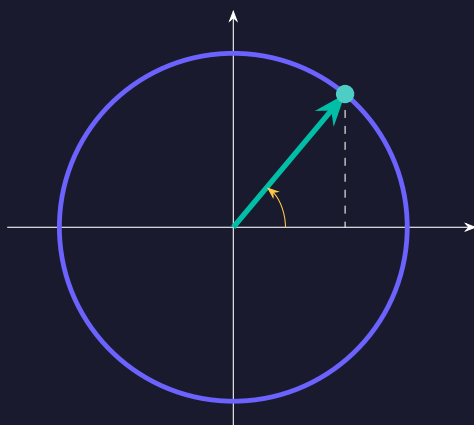


FICHE 07

Vecteurs et repérage dans l'espace

Géométrie ■ Comprendre et s'entraîner



Terminale professionnelle
Année scolaire 2026–2027

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	Pourquoi ce chapitre ?	3
2	L'idée avant la formule	3
3	Le cours formel	3
3.1	Se repérer avec trois coordonnées	3
3.2	Décrire un déplacement dans l'espace	4
3.3	Composer des déplacements dans l'espace	6
3.4	Vérifier une direction dans les trois dimensions	7
3.5	Calculer une distance dans l'espace	8
4	Boîte à outils	9
5	Exercices progressifs	11
6	Problème — Pour aller plus loin	13
7	Indices des exercices	14
8	Corrigés détaillés	16
9	Corrigé du problème	21
10	Variante autonome et bilan	22
11	Fiche-mémoire	22
12	Indices des pauses et des preuves	23
13	Explications des pauses et des preuves	25

1 Pourquoi ce chapitre ?

Les coordonnées spatiales permettent de calculer une distance, additionner des déplacements et vérifier l'alignement d'une trajectoire. **Ton parcours.** Module du programme professionnel pour les groupements B. Les automatismes, le raisonnement et les outils numériques se travaillent tout au long du parcours.

- Se repérer avec trois coordonnées.
- Décrire un déplacement dans l'espace.
- Composer des déplacements dans l'espace.
- Vérifier une direction dans les trois dimensions.
- Calculer une distance dans l'espace.

2 L'idée avant la formule

Le troisième axe ajoute une altitude. La norme combine les trois composantes ; une vue de dessus seule peut masquer une différence de hauteur.

3 Le cours formel

3.1 Se repérer avec trois coordonnées

Intuition | Construire la notion pas à pas

Ajouter une troisième direction. Dans le plan, deux coordonnées suffisent pour repérer une position. Dans l'espace, une troisième direction indépendante permet aussi de monter ou descendre. On écrit les points dans l'ordre $(x; y; z)$.

Lire les trois rôles. x est l'abscisse, y l'ordonnée et z la cote ou altitude dans le repère choisi. Le signe de chaque coordonnée concerne uniquement son axe. Une cote négative signifie être sous le plan de référence, pas avoir une distance négative.

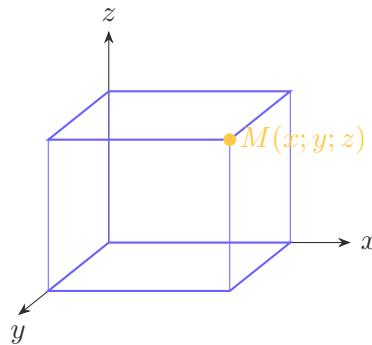
Projeter verticalement. Une projection verticale conserve les deux coordonnées horizontales et remplace la cote par celle du plan visé. Passer de $(x; y; z)$ au plan de cote h donne donc $(x; y; h)$.

Exploiter les dimensions d'un pavé. Lorsque les trois arêtes issues d'un sommet suivent les axes positifs, le sommet opposé cumule les trois longueurs. Le centre se trouve à mi-chemin selon chaque direction, donc ses coordonnées sont les moitiés de ces longueurs.

Dans un repère orthonormé, les trois axes sont perpendiculaires deux à deux et utilisent la même unité ; une perspective dessinée sur une feuille ne conserve pas toutes ces propriétés visuellement.

Définition | Comprendre la notion

Dans l'espace, un point M est repéré par trois coordonnées $(x; y; z)$: abscisse, ordonnée, altitude. L'origine est $(0; 0; 0)$. La troisième coordonnée ajoute une direction indépendante des deux premières. Dans un repère orthonormé, les trois axes sont perpendiculaires deux à deux et utilisent la même unité. Pour placer un point, construis ses déplacements suivant les trois axes ; une perspective plane ne conserve pas toutes les longueurs. Un point du plan horizontal de cote h a $z = h$. Deux points peuvent avoir les mêmes abscisse et ordonnée mais des altitudes différentes.



💡 Exemple | Exemple commenté

Le point $M(2; 3; 4)$ se repère par deux unités selon le premier axe, trois selon le deuxième et quatre selon le troisième. Sa projection verticale sur $z = 0$ est $H(2; 3; 0)$.

Le déplacement de M vers H ne change ni x ni y : ses composantes sont $(0; 0; -4)$. Il descend de quatre unités. Si l'on projetait sur le plan $z = 1$, on obtiendrait au contraire $(2; 3; 1)$ et une descente de trois unités.

Deux points comme $(2; 3; 4)$ et $(2; 3; 1)$ ont donc la même position vue de dessus, sans être le même point dans l'espace. La troisième coordonnée est indispensable pour les distinguer.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Une vue de dessus peut superposer deux points d'altitudes différentes. Ne conclus pas à l'égalité des points en comparant seulement leurs deux premières coordonnées.

À toi d'essayer : Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Dans $M(2; 5; -1)$, l'altitude est. ...

1. 2
2. -1
3. 5

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.2 Décrire un déplacement dans l'espace

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Étendre la différence de positions. Dans l'espace, le vecteur de A vers B décrit trois variations : selon x, selon y et selon z. On soustrait les coordonnées du départ à celles de l'arrivée sur chacun des trois axes.

Lire une composante verticale. Une troisième composante positive décrit une montée selon le repère; une composante négative une descente. Une composante nulle signifie que l'altitude ne change pas, même si le point se déplace horizontalement.

Retrouver une arrivée. Si l'on connaît A et le déplacement $\vec{u}$, l'arrivée s'obtient en ajoutant les trois composantes de $\vec{u}$ à celles de A. Le vecteur n'est pas lui-même une position absolue.

Comparer des déplacements de départs différents. Deux vecteurs sont égaux lorsque leurs trois composantes sont égales. Ils peuvent être représentés à des endroits différents. Pour les opposer, on change les trois signes, pas seulement la cote.

Définition | Comprendre la notion

Le vecteur de A vers B a pour coordonnées

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

La règle « arrivée moins départ » se prolonge aux trois dimensions. Pour retrouver B depuis A et un vecteur, on ajoute les trois composantes à celles de A. Deux vecteurs sont égaux si leurs trois coordonnées sont égales. Le vecteur opposé change les trois signes. Un déplacement de cote nulle reste parallèle au plan horizontal, même si ses deux autres coordonnées ne sont pas nulles.

Exemple | Exemple commenté

Pour $A(1; 2; 3)$ et $B(4; 0; 8)$, les différences sont $4 - 1 = 3$, $0 - 2 = -2$ et $8 - 3 = 5$. Ainsi $\overrightarrow{AB} = (3; -2; 5)$.

Le trajet avance de trois unités selon x, recule de deux selon y et monte de cinq selon z. Depuis un autre départ $C(0; 0; 0)$, le même déplacement aboutirait à $(3; -2; 5)$; depuis A, il aboutit bien à B. Le contrôle depuis A donne $(1+3; 2-2; 3+5) = (4; 0; 8)$. Le trajet inverse a pour vecteur $(-3; 2; -5)$ et ramène B à A.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Des points différents peuvent porter des représentants du même vecteur. L'égalité compare les variations de coordonnées, pas les coordonnées des points de départ.

À toi d'essayer : Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

$A(1;2;3)$, $B(3;5;7)$ donnent $AB = \dots$

1. $(2; 3; 4)$
2. $(-2; -3; -4)$
3. $(4; 7; 10)$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.3 Composer des déplacements dans l'espace

Intuition | Construire la notion pas à pas

Composer trois variations simultanément. L'addition de vecteurs dans l'espace suit la même règle que dans le plan, avec une troisième composante. On additionne les x ensemble, les y ensemble et les z ensemble.

Distribuer un coefficient partout. Multiplier par un réel k modifie les trois composantes. Une soustraction ajoute l'opposé et change donc les trois signes du vecteur soustrait. Une coordonnée déjà négative devient positive lorsqu'on prend son opposé.

Comprendre les compensations partielles. Une somme peut avoir une composante nulle sans être le vecteur nul. Deux déplacements peuvent annuler leurs effets verticaux tout en avançant horizontalement. Pour un équilibre complet, les trois composantes doivent être nulles.

Distinguer trajet et résultante. Le déplacement résultant dépend seulement du départ et de l'arrivée. Sa norme n'est pas en général la somme des longueurs de chaque étape. On additionne d'abord les vecteurs avant de mesurer la résultante si c'est cette distance qui est demandée.

Définition | Comprendre la notion

On additionne les vecteurs de l'espace composante par composante. Multiplier un vecteur par k multiplie ses trois composantes par k . Les règles de Chasles, du vecteur opposé et du vecteur nul restent valables. Un système de déplacements ou de forces peut être résumé par un vecteur résultant. Un équilibre vectoriel exige que chacune des trois composantes de la somme soit nulle. Une norme ne se distribue pas sur une somme en général : additionne les vecteurs avant de calculer une longueur, lorsque c'est cette longueur résultante qui est demandée.

Exemple | Exemple commenté

Pour $\vec{u} = (1; 2; -1)$ et $\vec{v} = (3; -2; 4)$, la somme est $(1+3; 2-2; -1+4) = (4; 0; 3)$. Les mouvements selon y se compensent, mais le déplacement final reste non nul selon x et z .

Pour revenir au départ après ces deux étapes, on ajoute l'opposé $(-4; 0; -3)$. Le total devient $(0; 0; 0)$, ce qui vérifie le retour.

Dans un repère orthonormé, la norme de la résultante est $\sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = 5$. Elle décrit la distance directe entre départ et arrivée, tandis que le trajet en deux étapes peut être plus long.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Une coordonnée nulle ne suffit pas pour un équilibre dans l'espace. Le vecteur nul exige trois zéros simultanément.

À toi d'essayer : Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

$$(1; 2; 3) + (4; -2; 1) =$$

1. $(4; -4; 3)$
2. $(5; 4; 4)$
3. $(5; 0; 4)$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.4 Vérifier une direction dans les trois dimensions**🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas**

Chercher un même facteur dans trois directions. Deux vecteurs sont colinéaires lorsqu'un seul réel k transforme toutes les composantes de l'un en celles de l'autre. Dans l'espace, il faut donc trois égalités simultanées.

Utiliser une composante pour proposer, les autres pour vérifier. Une coordonnée non nulle permet de calculer un facteur candidat. Les deux autres doivent ensuite donner exactement les coordonnées attendues. Deux confirmations ne dispensent jamais du troisième contrôle.

Ne pas confondre projection et espace. Une vue de dessus supprime l'altitude. Deux déplacements peuvent alors paraître colinéaires dans cette projection, mais leurs variations verticales peuvent être incompatibles avec le même facteur. L'alignement observé à l'écran n'est donc pas une preuve spatiale.

Traiter les zéros et les points. Une composante nulle reste nulle sous multiplication ; on la contrôle sans quotient interdit. Pour l'alignement de points distincts, on compare deux vecteurs issus du même point et l'on vérifie leurs trois composantes.

📖 Définition | Comprendre la notion

Deux vecteurs de l'espace sont colinéaires si un même réel k transforme toutes les composantes de l'un en celles de l'autre. Choisis une composante non nulle pour trouver k , puis contrôle les deux autres. Deux coordonnées compatibles ne suffisent pas : la troisième peut empêcher la colinéarité. Des points A , B , C sont alignés lorsque AB et AC sont colinéaires. Le calcul se fait dans l'espace entier, pas seulement sur la projection vue à l'écran. Deux trajectoires peuvent paraître alignées sur une vue de dessus tout en ayant des altitudes incompatibles.

💡 Exemple | Exemple commenté

Les vecteurs $(1; 2; 3)$ et $(2; 4; 6)$ sont colinéaires avec un facteur 2 : chaque composante du second est deux fois celle du premier.

Avec $(2; 4; 7)$ à la place, les deux premières composantes donnent toujours un facteur 2, mais la troisième devrait alors valoir $2 \times 3 = 6$. Comme elle vaut 7, la colinéarité échoue.

Les projections des deux exemples sur le plan horizontal seraient pourtant identiques : (1;2) et (2;4). Seule la troisième coordonnée distingue les situations, ce qui explique pourquoi une vue plane peut masquer le problème.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Deux coordonnées proportionnelles ne prouvent pas la colinéarité de vecteurs de l'espace. La troisième peut contredire le facteur trouvé.

À toi d'essayer : Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Dans l'espace, tester deux composantes suffit toujours pour la colinéarité. . .

1. Vrai
2. Faux
3. Vrai si elles sont positives

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.5 Calculer une distance dans l'espace

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Appliquer Pythagore en deux étapes. Pour un déplacement $(x; y; z)$ dans un repère orthonormé, sa projection horizontale a pour longueur $\sqrt{x^2 + y^2}$. Cette projection et la variation verticale z forment un second triangle rectangle, d'où la norme $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Commencer par le bon déplacement. Une distance entre deux points utilise leurs différences de coordonnées. Les coordonnées d'un point seul mesurent un déplacement depuis l'origine, pas depuis un autre point.

Distinguer distance directe et trajet contraint. La racine de la somme des carrés donne la longueur du segment direct. Un trajet imposant successivement les axes additionne les longueurs de ses étapes et peut être plus long. Des obstacles peuvent rendre le segment direct impraticable sans changer sa longueur géométrique.

Contrôler les unités et le repère. Les trois axes doivent être perpendiculaires deux à deux avec la même unité. La distance est positive ou nulle et au moins égale à la valeur absolue de chacune de ses composantes.

📖 Définition | Comprendre la notion

Dans un repère orthonormé de l'espace,

$$\|(x; y; z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

La formule vient de deux applications de Pythagore : une première dans le plan horizontal, une seconde avec la hauteur. Pour une distance AB, utilise les différences des trois coordonnées. La distance directe n'est pas la somme des distances parcourues selon les axes. Elle est positive ou

nulle et s'exprime dans l'unité du repère. Pour une diagonale de pavé de dimensions L , l , h , on obtient $\sqrt{L^2 + l^2 + h^2}$.

Exemple | Exemple commenté

Un pavé de dimensions 3, 4 et 12 possède une diagonale spatiale. La diagonale de la base mesure d'abord $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Cette longueur 5 et la hauteur 12 sont perpendiculaires. La grande diagonale vaut donc $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = 13$.

Le calcul direct rassemble les deux étapes : $\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$. Parcourir trois arêtes successives demanderait au contraire $3 + 4 + 12 = 19$ unités. Ces deux valeurs décrivent des trajets différents entre les mêmes sommets.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

La distance directe est une racine de somme de carrés, pas la somme des composantes. Cette dernière peut même s'annuler pour un déplacement non nul si des signes se compensent.

À toi d'essayer : Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

La norme de $(1; 2; 2)$ vaut...

1. 9
2. 5
3. 3

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 25](#)

4 Boîte à outils

Méthode | Se repérer avec trois coordonnées

1. Lis les coordonnées dans l'ordre x , y , z et repère les axes du dessin.
2. Interprète chaque signe sur son axe uniquement.
3. Pour une projection verticale, garde x et y puis remplace z par la cote du plan.
4. Pour un centre de pavé aligné sur les axes, prends les moitiés des dimensions.
5. Contrôle la position avec le plan ou les limites du solide.

Méthode | Décrire un déplacement dans l'espace

1. Identifie départ et arrivée.
2. Calcule les trois différences arrivée moins départ avec les parenthèses nécessaires.
3. Pour une arrivée inconnue, ajoute les composantes au départ.
4. Compare les trois coordonnées pour une égalité de vecteurs.

5. Contrôle par le déplacement inverse ou par reconstruction du point d'arrivée.

Méthode | Composer des déplacements dans l'espace

1. Écris chaque déplacement avec ses trois composantes.
2. Calcule les multiples avant les additions et soustractions.
3. Additionne axe par axe et traite soigneusement les signes.
4. Pour un retour ou un équilibre, prends l'opposé de la résultante.
5. Vérifie la nullité des trois coordonnées ou reconstruis l'expression initiale.

Méthode | Vérifier une direction dans les trois dimensions

1. Vérifie les vecteurs nuls et les composantes nulles avant de diviser.
2. Trouve un facteur candidat avec une composante non nulle.
3. Contrôle explicitement les deux autres composantes.
4. Pour des points, calcule deux déplacements de même origine.
5. Conclue dans l'espace complet, sans te limiter à une projection.

Méthode | Calculer une distance dans l'espace

1. Vérifie l'hypothèse de repère orthonormé.
2. Calcule le vecteur entre les points si nécessaire.
3. Additionne les carrés des trois composantes puis prends la racine positive.
4. Pour un trajet par étapes, additionne séparément les longueurs de ces étapes.
5. Compare les résultats en précisant les contraintes de déplacement.

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases ; 6 à 10 demandent plusieurs étapes ; 11 à 15 t'invitent à choisir, justifier et contrôler. Cherche avant de consulter les indices.

Exercice 1 — Lire une altitude ★☆☆

Pour $A(-2; 5; 3)$, donne l'abscisse, l'ordonnée et l'altitude.

Exercice 2 — Trois différences ★☆☆

$A(2; -1; 4)$ et $B(5; 3; 2)$. Calcule AB.

Exercice 3 — Une somme spatiale ★☆☆

Additionne $(2; 3; 1)$ et $(-1; 4; -5)$.

Exercice 4 — Un multiple spatial ★☆☆

$(2; -1; 3)$ et $(-6; 3; -9)$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 5 — Norme spatiale ★☆☆

Calcule la norme de $(2; 3; 6)$.

Exercice 6 — Projeter sur un plan horizontal ★★☆☆

Quelle est la projection verticale de $M(4; -1; 7)$ sur le plan $z = 2$?

Exercice 7 — L'arrivée d'un déplacement ★★☆☆

$A(-1; 2; 0)$ et $\overrightarrow{AB} = (4; -3; 5)$. Trouve B.

Exercice 8 — Une combinaison linéaire ★★☆☆

$\vec{u} = (1; -2; 3)$, $\vec{v} = (4; 0; -1)$. Calcule $2\vec{u} - \vec{v}$.

Exercice 9 — Une troisième coordonnée à déterminer ★★☆☆

Pour quelle valeur de a les vecteurs $(1; 3; 2)$ et $(2; 6; a)$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 10 — Distance entre points ★★☆☆

$A(1; 2; -1)$ et $B(3; 5; 5)$. Calcule AB.

Exercice 11 — Un sommet de pavé ★★★

Un pavé a pour origine un sommet, et ses trois arêtes issues de ce sommet suivent les axes, de longueurs 6, 4, 3. Quelles sont les coordonnées du sommet opposé et du centre ?

Exercice 12 — Comparer deux trajectoires ★★★

$A(0; 1; 2)$, $B(2; 4; 6)$, $C(5; 0; -1)$ et $D(7; 3; 3)$. Compare AB et CD.

Exercice 13 — Fermer un trajet ★★★

Un robot effectue les déplacements $(3; 0; 2)$ puis $(-1; 4; 1)$. Quel déplacement le ramène au départ ?

Exercice 14 — Alignement trompeur en projection ★★ ★

$A(0; 0; 0)$, $B(1; 2; 1)$, $C(2; 4; 3)$. Leurs projections sur $z = 0$ sont alignées. Les points le sont-ils dans l'espace ?

Exercice 15 — Trajet direct ou par les axes ★★ ★

Un robot doit passer de $(0; 0; 0)$ à $(6; 8; 0)$. Compare la distance directe et un trajet suivant successivement les axes x et y .

6 Problème — Pour aller plus loin

Déplacement d'un robot dans l'espace

Dans un repère orthonormé en mètres, $A(1;2;0)$, $B(3;3;2)$ et $C(5;4;4)$.

1. Calcule AB , BC et AC en coordonnées vectorielles.
2. Vérifie Chasles et l'alignement des trois points.
3. Calcule les distances AB et AC .
4. Après B , un déplacement $(-1;2;3)$ conduit à D . Donne D et AD .
5. Le segment AD a-t-il la même longueur que sa projection sur le plan horizontal ?

7 Indices des exercices

Exercice 1

Indice 1. Les coordonnées sont ordonnées x, y, z .

Indice 2. La troisième est l'altitude.

Exercice 2

Indice 1. Calcule une différence par axe.

Indice 2. Attention à la soustraction du nombre -1 .

Exercice 3

Indice 1. Additionne les composantes de même position.

Indice 2. La dernière somme vaut $1 - 5$.

Exercice 4

Indice 1. Cherche un multiplicateur sur la première composante.

Indice 2. Vérifie le même nombre sur les deux autres.

Exercice 5

Indice 1. Il y a trois carrés à additionner.

Indice 2. La racine se prend après la somme.

Exercice 6

Indice 1. Le déplacement ne modifie que l'altitude.

Indice 2. Le plan impose $z = 2$.

Exercice 7

Indice 1. Ajoute le vecteur aux coordonnées du départ.

Indice 2. La règle s'applique aux trois coordonnées.

Exercice 8

Indice 1. Effectue d'abord la multiplication par 2.

Indice 2. Soustraire -1 revient à ajouter 1.

Exercice 9

Indice 1. Les deux premières coordonnées donnent le facteur.

Indice 2. Applique ce facteur à la troisième.

Exercice 10

Indice 1. Commence par le vecteur AB .

Indice 2. La différence d'altitude vaut $5 - (-1) = 6$.

Exercice 11

Indice 1. Chaque coordonnée mesure l'avancée selon une arête.

Indice 2. Le centre se situe à mi-distance sur les trois dimensions.

Exercice 12

Indice 1. Calcule les deux déplacements séparément.

Indice 2. Un même vecteur peut avoir plusieurs représentants.

Exercice 13

Indice 1. Calcule le déplacement total avant le retour.

Indice 2. Prends son opposé sur les trois axes.

Exercice 14

Indice 1. La vue de dessus oublie l'altitude.

Indice 2. Contrôle la troisième composante.

Exercice 15

Indice 1. La norme donne la distance en ligne droite.

Indice 2. Le trajet imposé additionne deux segments, pas leurs carrés.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le triplet donne les coordonnées dans un ordre fixé.

Construire la réponse.

1. La première coordonnée -2 est l'abscisse.
2. La deuxième 5 est l'ordonnée.
3. La troisième 3 est l'altitude.

Vérifier. Le signe négatif porte seulement sur le déplacement selon le premier axe. Les deux autres coordonnées restent positives.

Conclure. Abscisse : -2 ; ordonnée : 5 ; altitude : 3.

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On calcule la variation de chacune des trois coordonnées entre A et B.

Construire la réponse.

1. Selon x : $5 - 2 = 3$. Selon y : $3 - (-1) = 4$. Selon z : $2 - 4 = -2$.
2. Le vecteur est donc $(3; 4; -2)$.

Vérifier. Ajouter ce déplacement à A donne $(2 + 3; -1 + 4; 4 - 2) = (5; 3; 2)$, soit B. La composante verticale négative correspond bien à une descente de 4 à 2.

Conclure. $\vec{AB} = (3; 4; -2)$.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On additionne les composantes de même position dans les deux triplets.

Construire la réponse.

1. La composante x vaut $2 + (-1) = 1$.
2. La composante y vaut $3 + 4 = 7$.
3. La composante z vaut $1 + (-5) = -4$.

Vérifier. Soustraire le second vecteur à $(1; 7; -4)$ redonne $(2; 3; 1)$, le premier.

Conclure. La somme est $(1; 7; -4)$.

Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On cherche le facteur qui transforme $(2; -1; 3)$ en $(-6; 3; -9)$.

Construire la réponse.

1. La première composante donne $k = -6/2 = -3$.
2. La deuxième vérifie $(-3)(-1) = 3$.

3. La troisième vérifie $(-3) \times 3 = -9$.

Vérifier. Le même facteur -3 convient aux trois coordonnées. Son signe indique des sens opposés pour les vecteurs non nuls.

Conclure. Les vecteurs sont colinéaires, avec facteur -3.

Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On applique la formule de norme à trois composantes.

Construire la réponse.

1. Les carrés sont $2^2 = 4$, $3^2 = 9$ et $6^2 = 36$.
2. Leur somme vaut 49, donc la norme est $\sqrt{49} = 7$.

Vérifier. La distance 7 dépasse chacune des composantes en valeur absolue, notamment 6. Le nombre 49 est la norme au carré, pas la norme.

Conclure. La norme vaut 7.

Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le déplacement de projection est vertical et aboutit à la cote 2.

Construire la réponse.

1. On conserve les coordonnées horizontales 4 et -1.
2. On remplace la cote 7 par 2 : le point projeté est $(4; -1; 2)$.
3. La variation verticale vaut $2 - 7 = -5$.

Vérifier. Le point obtenu appartient au plan $z = 2$ et a les mêmes x et y que M . Il est donc situé sur la verticale de M .

Conclure. La projection est $(4; -1; 2)$, avec une descente de cinq unités.

Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On ajoute le déplacement à la position initiale.

Construire la réponse.

1. $x_B = -1 + 4 = 3$.
2. $y_B = 2 + (-3) = -1$.
3. $z_B = 0 + 5 = 5$.

Vérifier. La soustraction $B - A$ donne $(3 - (-1); -1 - 2; 5 - 0) = (4; -3; 5)$, le vecteur imposé.

Conclure. $B(3; -1; 5)$.

Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On double d'abord $\vec{u}$, puis on retire les trois composantes de $\vec{v}$.

Construire la réponse.

1. $2\vec{u} = (2; -4; 6)$.
2. La différence est $(2 - 4; -4 - 0; 6 - (-1)) = (-2; -4; 7)$.

Vérifier. Ajouter $\vec{v}$ au résultat donne $(-2 + 4; -4 + 0; 7 - 1) = (2; -4; 6) = 2\vec{u}$. La troisième composante utilise bien une soustraction de -1, donc une addition de 1.

Conclure. $2\vec{u} - \vec{v} = (-2; -4; 7)$.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les deux premières coordonnées fixent le facteur ; la troisième impose la valeur de a.

Construire la réponse.

1. La première égalité donne $2 = k \times 1$, donc $k = 2$.
2. La seconde confirme $6 = 2 \times 3$.
3. La troisième doit vérifier $a = 2 \times 2 = 4$.

Vérifier. Pour a égal à 4, le second vecteur est exactement $2(1; 3; 2) = (2; 6; 4)$. Une autre valeur échouerait sur la dernière coordonnée.

Conclure. Il faut et il suffit que $a = 4$.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La distance AB nécessite d'abord le déplacement de A vers B.

Construire la réponse.

1. $\overrightarrow{AB} = (3 - 1; 5 - 2; 5 - (-1)) = (2; 3; 6)$.
2. On calcule $AB = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$.

Vérifier. L'ajout du déplacement à A redonne B. La troisième variation vaut 6 et non 4, car on soustrait l'altitude négative -1.

Conclure. $AB = 7$ unités.

Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les dimensions du pavé suivent les trois axes depuis l'origine.

Construire la réponse.

1. Le sommet opposé cumule les déplacements de 6, 4 et 3 unités, donc ses coordonnées sont $(6; 4; 3)$.
2. Le centre est le milieu entre ce sommet et $(0; 0; 0)$.

3. Ses coordonnées sont $((0 + 6)/2; (0 + 4)/2; (0 + 3)/2) = (3; 2; 1,5)$.

Vérifier. Chaque coordonnée du centre est à mi-distance entre les deux faces correspondantes, ce qui caractérise le centre du pavé.

Conclure. Le sommet opposé est $(6; 4; 3)$ et le centre $(3; 2; 1,5)$.

Corrigé 12

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les points de départ diffèrent, mais on doit comparer les déplacements et non les positions.

Construire la réponse.

1. $\overrightarrow{AB} = (2 - 0; 4 - 1; 6 - 2) = (2; 3; 4)$.
2. $\overrightarrow{CD} = (7 - 5; 3 - 0; 3 - (-1)) = (2; 3; 4)$.
3. Les trois coordonnées coïncident.

Vérifier. Le déplacement commun ajouté à C donne $(5 + 2; 0 + 3; -1 + 4) = (7; 3; 3)$, soit D.

Conclure. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux.

Corrigé 13

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le retour doit annuler le déplacement cumulé des deux premières étapes.

Construire la réponse.

1. La résultante est $(3; 0; 2) + (-1; 4; 1) = (2; 4; 3)$.
2. Son opposé est $(-2; -4; -3)$.

Vérifier. La somme complète vaut $(3 - 1 - 2; 0 + 4 - 4; 2 + 1 - 3) = (0; 0; 0)$. Les trois coordonnées du départ sont donc retrouvées.

Conclure. Le déplacement de retour est $(-2; -4; -3)$.

Corrigé 14

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. L'alignement des projections doit être complété par le contrôle des altitudes.

Construire la réponse.

1. Comme A est l'origine, $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 1)$ et $\overrightarrow{AC} = (2; 4; 3)$.
2. Les deux premières composantes imposent le facteur 2.
3. La troisième composante attendue serait $2 \times 1 = 2$, alors que celle de AC vaut 3.
4. Il n'existe donc pas de facteur commun aux trois composantes.

Vérifier. Le point qui serait à deux fois le déplacement AB aurait les coordonnées $(2; 4; 2)$, situé une unité sous C. La projection horizontale efface précisément cet écart.

Conclure. A, B et C ne sont pas alignés dans l'espace.

Corrigé 15 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On compare la longueur du segment direct avec celle d'un trajet suivant les axes.

Construire la réponse.

1. Le déplacement direct est $(6; 8; 0)$; sa norme vaut $\sqrt{36 + 64 + 0} = 10$.
2. Le trajet par les axes parcourt d'abord 6 puis 8 unités, soit $6 + 8 = 14$.
3. La différence de longueur vaut $14 - 10 = 4$ unités.

Vérifier. La diagonale d'un rectangle est plus courte que le trajet suivant deux côtés. Le choix du chemin direct suppose qu'aucun obstacle ou contrainte ne l'interdit.

Conclure. Le trajet direct mesure 10 unités contre 14 par les axes, soit 4 unités de moins.

9 Corrigé du problème

1. **Comprendre la question.** Chaque déplacement possède trois coordonnées, calculées dans le même ordre.

Construire la réponse.

(a) $\overrightarrow{AB} = (3 - 1; 3 - 2; 2 - 0) = (2; 1; 2).$

(b) $\overrightarrow{BC} = (5 - 3; 4 - 3; 4 - 2) = (2; 1; 2).$

(c) $\overrightarrow{AC} = (5 - 1; 4 - 2; 4 - 0) = (4; 2; 4).$

Vérifier. La troisième composante représente le déplacement vertical; elle doit être traitée comme les deux autres dans la soustraction.

Conclure. AB et BC valent $(2; 1; 2)$, et AC vaut $(4; 2; 4)$.

2. **Comprendre la question.** Chasles compare le trajet en deux étapes au déplacement direct; la colinéarité établit l'alignement.

Construire la réponse.

(a) $(2; 1; 2) + (2; 1; 2) = (4; 2; 4) = \overrightarrow{AC}$: Chasles est vérifiée.

(b) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$: les trois coordonnées utilisent le même coefficient.

(c) Les points sont alignés et les deux déplacements AB et BC sont identiques.

Vérifier. Le milieu de A et C est $((1 + 5)/2; (2 + 4)/2; (0 + 4)/2) = (3; 3; 2) = B$.

Conclure. A, B et C sont alignés, et B est le milieu de A et C.

3. **Comprendre la question.** Une norme en espace orthonormé utilise la somme de trois carrés.

Construire la réponse.

(a) $AB = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ m.}$

(b) $AC = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6 \text{ m.}$

Vérifier. Comme AC est le double du vecteur AB, sa norme doit être le double : 6 égale bien deux fois 3.

Conclure. Les distances sont 3 m et 6 m.

4. **Comprendre la question.** Le nouveau déplacement part de B, et non de l'origine ou de A.

Construire la réponse.

(a) $D = (3 - 1; 3 + 2; 2 + 3) = (2; 5; 5).$

(b) $\overrightarrow{AD} = (2 - 1; 5 - 2; 5 - 0) = (1; 3; 5).$

Vérifier. Chasles donne également $(2; 1; 2) + (-1; 2; 3) = (1; 3; 5).$

Conclure. D a pour coordonnées $(2; 5; 5)$ et AD vaut $(1; 3; 5)$.

5. **Comprendre la question.** La projection horizontale supprime la composante verticale du déplacement.

Construire la réponse.

(a) La longueur réelle est $\sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{35} \text{ m.}$

(b) Le déplacement projeté est $(1; 3; 0)$, de longueur $\sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \text{ m.}$

(c) Comme $35 > 10$, la longueur réelle est strictement supérieure.

Vérifier. Les carrés vérifient $35 = 10 + 25$: Pythagore ajoute précisément la hauteur de 5 m au carré.

Conclure. Les longueurs ne sont pas égales : la projection horizontale est plus courte car elle ignore le déplacement vertical.

10 Variante autonome et bilan

Pour $A(0;0;1)$, $B(1;2;3)$, $C(2;4;5)$, vérifie l'alignement et donne AB.

À toi d'essayer : Vérifie ta démarche

Résous la variante, puis explique pourquoi ta méthode s'applique.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 25](#)

- Je peux expliquer : se repérer avec trois coordonnées.
- Je peux expliquer : décrire un déplacement dans l'espace.
- Je peux expliquer : composer des déplacements dans l'espace.
- Je peux expliquer : vérifier une direction dans les trois dimensions.
- Je peux expliquer : calculer une distance dans l'espace.

11 Fiche-mémoire

Se repérer avec trois coordonnées.

1. Lis les coordonnées dans l'ordre x, y, z et repère les axes du dessin.
2. Interprète chaque signe sur son axe uniquement.
3. Pour une projection verticale, garde x et y puis remplace z par la cote du plan.
4. Pour un centre de pavé aligné sur les axes, prends les moitiés des dimensions.
5. Contrôle la position avec le plan ou les limites du solide.

Décrire un déplacement dans l'espace.

1. Identifie départ et arrivée.
2. Calcule les trois différences arrivée moins départ avec les parenthèses nécessaires.
3. Pour une arrivée inconnue, ajoute les composantes au départ.
4. Compare les trois coordonnées pour une égalité de vecteurs.
5. Contrôle par le déplacement inverse ou par reconstruction du point d'arrivée.

Composer des déplacements dans l'espace.

1. Écris chaque déplacement avec ses trois composantes.
2. Calcule les multiples avant les additions et soustractions.
3. Additionne axe par axe et traite soigneusement les signes.
4. Pour un retour ou un équilibre, prends l'opposé de la résultante.
5. Vérifie la nullité des trois coordonnées ou reconstruis l'expression initiale.

Vérifier une direction dans les trois dimensions.

1. Vérifie les vecteurs nuls et les composantes nulles avant de diviser.
2. Trouve un facteur candidat avec une composante non nulle.
3. Contrôle explicitement les deux autres composantes.
4. Pour des points, calcule deux déplacements de même origine.
5. Conclue dans l'espace complet, sans te limiter à une projection.

Calculer une distance dans l'espace.

1. Vérifie l'hypothèse de repère orthonormé.
2. Calcule le vecteur entre les points si nécessaire.
3. Additionne les carrés des trois composantes puis prends la racine positive.
4. Pour un trajet par étapes, additionne séparément les longueurs de ces étapes.
5. Compare les résultats en précisant les contraintes de déplacement.

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

L'altitude se lit dans la troisième position du triplet.

Indice 2 — Un pas de plus.

Le signe fait partie de la coordonnée.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Effectue B moins A sur les trois axes.

Indice 2 — Un pas de plus.

Les différences sont $3 - 1$, $5 - 2$ et $7 - 3$.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Additionne les coordonnées correspondantes.

Indice 2 — Un pas de plus.

Les secondes composantes 2 et -2 se compensent.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Un même multiplicateur doit fonctionner sur tout le triplet.

Indice 2 — Un pas de plus.

La coordonnée non testée peut donner une valeur incompatible.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve**Indice 1 — Une piste.**

Additionne les trois carrés : $1 + 4 + 4$.

Indice 2 — Un pas de plus.

Le résultat 9 est le carré de la norme.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche**Indice 1 — Une piste.**

Repère les données utiles et l'inconnue. Reviens à la méthode correspondante dans la boîte à outils.

Indice 2 — Un pas de plus.

Contrôle les unités, les bornes et la plausibilité du résultat avant de lire la correction.

[Revenir à la recherche, p. 22](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Dans $(2; 5; -1)$, l'altitude vaut -1 .

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

$\overrightarrow{AB} = (2; 3; 4)$.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

La somme est $(5; 0; 4)$.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Faux : il faut vérifier les trois composantes.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

La norme vaut $\sqrt{9} = 3$.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche

Comprendre la question. Les différences de coordonnées permettent de tester l'alignement puis de calculer la distance.

Construire la réponse.

1. $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 2)$ et $\overrightarrow{AC} = (2; 4; 4)$.
2. Le second vecteur vaut deux fois le premier, donc A, B et C sont alignés.
3. $AB = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$.

Vérifier. Les trois coordonnées respectent le même coefficient 2 ; une concordance sur seulement deux coordonnées n'aurait pas suffi en espace.

Conclure. Les points sont alignés et la distance AB vaut 3 unités.

[Revenir à la recherche, p. 22](#)