1. Calcule le coefficient global final divisé par initial, ou le produit des coefficients.
2. Compte les périodes réellement écoulées.
3. Calcule  $q = C^{1/n}$  sans arrondir prématurément.
4. Passe au taux  $q - 1$  puis au pourcentage.

5. Vérifie que la puissance du coefficient reconstitue C.

#### Méthode | Le logarithme décimal

1. Vérifie que chaque argument de logarithme est strictement positif.
2. Pour une puissance de 10, lis directement l'exposant.
3. Choisis uniquement une propriété de produit, quotient ou puissance.
4. Pour un exposant inconnu, prends le logarithme puis isole cet exposant.
5. Contrôle l'ordre de grandeur et le domaine de la solution.

#### Méthode | Résoudre un seuil exponentiel avec un logarithme

1. Écris le seuil avec le bon signe strict ou large.
2. Divise par A puis prends le logarithme des membres positifs.
3. Fais descendre l'exposant et vérifie le signe de  $\log q$ .
4. Isole la variable en inversant l'inégalité si nécessaire.
5. Choisis le premier entier admissible et vérifie ce rang avec son précédent.

## 5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases ; 6 à 10 demandent plusieurs étapes ; 11 à 15 t'invitent à choisir, justifier et contrôler. Cherche avant de consulter les indices.

### Exercice 1 — Un exposant négatif ★★☆☆

Calcule  $5^{-2}$  et  $9^{1/2}$ .

### Exercice 2 — Une croissance ★★☆☆

Une quantité vaut 300 puis augmente de 5 % par période. Écris le modèle et calcule la valeur après deux périodes.

### Exercice 3 — Deux périodes ★★☆☆

Une quantité passe de 400 à 484 en deux ans. Calcule son taux annuel moyen.

### Exercice 4 — Des puissances de 10 ★★☆☆

Calcule  $\log(100)$  et  $\log(0,001)$ .

### Exercice 5 — Une équation de puissance ★★☆☆

Résous  $2^x = 16$ .

### Exercice 6 — Simplifier des puissances ★★★☆☆

Simplifie  $3^{x+2}/3^x$  pour  $x$  réel.

### Exercice 7 — Une décroissance ★★★☆☆

Une masse vaut 80 g et conserve 75 % de sa valeur à chaque heure. Donne le modèle et la masse après trois heures.

### Exercice 8 — Une baisse moyenne ★★★☆☆

Une valeur passe de 1 000 à 729 en trois périodes. Calcule le taux moyen.

### Exercice 9 — Une équation logarithmique ★★★☆☆

Résous  $\log x = 1,5$ .

### Exercice 10 — Un premier dépassement ★★★☆☆

$u_n = 200 \times 1,1^n$ . Trouve le premier rang entier où  $u_n > 300$ .

### Exercice 11 — Un temps fractionnaire ★★★★★

Un modèle multiplie une quantité par 1,44 en un an. Quel coefficient attribue-t-il à une demi-année si l'évolution exponentielle est constante ?

### Exercice 12 — Changer d'unité de temps ★★★★★

$f(t) = 100 \times 1,21^t$  utilise  $t$  en années. Écris un modèle équivalent en semestres  $s$ .

**Exercice 13 — Des taux opposés** ★★ ★

Une valeur augmente de 20 % puis diminue de 20 %. Donne le taux moyen sur ces deux périodes.

**Exercice 14 — Une fausse propriété** ★★ ★

Pourquoi  $\log(2 + 8) = \log 2 + \log 8$  est-il faux ?

**Exercice 15 — Un seuil de décroissance** ★★ ★

$v_n = 1\,000 \times 0,9^n$ . Trouve le premier rang où  $v_n \leq 500$ .

## 6 Problème — Pour aller plus loin

### Renouveler un stock

Un stock de consommables diminue chaque semaine. Le modèle est  $f(t) = 800 \times 0,8^t$  pour  $t \geq 0$ .

1. Donne le taux par période et calcule  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(2)$ .
2. Justifie les variations et le coefficient global sur deux périodes.
3. Retrouve le taux moyen à partir de ce coefficient global.
4. Résous  $f(t) \leq 400$  avec un logarithme.
5. Trouve le premier rang entier adapté et contrôle ce rang et le précédent.

## 7 Indices des exercices

### Exercice 1

**Indice 1.** Un exposant négatif inverse la puissance.

**Indice 2.** L'exposant  $1/2$  donne la racine carrée positive.

### Exercice 2

**Indice 1.** Le coefficient vaut  $1 + 0,05$ .

**Indice 2.** Deux périodes donnent un carré.

### Exercice 3

**Indice 1.** Le rapport global est 1,21.

**Indice 2.** La racine carrée correspond à deux années.

### Exercice 4

**Indice 1.** Réécris chaque nombre comme puissance de 10.

**Indice 2.** Le logarithme donne l'exposant.

### Exercice 5

**Indice 1.** 16 est une puissance de 2.

**Indice 2.** Le logarithme confirme l'exposant.

### Exercice 6

**Indice 1.** Soustrais les exposants dans un quotient de même base.

**Indice 2.** Les termes  $x$  se compensent.

### Exercice 7

**Indice 1.** Le mot « conserve » fournit directement le coefficient.

**Indice 2.** Le taux de perte est son complément.

### Exercice 8

**Indice 1.** Cherche un coefficient positif inférieur à 1.

**Indice 2.** Le taux est le coefficient moins 1.

### Exercice 9

**Indice 1.** Applique la puissance de 10 aux deux côtés.

**Indice 2.** Contrôle le domaine  $x > 0$ .

### Exercice 10

**Indice 1.** Le logarithme de 1,1 est positif.

**Indice 2.** Prends l'entier suivant le seuil réel.

**Exercice 11**

**Indice 1.** Deux demi-années doivent reconstituer le coefficient annuel.

**Indice 2.** On cherche une racine, pas la moitié du taux annuel.

**Exercice 12**

**Indice 1.** Remplace  $t$  par  $s/2$ .

**Indice 2.** Le nouveau coefficient est la racine carrée de 1,21.

**Exercice 13**

**Indice 1.** Commence par multiplier les coefficients.

**Indice 2.** Prends ensuite la racine carrée du produit.

**Exercice 14**

**Indice 1.** La somme des logarithmes correspond à un produit.

**Indice 2.** Compare 10 et 16.

**Exercice 15**

**Indice 1.** Le diviseur logarithmique est négatif.

**Indice 2.** Le sens s'inverse lors de la division.

## 8 Corrigés détaillés

### Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

**Comprendre la question.** Les deux exposants demandent des interprétations différentes.

**Construire la réponse.**

1.  $5^{-2} = 1/5^2 = 1/25$ .
2.  $9^{1/2}$  est la racine carrée positive de 9, donc 3.

**Vérifier.**  $25 \times (1/25) = 1$  et  $3^2 = 9$ . Les deux résultats sont positifs.

**Conclure.**  $5^{-2} = 1/25$  et  $9^{1/2} = 3$ .

### Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

**Comprendre la question.** Chaque période apporte une hausse de 5 % de la valeur courante.

**Construire la réponse.**

1. Le coefficient est  $1 + 0,05 = 1,05$ .
2. Le modèle est  $f(t) = 300 \times 1,05^t$ .
3. Après deux périodes,  $f(2) = 300 \times 1,1025 = 330,75$ .

**Vérifier.** Le calcul étape par étape donne 315 puis  $315 \times 1,05 = 330,75$ .

**Conclure.** Le modèle est  $300 \times 1,05^t$  et la valeur après deux périodes est 330,75.

### Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

**Comprendre la question.** Le coefficient constant annuel doit reproduire le passage de 400 à 484 en deux ans.

**Construire la réponse.**

1.  $C = 484/400 = 1,21$ .
2.  $q = \sqrt{1,21} = 1,1$ .
3. Le taux est  $q - 1 = 0,1$ , soit 10 %.

**Vérifier.**  $400 \times 1,1^2 = 400 \times 1,21 = 484$ .

**Conclure.** Le taux annuel moyen est une hausse de 10 %.

### Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

**Comprendre la question.** Les deux nombres sont des puissances de 10.

**Construire la réponse.**

1.  $100 = 10^2$ , donc  $\log 100 = 2$ .
2.  $0,001 = 1/1000 = 10^{-3}$ , donc  $\log 0,001 = -3$ .

**Vérifier.** Le premier nombre dépasse 1 et a un logarithme positif ; le second est entre 0 et 1 et a un logarithme négatif.

**Conclure.** Les résultats sont respectivement 2 et -3.

## Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

**Comprendre la question.** La quantité recherchée est un exposant.

**Construire la réponse.**

1. En prenant le logarithme,  $x \log 2 = \log 16$ .
2. Comme  $\log 2 > 0$ ,  $x = \log 16 / \log 2$ .
3. Or  $16 = 2^4$ , donc le quotient vaut 4.

**Vérifier.**  $2^4 = 16$ . La fonction de base 2 est strictement croissante : la solution est unique.

**Conclure.**  $x = 4$ .

## Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

**Comprendre la question.** Le quotient utilise deux puissances de même base non nulle.

**Construire la réponse.**

1. Pour tout réel  $x$ ,  $3^x > 0$ , donc la division est permise.
2. On soustrait les exposants :  $3^{x+2}/3^x = 3^{(x+2)-x}$ .
3. L'exposant se réduit à 2, donc le résultat vaut 9.

**Vérifier.** On peut aussi écrire  $3^{x+2} = 3^x \times 3^2$  puis simplifier par  $3^x$ .

**Conclure.** Le quotient vaut toujours 9, indépendamment de  $x$ .

## Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

**Comprendre la question.** La proportion conservée est directement le coefficient multiplicateur.

**Construire la réponse.**

1. Conserver 75 % donne  $q$  égal à 0,75, soit une perte de 25 %.
2. Le modèle en heures est  $m(t) = 80 \times 0,75^t$ .
3.  $0,75^3 = 0,421875$ , donc  $m(3) = 33,75$  g.

**Vérifier.** Les masses successives sont 80, 60, 45 puis 33,75 g : elles diminuent tout en restant positives.

**Conclure.** Après trois heures, la masse modélisée est de 33,75 g.

## Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

**Comprendre la question.** La valeur finale est plus petite : on attend un taux moyen négatif.

**Construire la réponse.**

1.  $C = 729/1000 = 0,729$ .
2. Le coefficient moyen est  $q = 0,729^{1/3} = 0,9$ .
3. Le taux vaut  $0,9 - 1 = -0,1$ .

**Vérifier.**  $1000 \times 0,9^3 = 729$  ; les valeurs intermédiaires seraient 900 puis 810.

**Conclure.** Le taux moyen est une baisse de 10 % par période.

## Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

**Comprendre la question.** Le logarithme donne l'exposant de 10 permettant de reconstruire  $x$ .

**Construire la réponse.**

1. La condition de domaine est  $x > 0$ .
2.  $\log x = 1,5$  équivaut à  $x = 10^{1,5}$ .
3.  $10^{1,5} = 10^{1+1/2} = 10\sqrt{10} \approx 31,623$ .

**Vérifier.** La solution est positive et située entre 10 et 100, comme attendu pour un logarithme entre 1 et 2.

**Conclure.**  $x = 10\sqrt{10} \approx 31,623$ .

## Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

**Comprendre la question.** Le seuil est strict : il faut dépasser 300, pas seulement l'atteindre.

**Construire la réponse.**

1.  $200 \times 1,1^n > 300$  équivaut à  $1,1^n > 1,5$ .
2. Après logarithme,  $n \log 1,1 > \log 1,5$ .
3. Le diviseur est positif, donc  $n > \log 1,5 / \log 1,1 \approx 4,254$ .
4. Le premier entier admissible est 5.

**Vérifier.**  $u_4 = 292,82 < 300$  et  $u_5 = 322,102 > 300$ . La croissance garantit le premier franchissement.

**Conclure.** Le seuil est dépassé pour la première fois au rang 5.

## Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

**Comprendre la question.** Un coefficient semestriel constant doit se composer deux fois pour donner le coefficient annuel.

**Construire la réponse.**

1. Notons  $q$  ce coefficient positif. Deux demi-années donnent  $q^2 = 1,44$ .

2. La racine positive est  $q = \sqrt{1,44} = 1,2$ .
3. Le taux correspondant est  $1,2 - 1 = 0,2$ , soit 20 %.

**Vérifier.**  $1,2 \times 1,2 = 1,44$ . Deux hausses de 20 % donnent une hausse globale de 44 %, pas de 40 %.

**Conclure.** Le coefficient d'une demi-année est 1,2 dans ce modèle exponentiel.

## Corrigé 12

 *Démonstration / Solution expliquée*

**Comprendre la question.** Le même instant doit être exprimé dans deux unités différentes.

**Construire la réponse.**

1.  $s$  semestres correspondent à  $t = s/2$  années.
2. En remplaçant  $t$ , on obtient  $100 \times 1,21^{s/2}$ .
3. La règle des puissances donne  $100 \times (1,21^{1/2})^s = 100 \times 1,1^s$ .

**Vérifier.** Pour deux semestres,  $100 \times 1,1^2 = 121$ , comme pour une année dans le modèle initial.

**Conclure.** Le modèle en semestres est  $100 \times 1,1^s$ , soit une hausse de 10 % par semestre.

## Corrigé 13

 *Démonstration / Solution expliquée*

**Comprendre la question.** Les deux taux successifs portent sur des bases différentes.

**Construire la réponse.**

1. Le coefficient global est  $1,2 \times 0,8 = 0,96$ .
2. Le coefficient moyen sur deux périodes vaut  $\sqrt{0,96} \approx 0,9797959$ .
3. Le taux vaut environ  $-0,0202041$ , soit  $-2,02\%$  par période.

**Vérifier.** À partir de 100, les évolutions donnent 120 puis 96. Un taux moyen nul laisserait 100 et serait donc faux.

**Conclure.** Le taux moyen est d'environ  $-2,02\%$  par période.

## Corrigé 14

 *Démonstration / Solution expliquée*

**Comprendre la question.** On vérifie l'égalité proposée en calculant correctement ses deux membres.

**Construire la réponse.**

1. À gauche,  $\log(2 + 8) = \log 10 = 1$ .
2. À droite,  $\log 2 + \log 8 = \log(2 \times 8) = \log 16$ .
3. Comme  $16 > 10$  et que le logarithme est croissant,  $\log 16 > 1$ .

**Vérifier.** Les deux membres sont différents. La règle de somme de logarithmes correspond à un produit des arguments.

**Conclure.** L'égalité est fausse : le logarithme ne se distribue pas sur une somme.

**Corrigé 15** *Démonstration / Solution expliquée*

**Comprendre la question.** La suite décroît et l'inégalité autorise l'égalité au seuil.

**Construire la réponse.**

1.  $1000 \times 0,9^n \leq 500$  donne  $0,9^n \leq 0,5$ .
2. On obtient  $n \log 0,9 \leq \log 0,5$ .
3. Le logarithme de 0,9 est négatif : en divisant,  $n \geq \log 0,5 / \log 0,9 \approx 6,579$ .
4. Le premier entier admissible est 7.

**Vérifier.**  $v_6 = 531,441 > 500$  alors que  $v_7 = 478,2969 \leq 500$ .

**Conclure.** Le premier rang où la valeur est au plus 500 est 7.

## 9 Corrigé du problème

1. **Comprendre la question.** Le coefficient  $q$  décrit la part conservée par période ; le taux est  $q$  moins 1.

**Construire la réponse.**

- (a) Le taux vaut  $0,8 - 1 = -0,2$ , soit  $-20\%$ .
- (b) Au départ,  $f(0) = 800 \times 0,8^0 = 800$ .
- (c) Après une période,  $f(1) = 800 \times 0,8 = 640$  ; après deux,  $f(2) = 800 \times 0,64 = 512$ .

**Vérifier.** Les valeurs successives diminuent, mais la perte absolue n'est pas constante puisque la base change.

**Conclure.** Le modèle décrit une baisse de  $20\%$  par période.

2. **Comprendre la question.** Les variations d'une exponentielle positive dépendent de sa base.

**Construire la réponse.**

- (a) Le coefficient  $0,8$  est compris entre 0 et 1 :  $f$  décroît en restant positive.
- (b) Deux périodes multiplient successivement par  $q$  puis  $q$ , donc le coefficient global vaut  $q^2 = 0,64$ .

**Vérifier.** Le quotient  $f(2)/f(0) = 512/800 = 0,64$  confirme le coefficient global.

**Conclure.**  $f$  est décroissante et le coefficient sur deux périodes est  $0,64$ .

3. **Comprendre la question.** Le taux moyen doit reconstituer le coefficient global après deux applications.

**Construire la réponse.**

- (a) Notons  $k$  le coefficient moyen positif. On impose  $k^2 = 0,64$ .
- (b) On obtient  $k = \sqrt{0,64} = 0,8$ .
- (c) Le taux moyen est  $k - 1 = -0,2$ , soit  $-20\%$ .

**Vérifier.** On retrouve logiquement le taux constant déjà utilisé par le modèle. Diviser simplement le taux global par deux ne donnerait pas ce résultat.

**Conclure.** Le taux moyen est  $-20\%$  par période.

4. **Comprendre la question.** L'inconnue est dans l'exposant ; le logarithme permet de l'isoler.

**Construire la réponse.**

- (a) On divise le seuil par 800, positif :  $0,8^t \leq 0,5$ .
- (b) Le logarithme est croissant, donc  $t \log(0,8) \leq \log(0,5)$ .
- (c) Comme  $\log(0,8) < 0$ , la division inverse le sens :  $t \geq \log(0,5)/\log(0,8) \approx 3,1063$ .

**Vérifier.** Les deux logarithmes sont négatifs, donc leur quotient est positif, cohérent avec un seuil situé après le départ.

**Conclure.** Le seuil réel est atteint au temps  $\log(0,5)/\log(0,8)$ , puis respecté pour tout temps ultérieur.

5. **Comprendre la question.** Le premier rang entier est le plus petit entier satisfaisant l'inégalité réelle.

**Construire la réponse.**

- (a) La borne réelle est environ  $3,1063$ , donc le premier entier possible est 4.
- (b) Au rang précédent,  $f(3) \approx 409,6$ , supérieur à 400.
- (c) Au rang 4,  $f(4) \approx 327,68$ , inférieur à 400.

**Vérifier.** La décroissance montre que tous les rangs antérieurs au précédent sont encore au-dessus du seuil.

**Conclure.** Le premier rang entier adapté est 4.

## 10 Variante autonome et bilan

Une réserve de 500 conserve 80 % par période. Trouve le premier rang où elle est au plus égale à 200.

### À toi d'essayer : Vérifie ta démarche

Résous la variante, puis explique pourquoi ta méthode s'applique.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 25](#)

- Je peux expliquer : prolonger les puissances à des exposants réels.
- Je peux expliquer : modéliser une évolution exponentielle.
- Je peux expliquer : calculer un taux moyen d'évolution.
- Je peux expliquer : le logarithme décimal.
- Je peux expliquer : résoudre un seuil exponentiel avec un logarithme.

## 11 Fiche-mémoire

### Prolonger les puissances à des exposants réels.

1. Vérifie que la base est strictement positive.
2. Interprète un exposant négatif comme un inverse.
3. Interprète un exposant fractionnaire comme une racine positive.
4. Choisis la règle adaptée à un produit, quotient ou puissance de puissance.
5. Contrôle le résultat en revenant à une puissance entière si possible.

### Modéliser une évolution exponentielle.

1. Repère la valeur initiale et l'unité de temps.
2. Traduis le taux ou la proportion conservée en coefficient  $q$ .
3. Écris  $f(t) = Aq^t$  et contrôle  $f(0) = A$ .
4. Calcule la puissance avant de multiplier par  $A$ .
5. Arrondis seulement à la fin et précise que le résultat dépend du modèle.

### Calculer un taux moyen d'évolution.

1. Calcule le coefficient global final divisé par initial, ou le produit des coefficients.
2. Compte les périodes réellement écoulées.
3. Calcule  $q = C^{1/n}$  sans arrondir prématurément.
4. Passe au taux  $q - 1$  puis au pourcentage.
5. Vérifie que la puissance du coefficient reconstitue  $C$ .

### Le logarithme décimal.

1. Vérifie que chaque argument de logarithme est strictement positif.
2. Pour une puissance de 10, lis directement l'exposant.
3. Choisis uniquement une propriété de produit, quotient ou puissance.
4. Pour un exposant inconnu, prends le logarithme puis isole cet exposant.
5. Contrôle l'ordre de grandeur et le domaine de la solution.

### Résoudre un seuil exponentiel avec un logarithme.

1. Écris le seuil avec le bon signe strict ou large.
2. Divise par  $A$  puis prends le logarithme des membres positifs.
3. Fais descendre l'exposant et vérifie le signe de  $\log q$ .
4. Isole la variable en inversant l'inégalité si nécessaire.
5. Choisis le premier entier admissible et vérifie ce rang avec son précédent.

## 12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

### Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

#### Indice 1 — Une piste.

Un exposant négatif demande de prendre un inverse.

#### Indice 2 — Un pas de plus.

Utilise  $q^{-1} = 1/q$  pour  $q$  non nul.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

### Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

#### Indice 1 — Une piste.

Remplace  $t$  par zéro dans l'expression.

#### Indice 2 — Un pas de plus.

Pour une base positive,  $q^0 = 1$ .

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

### Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

#### Indice 1 — Une piste.

Le même coefficient  $q$  doit être appliqué  $n$  fois.

#### Indice 2 — Un pas de plus.

Il doit vérifier  $q^n = C$ , avec  $q$  positif.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

### Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

#### Indice 1 — Une piste.

Le logarithme décimal retrouve l'exposant d'une puissance de 10.

#### Indice 2 — Un pas de plus.

Cherche le nombre  $x$  tel que  $10^x = 10^4$ .

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

**Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve****Indice 1 — Une piste.**

Compare  $q$  à 1 et utilise la croissance du logarithme.

**Indice 2 — Un pas de plus.**

Le logarithme de 1 vaut zéro.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

**Vérifie ta démarche****Indice 1 — Une piste.**

Repère les données utiles et l'inconnue. Reviens à la méthode correspondante dans la boîte à outils.

**Indice 2 — Un pas de plus.**

Contrôle les unités, les bornes et la plausibilité du résultat avant de lire la correction.

[Revenir à la recherche, p. 22](#)

## 13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

### Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

$4^{-1} = 1/4$ . Le signe moins concerne l'exposant ; il ne rend pas le résultat négatif. Le contrôle  $4 \times (1/4) = 1$  confirme l'inverse.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

### Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

À  $t$  égal à zéro,  $Aq^0 = A \times 1 = A$ .  $A$  représente donc la valeur initiale, tandis que  $q$  est le coefficient multiplicateur par unité de temps.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

### Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Le coefficient moyen est  $q = C^{1/n}$ , car  $(C^{1/n})^n = C$ . Il ne faut pas le confondre avec le taux moyen, qui vaut  $C^{1/n} - 1$ .

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

### Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

$\log(10^4) = 4$ . La fonction logarithme décimal et la puissance de base 10 sont réciproques : le résultat est l'exposant, pas le nombre 10000.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

### Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Pour  $0 < q < 1$ , on a  $\log q < \log 1 = 0$  : ce logarithme est négatif. C'est pourquoi diviser une inégalité par ce nombre retourne son sens.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

## Vérifie ta démarche

**Comprendre la question.** La réserve est multipliée par 0,8 à chaque période et doit devenir au plus égale à 200.

**Construire la réponse.**

1. Le modèle est  $u_n = 500 \times 0,8^n$ . Le seuil donne  $0,8^n \leq 200/500 = 0,4$ .
2. Après logarithme,  $n \log 0,8 \leq \log 0,4$ . La division par le nombre négatif  $\log 0,8$  donne  $n \geq \log 0,4 / \log 0,8 \approx 4,106$ .
3. Le premier entier est 5. Au rang 4,  $u_4 = 204,8 > 200$  ; au rang 5,  $u_5 = 163,84 \leq 200$ .

**Vérifier.** La suite est décroissante, donc ce contrôle du rang et de son précédent établit bien le premier franchissement.

**Conclure.** La réserve est au plus égale à 200 pour la première fois au rang 5.

[Revenir à la recherche, p. 22](#)