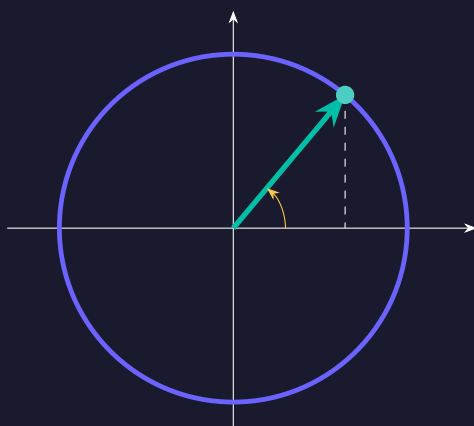


FICHE 08

Équations trigonométriques et Fresnel

Géométrie ■ Comprendre et s'entraîner



Terminale professionnelle
Année scolaire 2026–2027

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	Pourquoi ce chapitre ?	3
2	L'idée avant la formule	3
3	Le cours formel	3
3.1	Résoudre une équation de cosinus	3
3.2	Résoudre une équation de sinus	4
3.3	Chercher les instants où un signal atteint une valeur	5
3.4	Représenter une sinusoïde par un vecteur de Fresnel	6
3.5	Additionner des signaux avec Fresnel	8
4	Boîte à outils	9
5	Exercices progressifs	11
6	Problème — Pour aller plus loin	13
7	Indices des exercices	14
8	Corrigés détaillés	16
9	Corrigé du problème	21
10	Variante autonome et bilan	22
11	Fiche-mémoire	22
12	Indices des pauses et des preuves	23
13	Explications des pauses et des preuves	25

1 Pourquoi ce chapitre ?

Les vecteurs de Fresnel permettent d'additionner des signaux sinusoïdaux de même pulsation. Les coordonnées donnent l'amplitude résultante et le déphasage. **Ton parcours.** Module du programme professionnel pour les groupements A. Les automatismes, le raisonnement et les outils numériques se travaillent tout au long du parcours.

- Résoudre une équation de cosinus.
- Résoudre une équation de sinus.
- Chercher les instants où un signal atteint une valeur.
- Représenter une sinusoïde par un vecteur de Fresnel.
- Additionner des signaux avec Fresnel.

2 L'idée avant la formule

Additionner les amplitudes ne suffit pas lorsque les phases diffèrent. Deux vecteurs peuvent se renforcer ou se compenser selon leur direction.

3 Le cours formel

3.1 Résoudre une équation de cosinus

Intuition | Construire la notion pas à pas

Lire une équation comme une abscisse imposée. Résoudre $\cos x = a$ revient à chercher les points du cercle unité d'abscisse a . Si $a > 1$ ou $a < -1$, la droite verticale ne rencontre pas le cercle : aucune solution réelle n'est possible.

Comprendre les deux directions. Lorsque $-1 < a < 1$, la même abscisse correspond à deux points symétriques par rapport à l'axe horizontal. Si l'un possède l'angle α , l'autre possède l'angle $-\alpha$ modulo un tour.

Passer des angles aux familles. Si $\alpha \in [0; \pi]$ vérifie $\cos \alpha = a$, les solutions générales sont $\alpha + 2k\pi$ et $-\alpha + 2k\pi$, avec k entier. La touche arccos fournit une valeur de référence, pas automatiquement toute la liste sur l'intervalle demandé.

Filtrer et éviter les doublons. On conserve seulement les angles du domaine. Pour a égal à 1 ou -1, les deux familles décrivent les mêmes positions et il faut éviter les répétitions. Dans $] -\pi; \pi]$, la valeur $-\pi$ est exclue, mais π est autorisée.

Définition | Comprendre la notion

L'équation $\cos x = a$ n'a pas de solution si $a \notin [-1; 1]$. Sinon, choisis $\alpha \in [0; \pi]$ tel que $\cos \alpha = a$. Les solutions sont $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$, avec k entier. Sur un intervalle donné, ne conserve que les valeurs qui y appartiennent et évite les doublons aux angles particuliers 0 ou π . Sur $] -\pi; \pi]$, les deux valeurs sont généralement $\pm\alpha$. La borne $-\pi$ est exclue et π incluse. Un cercle aide à visualiser les deux points d'une même abscisse.

💡 Exemple | Exemple commenté

Réolvons $\cos x = 1/2$ sur $] -\pi; \pi]$. L'angle de référence est $\alpha = \pi/3$ car $\cos(\pi/3) = 1/2$. Le point symétrique dans l'axe horizontal a pour angle $-\pi/3$. Ces deux valeurs appartiennent à l'intervalle ; ajouter un tour à l'une ou l'autre en sortirait.

Pour $\cos x = -1$, le point est uniquement $(-1; 0)$. Les mesures π et $-\pi$ représentent ce même point, mais seule π appartient au domaine choisi. L'équation a donc une seule solution dans cet intervalle.

Ces deux exemples montrent pourquoi on ne peut pas annoncer systématiquement « deux solutions » sans regarder la valeur cible et les bornes.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Une valeur d'arccos est seulement un angle de référence. Il faut encore utiliser la symétrie, la périodicité et l'intervalle demandé pour construire toutes les solutions.

À toi d'essayer : Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

$\cos x = 2$ a...

1. Aucune solution réelle
2. Une solution
3. Deux solutions par tour

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.2 Résoudre une équation de sinus

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Lire une ordonnée imposée. Résoudre $\sin x = b$ revient à chercher les points du cercle d'ordonnée b . Une valeur hors de $[-1; 1]$ est impossible. Pour une valeur strictement comprise entre -1 et 1, une horizontale rencontre généralement deux points.

Reconstruire le deuxième angle. Les deux points sont symétriques par rapport à l'axe vertical. Si l'un a pour angle α , l'autre a pour angle $\pi - \alpha$, modulo 2π . Les familles sont donc $\alpha + 2k\pi$ et $\pi - \alpha + 2k\pi$.

Interpréter la touche arcsinus. L'arcsinus renvoie une valeur principale dans $[-\pi/2; \pi/2]$. Cette valeur sert de départ ; elle ne remplace pas la recherche de l'autre famille ni le filtrage par le domaine.

Contrôler le signe et les bornes. Un sinus positif place les points dans la moitié supérieure, un sinus négatif dans la moitié inférieure. Pour b égal à 1 ou -1, les deux points se confondent. Pour b égal à zéro, les angles aux extrémités de l'intervalle doivent être examinés avec soin.

📖 Définition | Comprendre la notion

L'équation $\sin x = b$ n'a pas de solution si $b \notin [-1; 1]$. Si $\sin \alpha = b$, ses solutions sont $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$, avec k entier. Les deux points ont la même ordonnée et sont symétriques par

rapport à l'axe vertical. Pour une valeur négative, il faut examiner la moitié inférieure du cercle. La touche arcsinus donne une seule valeur principale ; elle ne fournit pas à elle seule toutes les solutions de l'équation. Le filtrage par l'intervalle et la gestion des bornes restent nécessaires.

💡 Exemple | Exemple commenté

Pour $\sin x = 1/2$ sur $[0; 2\pi]$, un angle connu est $\pi/6$. La symétrie verticale donne $\pi - \pi/6 = 5\pi/6$. Les deux solutions sont dans la moitié supérieure du cercle, où le sinus est positif.

Pour $\sin x = -1/2$ sur $]-\pi; \pi]$, l'angle de référence peut être $-\pi/6$. L'autre famille donne $\pi + \pi/6 = 7\pi/6$, qui est hors de l'intervalle. On retire un tour et l'on obtient $7\pi/6 - 2\pi = -5\pi/6$.

Les solutions sont donc $-\pi/6$ et $-5\pi/6$. Leur signe négatif ne suffit pas seul à justifier la réponse ; le contrôle du sinus et de l'appartenance au domaine termine la résolution.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

L'autre solution d'une équation de sinus n'est pas généralement l'opposé de la première. L'opposé change le signe du sinus ; la symétrie verticale utilise $\pi - \alpha$.

À toi d'essayer : Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

$\sin x = 1$ sur $[0; 2\pi]$ donne...

1. $x = 3\pi/2$
2. $x = \pi$
3. $x = \pi/2$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.3 Chercher les instants où un signal atteint une valeur

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Vérifier si la valeur est atteignable. Pour une amplitude A positive sans décalage vertical, le signal reste entre $-A$ et A . Si la cible c est en dehors, on peut conclure sans résoudre une équation d'angle.

Isoler l'oscillation. Dans $A \sin(\omega t + \varphi) = c$, on divise par A et l'on pose $\theta = \omega t + \varphi$. Le problème devient une équation trigonométrique standard en θ , avec un intervalle d'angles déduit de celui des temps.

Revenir aux instants. Après avoir trouvé les familles d'angles, on soustrait la phase puis on divise par la pulsation : $t = (\theta - \varphi)/\omega$. On ne supprime pas la phase sans effectuer cette transformation.

Gérer les bornes d'une période. Sur un intervalle fermé contenant une période complète, l'état initial et l'état final peuvent tous deux satisfaire l'équation. Ils correspondent à deux instants différents, même si le signal et la direction sont identiques. On garde donc les deux si les bornes sont incluses.

Définition | Comprendre la notion

Pour résoudre $A \sin(\omega t + \varphi) = c$, divise d'abord par A , supposé non nul, et pose $\theta = \omega t + \varphi$. Résous $\sin \theta = c/A$ avec les deux familles d'angles, puis reviens à $t = (\theta - \varphi)/\omega$. Garde seulement les instants de l'intervalle étudié. Si $|c| > A$ avec $A > 0$, la valeur est hors de l'amplitude et n'est jamais atteinte. Une recherche sur une seule période peut suffire si l'on réutilise ensuite la périodicité. Les unités de t et de la pulsation doivent être cohérentes.

Exemple | Exemple commenté

Réolvons $2 \sin(\pi t) = 1$ sur $[0; 2]$. L'amplitude 2 permet d'atteindre 1. On divise par 2 : $\sin(\pi t) = 1/2$, puis on pose $\theta = \pi t$.

Quand t parcourt $[0; 2]$, l'angle parcourt $[0; 2\pi]$. Dans cet intervalle, le sinus vaut $1/2$ pour $\theta = \pi/6$ ou $\theta = 5\pi/6$. La division par π donne $t = 1/6$ ou $t = 5/6$.

Les deux valeurs appartiennent au domaine et la substitution donne $2 \times 1/2 = 1$. La seconde moitié de période a un sinus négatif et ne peut pas fournir la valeur positive demandée. Cela confirme que les deux instants trouvés sont tous les instants possibles.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Les deux extrémités d'une période peuvent représenter le même état mais restent deux instants distincts. Ne supprime pas une borne autorisée sous prétexte de périodicité.

À toi d'essayer : Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Pour $A \sin(\omega t + \varphi) = c$, la première étape habituelle est...

1. Multiplier t par A
2. Diviser par A si A est non nul
3. Supprimer la phase sans calcul

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.4 Représenter une sinusoïde par un vecteur de Fresnel

Intuition | Construire la notion pas à pas

Fixer une convention de lecture. Ici, un signal $A \sin(\omega t + \varphi)$ est représenté par la projection verticale d'un vecteur tournant. Sa norme vaut A et son angle initial vaut φ . Annoncer cette convention sinus est nécessaire avant de lire les coordonnées.

Passer de la formule au vecteur initial. À t égal à zéro, le vecteur a pour coordonnées $(A \cos \varphi; A \sin \varphi)$. Sa composante verticale est donc exactement la valeur initiale du signal. Sa composante horizontale n'est pas cette valeur initiale.

Comprendre l'évolution. Après une durée t , le vecteur a tourné d'un angle ωt . Sa norme reste A et sa projection verticale devient $A \sin(\omega t + \varphi)$, ce qui retrouve la formule du signal.

Revenir du vecteur à la sinusoïde. À partir de coordonnées $(x; y)$ non nulles simultanément, l'amplitude est $\sqrt{x^2 + y^2}$. Les relations $\cos \varphi = x/A$ et $\sin \varphi = y/A$ donnent la phase et son quadrant. Un vecteur nul représente un signal nul, dont la phase n'est pas déterminée.

Définition | Comprendre la notion

On adopte ici la convention sinus : le signal $s(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, avec $A \geq 0$, est représenté à l'instant initial par un vecteur de norme A et d'angle φ avec l'axe horizontal. Le vecteur tourne à la pulsation ω ; sa projection verticale donne le signal. Ses coordonnées initiales sont $(A \cos \varphi; A \sin \varphi)$. La somme de vecteurs de Fresnel représente la somme de signaux de même pulsation et de même convention. Il faut annoncer sinus ou cosinus : mélanger les conventions sans conversion introduit un décalage de $\pi/2$.

Exemple | Exemple commenté

Le signal $4 \sin(\omega t + \pi/2)$ possède une amplitude 4 et une phase initiale $\pi/2$. Son vecteur initial est $(4 \cos(\pi/2); 4 \sin(\pi/2)) = (0; 4)$. Il pointe vers le haut et sa projection verticale vaut 4 : le signal commence au maximum.

Le signal $4 \sin(\omega t)$ possède au contraire le vecteur initial $(4; 0)$. Sa norme est également 4, mais sa projection initiale est zéro. Les deux signaux ont donc la même amplitude et le même rythme, mais pas la même valeur au départ.

Après un quart de période, le second vecteur atteint le haut du cercle. Cette lecture relie la phase, le décalage temporel et la valeur du signal sans confondre amplitude et hauteur instantanée.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

La norme du vecteur est l'amplitude maximale ; sa projection est une valeur instantanée. Un vecteur horizontal peut avoir une grande norme alors que le signal sinus vaut zéro à cet instant.

À toi d'essayer : Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Dans la convention sinus, la phase est représentée par...

1. Sa pulsation uniquement
2. Sa norme
3. L'angle initial du vecteur

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.5 Additionner des signaux avec Fresnel** Intuition | Construire la notion pas à pas**

Vérifier une rotation commune. La somme de vecteurs de Fresnel représente la somme de signaux de même pulsation, écrits dans la même convention. Les vecteurs tournent alors ensemble et leur somme tourne au même rythme. Avec des pulsations différentes, on ne peut pas conserver un seul vecteur résultant fixe dans ce cadre.

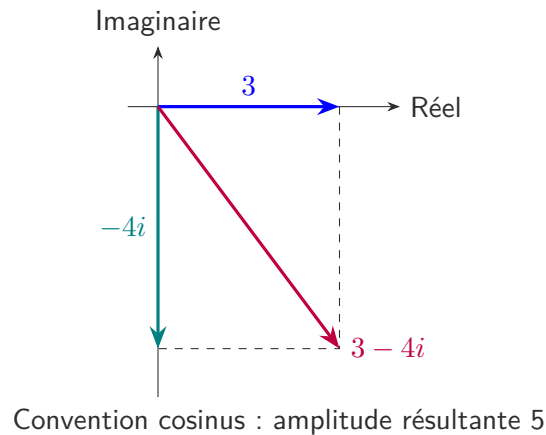
Additionner les coordonnées, pas les normes. On transforme chaque couple amplitude-phase en coordonnées, puis on additionne les composantes horizontales et verticales. La norme du vecteur somme se calcule après cette addition.

Comprendre les cas particuliers. Des vecteurs en phase pointent dans la même direction : leurs amplitudes s'additionnent. En opposition, ils pointent en sens contraire et se compensent partiellement ou totalement. Pour d'autres phases, la géométrie du triangle détermine l'amplitude résultante.

Retrouver la phase de la somme. Si les coordonnées résultantes sont $(x; y)$ et la norme A non nulle, on utilise $\cos \varphi = x/A$ et $\sin \varphi = y/A$. Le quadrant est indispensable. Si la somme est nulle, le signal est nul et aucune phase particulière n'est imposée.

** Définition | Comprendre la notion**

Pour deux signaux sinusoïdaux de même pulsation, transforme chaque amplitude et phase en coordonnées de Fresnel, puis additionne les coordonnées. La norme du vecteur somme donne l'amplitude résultante ; son angle donne la phase. Deux signaux en phase additionnent leurs amplitudes. En opposition de phase, leurs effets se soustraient. Pour des phases quelconques, les amplitudes seules ne s'additionnent pas. Si le vecteur résultant est nul, le signal somme est nul et sa phase n'a pas de valeur unique. Un logiciel peut déterminer l'angle ; le quadrant doit être vérifié, notamment quand une composante est négative.



💡 Exemple | Exemple commenté

Les signaux $3 \sin(\omega t)$ et $4 \sin(\omega t + \pi/2)$ ont pour vecteurs initiaux $(3; 0)$ et $(0; 4)$. Leur somme est $(3; 4)$, de norme $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

La phase résultante satisfait $\cos \varphi = 3/5$ et $\sin \varphi = 4/5$. Elle est dans le premier quadrant et vaut environ 0,9273 radian. Le signal somme s'écrit donc $5 \sin(\omega t + \varphi)$.

À t égal à zéro, les deux signaux donnent 0 et 4. La forme résultante donne $5 \sin \varphi = 4$, ce qui vérifie la projection. L'amplitude 5 n'est pas la somme 7, parce que les maxima des deux signaux déphasés ne sont pas atteints au même instant.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Les amplitudes ne s'additionnent directement que pour des signaux en phase. Avant de calculer une norme résultante, additionne les vecteurs ou leurs coordonnées.

À toi d'essayer : Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Deux sinusoïdes de même pulsation et d'amplitudes 3 et 4 ont toujours une amplitude totale de 7...

1. Vrai même en opposition
2. Faux
3. Vrai

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 25](#)

4 Boîte à outils

🔧 Méthode | Résoudre une équation de cosinus

1. Isole le cosinus et vérifie que sa valeur imposée appartient à $[-1; 1]$.
2. Trouve un angle de référence α dans $[0; \pi]$.
3. Écris les deux familles $\alpha + 2k\pi$ et $-\alpha + 2k\pi$.
4. Filtre par l'intervalle et supprime les doublons.
5. Substitue les angles retenus et vérifie les bornes ouvertes ou fermées.

 Méthode | Résoudre une équation de sinus

1. Isole le sinus et vérifie que la valeur cible est entre -1 et 1.
2. Trouve un angle de référence exact ou avec arcsinus en mode radian.
3. Construis les familles $\alpha + 2k\pi$ et $\pi - \alpha + 2k\pi$.
4. Ajoute ou retire des tours pour ne garder que les angles du domaine.
5. Contrôle les signes, les bornes et les doublons ; arrondis seulement les résultats finaux.

 Méthode | Chercher les instants où un signal atteint une valeur

1. Compare la cible à l'amplitude pour exclure une valeur impossible.
2. Divise par le facteur extérieur et pose l'angle complet comme inconnue.
3. Traduis l'intervalle de temps en intervalle d'angles ou écris les familles générales.
4. Résous l'équation trigonométrique puis isole t en conservant la phase.
5. Filtre par l'intervalle temporel, contrôle les bornes et substitue les instants retenus.

 Méthode | Représenter une sinusoïde par un vecteur de Fresnel

1. Annonce la convention sinus ou cosinus avant de représenter le signal.
2. Relève l'amplitude positive et la phase initiale.
3. Calcule les coordonnées $(A \cos \varphi; A \sin \varphi)$.
4. Pour le retour au signal, calcule la norme puis l'angle avec les deux signes.
5. Contrôle la valeur à t égal à zéro par la projection correspondant à la convention.

 Méthode | Additionner des signaux avec Fresnel

1. Vérifie la même pulsation et la même convention.
2. Convertis chaque amplitude-phase en deux coordonnées.
3. Additionne séparément les composantes.
4. Calcule la norme résultante puis la phase à partir des deux composantes normalisées.
5. Contrôle une valeur instantanée et traite séparément le cas du vecteur nul.

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases ; 6 à 10 demandent plusieurs étapes ; 11 à 15 t'invitent à choisir, justifier et contrôler. Cherche avant de consulter les indices.

Exercice 1 — Une valeur remarquable ★★☆☆

Résous $\cos x = 0$ sur $] -\pi; \pi]$.

Exercice 2 — Un sinus nul ★★☆☆

Résous $\sin x = 0$ sur $] -\pi; \pi]$.

Exercice 3 — Une valeur impossible ★★☆☆

Le signal est $s(t) = 3 \sin(2t)$. Peut-il atteindre 4 ?

Exercice 4 — Vecteur initial ★★☆☆

Dans la convention sinus, donne le vecteur de Fresnel de $3 \sin(\omega t)$.

Exercice 5 — En phase ★★☆☆

Additionne $2 \sin(\omega t)$ et $5 \sin(\omega t)$.

Exercice 6 — Des bornes précises ★★☆☆

Résous $\cos x = -1/2$ sur $[0; 2\pi]$.

Exercice 7 — Une valeur négative ★★☆☆

Résous $\sin x = -\sqrt{2}/2$ sur $[0; 2\pi]$.

Exercice 8 — Les passages par zéro ★★☆☆

Résous $4 \sin(2\pi t) = 0$ pour $t \in [0; 1]$.

Exercice 9 — Une phase opposée ★★☆☆

Donne le vecteur de Fresnel de $2 \sin(\omega t + \pi)$.

Exercice 10 — En opposition ★★☆☆

Additionne $5 \sin(\omega t)$ et $3 \sin(\omega t + \pi)$.

Exercice 11 — Une équation transformée ★★☆☆

Résous $2 \cos x + 1 = 0$ sur $] -\pi; \pi]$.

Exercice 12 — Une solution oubliée ★★☆☆

Une calculatrice donne $\arcsin(0,6) \approx 0,6435$. Donne toutes les solutions de $\sin x = 0,6$ sur $[0; 2\pi]$ à 10^{-3} près.

Exercice 13 — Une phase à retirer ★★☆☆

Résous $\sin(\pi t + \pi/2) = 1$ sur $[0; 2]$.

Exercice 14 — Retrouver amplitude et phase ★★ ★

Un vecteur de Fresnel a pour coordonnées $(3; 3)$ dans la convention sinus. Écris le signal de pulsation ω .

Exercice 15 — Deux composantes perpendiculaires ★★ ★

Additionne $6 \sin(\omega t)$ et $8 \sin(\omega t + \pi/2)$. Donne amplitude et caractérisation de la phase.

6 Problème — Pour aller plus loin

Recomposer deux signaux de même fréquence

On additionne $s_1(t) = 3 \cos(2t)$ et $s_2(t) = 4 \sin(2t)$, avec t en secondes.

1. Écris les deux signaux sous la convention cosinus et donne leurs vecteurs de Fresnel.
2. Additionne les vecteurs et trouve l'amplitude résultante.
3. Écris la somme sous la forme $A \cos(2t + \varphi)$ et donne une phase adaptée.
4. Donne la période de la somme.
5. Résous $s_1(t) = 0$ sur $[0; \pi]$ puis $\sin(2t) = 1/2$ sur ce même intervalle.

7 Indices des exercices

Exercice 1

Indice 1. Le cosinus est l'abscisse.

Indice 2. Cherche les points du cercle sur l'axe vertical.

Exercice 2

Indice 1. Le sinus est nul sur l'axe horizontal.

Indice 2. Contrôle les deux bornes de l'intervalle.

Exercice 3

Indice 1. Compare la valeur demandée à l'amplitude.

Indice 2. Un sinus ne dépasse pas 1.

Exercice 4

Indice 1. La phase est nulle.

Indice 2. Les coordonnées sont amplitude fois cosinus et sinus.

Exercice 5

Indice 1. Les deux vecteurs ont le même sens.

Indice 2. Les amplitudes s'additionnent dans ce cas particulier.

Exercice 6

Indice 1. Le cosinus est négatif dans les deuxième et troisième quadrants.

Indice 2. Les deux angles sont symétriques par rapport à l'axe horizontal.

Exercice 7

Indice 1. Le signe négatif impose la moitié inférieure.

Indice 2. Utilise l'angle de référence $\pi/4$.

Exercice 8

Indice 1. Le sinus s'annule aux multiples de π .

Indice 2. Filtre les valeurs de k avec l'intervalle de temps.

Exercice 9

Indice 1. Un demi-tour inverse le vecteur.

Indice 2. $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$.

Exercice 10

Indice 1. Un déphasage de π change le signe.

Indice 2. Les vecteurs sont de sens opposés.

Exercice 11

Indice 1. Commence par isoler le cosinus.

Indice 2. Utilise les angles associés à $\pi/3$.

Exercice 12

Indice 1. La valeur principale n'est qu'un des deux points.

Indice 2. L'autre angle vaut $\pi - \alpha$.

Exercice 13

Indice 1. Commence par l'angle qui donne un sinus égal à 1.

Indice 2. Les bornes 0 et 2 sont toutes deux incluses.

Exercice 14

Indice 1. L'amplitude est la norme du vecteur.

Indice 2. Le point est sur la bissectrice du premier quadrant.

Exercice 15

Indice 1. Les deux vecteurs sont perpendiculaires.

Indice 2. L'amplitude résulte de Pythagore, pas de $6 + 8$.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On cherche les points du cercle dont l'abscisse vaut zéro.

Construire la réponse.

1. Ils sont situés en haut et en bas du cercle, aux coordonnées $(0; 1)$ et $(0; -1)$.
2. Leurs angles dans $] -\pi; \pi]$ sont $\pi/2$ et $-\pi/2$.

Vérifier. Les deux angles sont dans le domaine et leurs cosinus valent zéro. Il n'y a pas d'autre point du cercle d'abscisse nulle.

Conclure. Les solutions sont $-\pi/2$ et $\pi/2$.

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Une ordonnée nulle correspond aux deux points du cercle situés sur l'axe horizontal.

Construire la réponse.

1. Les angles sont les multiples de π .
2. Dans $] -\pi; \pi]$, zéro et π sont autorisés; $-\pi$ est exclu par la borne ouverte.
3. Les autres multiples sont en dehors de l'intervalle.

Vérifier. $\sin 0 = 0$ et $\sin \pi = 0$. La différence entre π inclus et $-\pi$ exclu vient du domaine, pas d'une différence de position sur le cercle.

Conclure. Les solutions sont 0 et π .

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On peut décider à partir de l'amplitude avant de chercher des instants.

Construire la réponse.

1. Le sinus est compris entre -1 et 1, donc $-3 \leq 3 \sin(2t) \leq 3$.
2. La valeur 4 est supérieure au maximum possible 3.
3. L'équation demanderait $\sin(2t) = 4/3$, une valeur hors de $[-1; 1]$.

Vérifier. Le coefficient 2 de t change le rythme, pas l'amplitude. Il ne permet donc pas de dépasser 3.

Conclure. Non : ce signal ne peut pas atteindre 4.

Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le signal est écrit dans la convention sinus avec une phase initiale nulle.
Construire la réponse.

1. On identifie $A = 3$ et $\varphi = 0$.
2. Les coordonnées sont $(3 \cos 0; 3 \sin 0) = (3; 0)$.

Vérifier. La norme du vecteur vaut 3 et sa projection verticale initiale zéro, comme $3 \sin 0$. Une amplitude 3 n'impose donc pas une valeur initiale 3.

Conclure. Le vecteur de Fresnel initial a pour coordonnées $(3; 0)$.

Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les deux signaux ont la même pulsation et la même phase.

Construire la réponse.

1. Leurs vecteurs initiaux sont $(2; 0)$ et $(5; 0)$.
2. La somme vaut $(7; 0)$, d'amplitude 7 et de phase zéro.
3. Le signal résultant est donc $7 \sin(\omega t)$.

Vérifier. La factorisation directe $2 \sin(\omega t) + 5 \sin(\omega t) = (2 + 5) \sin(\omega t)$ confirme le calcul vectoriel.

Conclure. La somme est $7 \sin(\omega t)$.

Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le cosinus négatif place les points dans la moitié gauche du cercle.

Construire la réponse.

1. Un angle de référence dans $[0; \pi]$ est $2\pi/3$, dont le cosinus vaut $-1/2$.
2. Son symétrique horizontal a pour mesure $-2\pi/3$. Pour le placer dans $[0; 2\pi]$, on ajoute un tour : $-2\pi/3 + 2\pi = 4\pi/3$.
3. Les deux angles retenus sont donc $2\pi/3$ et $4\pi/3$.

Vérifier. Ils sont dans les deuxième et troisième quadrants, avec la même abscisse négative. Les bornes zéro et 2π ont un cosinus égal à 1 et ne conviennent pas.

Conclure. Les solutions sont $2\pi/3$ et $4\pi/3$.

Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le sinus négatif impose des points dans la moitié inférieure du cercle.

Construire la réponse.

1. La valeur absolue $\sqrt{2}/2$ correspond à l'angle de référence $\pi/4$.
2. Dans le troisième quadrant, l'angle est $\pi + \pi/4 = 5\pi/4$.
3. Dans le quatrième, l'angle est $2\pi - \pi/4 = 7\pi/4$.

Vérifier. Les deux angles appartiennent à $[0; 2\pi]$ et leurs sinus valent $-\sqrt{2}/2$. Les angles $\pi/4$ et $3\pi/4$ auraient un sinus positif.

Conclure. Les solutions sont $5\pi/4$ et $7\pi/4$.

Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On cherche les zéros sur un intervalle temporel fermé.

Construire la réponse.

1. En divisant par 4, $\sin(2\pi t) = 0$. Les angles correspondants sont $2\pi t = k\pi$ pour k entier.
2. On divise par 2π : $t = k/2$.
3. La contrainte $0 \leq t \leq 1$ devient $0 \leq k \leq 2$. Les entiers sont 0, 1 et 2.

Vérifier. Les angles obtenus sont 0, π et 2π , dont les sinus valent tous zéro. Les deux extrémités sont incluses dans le domaine.

Conclure. Les instants sont 0, $1/2$ et 1.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La phase initiale est un demi-tour.

Construire la réponse.

1. On identifie $A = 2$ et $\varphi = \pi$.
2. Les coordonnées sont $(2 \cos \pi; 2 \sin \pi) = (-2; 0)$.

Vérifier. Le vecteur est opposé à $(2; 0)$, celui de $2 \sin(\omega t)$. L'identité $\sin(\omega t + \pi) = -\sin(\omega t)$ confirme l'opposition des signaux.

Conclure. Le vecteur initial est $(-2; 0)$.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le second signal est en opposition de phase avec le premier.

Construire la réponse.

1. Les vecteurs sont $(5; 0)$ et $(3 \cos \pi; 3 \sin \pi) = (-3; 0)$.
2. Leur somme vaut $(2; 0)$, donc l'amplitude est 2 et la phase zéro.
3. On retrouve aussi $3 \sin(\omega t + \pi) = -3 \sin(\omega t)$.

Vérifier. La somme algébrique vaut $(5 - 3) \sin(\omega t) = 2 \sin(\omega t)$. Les effets se compensent partiellement au lieu d'additionner leurs amplitudes à 8.

Conclure. Le signal somme est $2 \sin(\omega t)$.

Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On commence par isoler le cosinus avant d'utiliser le cercle.

Construire la réponse.

1. $2 \cos x + 1 = 0$ donne $2 \cos x = -1$, puis $\cos x = -1/2$.
2. L'angle de référence est $2\pi/3$ et son symétrique $-2\pi/3$.
3. Les deux appartiennent à $] -\pi; \pi]$ et aucun autre représentant d'un tour ne convient dans ce domaine.

Vérifier. Pour chacun, $2(-1/2) + 1 = 0$. Le calcul vérifie l'équation initiale, pas seulement l'équation intermédiaire.

Conclure. Les solutions sont $-2\pi/3$ et $2\pi/3$.

Corrigé 12

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. L'arcsinus donne une première solution ; il faut utiliser la symétrie pour la seconde.

Construire la réponse.

1. On conserve la valeur non arrondie $\alpha = \arcsin(0,6) \approx 0,6435011088$.
2. La seconde solution sur la moitié supérieure est $\pi - \alpha \approx 2,4980915448$.
3. Le sinus est négatif sur la moitié inférieure, donc aucune autre solution n'y correspond à 0,6.
4. Au millième, les deux valeurs sont 0,644 et 2,498 radians.

Vérifier. Les deux angles sont symétriques autour de $\pi/2$ et leur somme exacte vaut π . L'usage des valeurs non arrondies évite une perte de précision sur le second angle.

Conclure. Les solutions approchées sont 0,644 et 2,498 radians à 10^{-3} près.

Corrigé 13

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le sinus vaut 1 uniquement au sommet du cercle, modulo un tour.

Construire la réponse.

1. On écrit $\pi t + \pi/2 = \pi/2 + 2k\pi$ avec k entier.
2. On soustrait $\pi/2$ aux deux membres : $\pi t = 2k\pi$.
3. On divise par π : $t = 2k$. Dans $[0; 2]$, les valeurs possibles sont t égal à 0 et à 2.

Vérifier. À zéro, l'angle vaut $\pi/2$; à 2, il vaut $5\pi/2$, soit un tour de plus. Le sinus vaut 1 dans les deux cas et les bornes sont incluses.

Conclure. Les solutions sont les deux instants 0 et 2.

Corrigé 14 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On connaît les coordonnées du vecteur et l'on doit retrouver amplitude et phase.

Construire la réponse.

1. La norme est $A = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
2. Les composantes normalisées sont $3/(3\sqrt{2}) = \sqrt{2}/2$ pour le cosinus et pour le sinus.
3. Les deux composantes positives et égales donnent $\varphi = \pi/4$.
4. Le signal est donc $3\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/4)$.

Vérifier. À t égal à zéro, la valeur est $3\sqrt{2} \times \sqrt{2}/2 = 3$, qui retrouve la coordonnée verticale. L'amplitude $3\sqrt{2}$ est bien supérieure à cette hauteur initiale.

Conclure. Le signal est $3\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/4)$ dans la convention sinus.

Corrigé 15 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les vecteurs initiaux sont perpendiculaires ; on additionne leurs coordonnées avant de calculer la norme.

Construire la réponse.

1. Le premier vecteur est $(6; 0)$ et le second $(0; 8)$. La somme vaut $(6; 8)$.
2. L'amplitude est $A = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$.
3. La phase est dans le premier quadrant et vérifie $\cos \varphi = 6/10 = 0,6$, $\sin \varphi = 8/10 = 0,8$.
4. On peut choisir $\varphi \approx 0,9273$ radian et écrire $10\sin(\omega t + \varphi)$.

Vérifier. À t égal à zéro, les signaux d'origine totalisent 8 ; la forme résultante donne $10 \times 0,8 = 8$. De plus $0,6^2 + 0,8^2 = 1$ valide les composantes normalisées.

Conclure. L'amplitude est 10 et la phase est caractérisée par cosinus 0,6 et sinus 0,8.

9 Corrigé du problème

1. **Comprendre la question.** Les vecteurs de Fresnel doivent tous utiliser la même convention, ici le cosinus.

Construire la réponse.

- (a) Le premier signal est déjà $3 \cos(2t)$: amplitude 3, phase 0, vecteur $(3 \cos 0; 3 \sin 0) = (3; 0)$.
 (b) On écrit $\sin(2t) = \cos(2t - \pi/2)$. Le second signal a donc une amplitude 4 et une phase $-\pi/2$.
 (c) Son vecteur est $(4 \cos(-\pi/2); 4 \sin(-\pi/2)) = (0; -4)$.

Vérifier. La formule $\cos(\alpha - \pi/2) = \sin \alpha$ confirme le signe négatif de la phase.

Conclure. Les vecteurs en convention cosinus sont $(3; 0)$ et $(0; -4)$.

2. **Comprendre la question.** La somme des signaux de même fréquence se traduit par une somme vectorielle.

Construire la réponse.

- (a) Le vecteur résultant est $(3; 0) + (0; -4) = (3; -4)$.
 (b) Son amplitude est sa norme : $A = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$.

Vérifier. Additionner les amplitudes 3 et 4 donnerait 7 seulement pour des signaux en phase. Ici leurs phases sont décalées d'un quart de tour.

Conclure. L'amplitude résultante est 5.

3. **Comprendre la question.** La phase doit correspondre au bon quadrant et retrouver les deux coefficients lors du développement.

Construire la réponse.

- (a) On veut $\cos \varphi = 3/5$ et $\sin \varphi = -4/5$, donc une phase dans le quatrième quadrant.
 (b) On peut choisir $\varphi = -\arctan(4/3) \approx -0,9273$ radian.
 (c) En développant, $5 \cos(2t + \varphi) = 5 \cos \varphi \cos(2t) - 5 \sin \varphi \sin(2t)$.
 (d) Les coefficients deviennent 3 et +4, exactement ceux de la somme initiale.

Vérifier. Le signe moins de la formule d'addition transforme le sinus négatif de la phase en un coefficient positif devant le signal sinus.

Conclure. La somme vaut $5 \cos(2t - \arctan(4/3))$.

4. **Comprendre la question.** Les deux signaux ont conservé la même pulsation 2 dans leur somme.

Construire la réponse.

- (a) La période d'un signal non nul de pulsation 2 est $T = 2\pi/2 = \pi$ secondes.
 (b) La phase décale la courbe horizontalement sans changer sa période.

Vérifier. Augmenter t de π ajoute 2π à l'argument, ce qui conserve le cosinus.

Conclure. La période de la somme est π secondes.

5. **Comprendre la question.** On résout d'abord pour l'angle $2t$, dont l'intervalle est deux fois plus large.

Construire la réponse.

- (a) Pour $t \in [0; \pi]$, l'angle $2t$ appartient à $[0; 2\pi]$.
 (b) $s_1(t) = 0$ équivaut à $\cos(2t) = 0$. Les angles sont $\pi/2$ et $3\pi/2$, donc $t = \pi/4$ ou $3\pi/4$.
 (c) Pour $\sin(2t) = 1/2$, les angles sont $\pi/6$ et $5\pi/6$. En divisant par 2, $t = \pi/12$ ou $5\pi/12$.

Vérifier. Toutes les solutions obtenues sont dans l'intervalle imposé. Les angles de chaque liste redonnent la valeur trigonométrique demandée.

Conclure. Les zéros de s_1 sont $\pi/4$ et $3\pi/4$; les solutions du sinus sont $\pi/12$ et $5\pi/12$.

10 Variante autonome et bilan

Recompose $2 \cos t + 2 \sin t$ et résous son égalité à zéro sur $[0; 2\pi]$.

À toi d'essayer : Vérifie ta démarche

Résous la variante, puis explique pourquoi ta méthode s'applique.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 24 Explication, p. 25

- Je peux expliquer : résoudre une équation de cosinus.
- Je peux expliquer : résoudre une équation de sinus.
- Je peux expliquer : chercher les instants où un signal atteint une valeur.
- Je peux expliquer : représenter une sinusoïde par un vecteur de fresnel.
- Je peux expliquer : additionner des signaux avec fresnel.

11 Fiche-mémoire

Résoudre une équation de cosinus.

1. Isole le cosinus et vérifie que sa valeur imposée appartient à $[-1; 1]$.
2. Trouve un angle de référence α dans $[0; \pi]$.
3. Écris les deux familles $\alpha + 2k\pi$ et $-\alpha + 2k\pi$.
4. Filtre par l'intervalle et supprime les doublons.
5. Substitue les angles retenus et vérifie les bornes ouvertes ou fermées.

Résoudre une équation de sinus.

1. Isole le sinus et vérifie que la valeur cible est entre -1 et 1.
2. Trouve un angle de référence exact ou avec arcsinus en mode radian.
3. Construis les familles $\alpha + 2k\pi$ et $\pi - \alpha + 2k\pi$.
4. Ajoute ou retire des tours pour ne garder que les angles du domaine.
5. Contrôle les signes, les bornes et les doublons ; arrondis seulement les résultats finaux.

Chercher les instants où un signal atteint une valeur.

1. Compare la cible à l'amplitude pour exclure une valeur impossible.
2. Divise par le facteur extérieur et pose l'angle complet comme inconnue.
3. Traduis l'intervalle de temps en intervalle d'angles ou écris les familles générales.
4. Résous l'équation trigonométrique puis isole t en conservant la phase.
5. Filtre par l'intervalle temporel, contrôle les bornes et substitue les instants retenus.

Représenter une sinusoïde par un vecteur de Fresnel.

1. Annonce la convention sinus ou cosinus avant de représenter le signal.
2. Relève l'amplitude positive et la phase initiale.
3. Calcule les coordonnées $(A \cos \varphi; A \sin \varphi)$.
4. Pour le retour au signal, calcule la norme puis l'angle avec les deux signes.
5. Contrôle la valeur à t égal à zéro par la projection correspondant à la convention.

Additionner des signaux avec Fresnel.

1. Vérifie la même pulsation et la même convention.
2. Convertis chaque amplitude-phase en deux coordonnées.
3. Additionne séparément les composantes.
4. Calcule la norme résultante puis la phase à partir des deux composantes normalisées.
5. Contrôle une valeur instantanée et traite séparément le cas du vecteur nul.

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Le cosinus est une abscisse sur un cercle de rayon 1.

Indice 2 — Un pas de plus.

Cette abscisse ne peut pas dépasser 1.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Le sinus est l'ordonnée sur le cercle unité.

Indice 2 — Un pas de plus.

La hauteur 1 est atteinte uniquement au sommet.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Le facteur A multiplie toute la fonction trigonométrique.

Indice 2 — Un pas de plus.

Pour isoler le sinus, on annule ce facteur s'il est non nul.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

La norme représente la grandeur A.

Indice 2 — Un pas de plus.

L'orientation de départ représente le décalage de phase.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve**Indice 1 — Une piste.**

Le déphasage modifie la direction relative des vecteurs.

Indice 2 — Un pas de plus.

En opposition de phase, des amplitudes 3 et 4 donneraient une amplitude 1.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche**Indice 1 — Une piste.**

Repère les données utiles et l'inconnue. Reviens à la méthode correspondante dans la boîte à outils.

Indice 2 — Un pas de plus.

Contrôle les unités, les bornes et la plausibilité du résultat avant de lire la correction.

[Revenir à la recherche, p. 22](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

$\cos x = 2$ n'a aucune solution réelle.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Sur $[0; 2\pi]$, l'unique solution est $x = \pi/2$.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

La première étape habituelle est de diviser par A.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

La phase est l'angle initial du vecteur.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Faux : l'amplitude résultante dépend du déphasage et n'est pas toujours 7.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche

Comprendre la question. Les deux composantes ont la même amplitude et sont en quadrature.

Construire la réponse.

1. En convention cosinus, leurs vecteurs sont $(2; 0)$ et $(0; -2)$. La somme $(2; -2)$ a pour norme $2\sqrt{2}$ et pour argument $-\pi/4$.
2. Le signal est donc $2\sqrt{2}\cos(t - \pi/4)$.
3. Il est nul lorsque $t - \pi/4 = \pi/2 + k\pi$, soit $t = 3\pi/4 + k\pi$.
4. Sur $[0; 2\pi]$, seuls k égal à 0 et 1 conviennent, donnant $3\pi/4$ et $7\pi/4$.

Vérifier. Le développement du cosinus redonne $2\cos t + 2\sin t$; aux deux temps retenus, les deux termes sont opposés.

Conclure. La somme est $2\sqrt{2}\cos(t - \pi/4)$ et ses zéros demandés sont $3\pi/4$ et $7\pi/4$.

[Revenir à la recherche, p. 22](#)