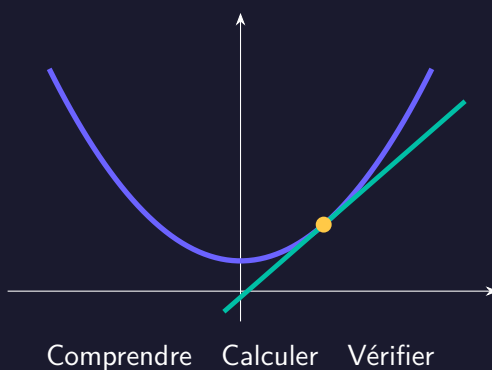


FICHE 01

Exponentielle et logarithme népérien

Analyse ■ Comprendre et s'entraîner



Terminale STI2D — spécialité maths
Année scolaire 2026–2027

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	Pourquoi ce chapitre ?	3
2	L'idée avant la formule	3
3	Le cours formel	3
3.1	La fonction exponentielle de base e	3
3.2	Limites et modèles exponentiels	4
3.3	Le logarithme népérien	6
3.4	Dériver et étudier le logarithme	7
3.5	Comparer exponentielle et puissances à l'infini	8
4	Boîte à outils	9
5	Exercices progressifs	11
6	Problème — Pour aller plus loin	13
7	Indices des exercices	14
8	Corrigés détaillés	16
9	Corrigé du problème	21
10	Variante autonome et bilan	23
11	Fiche-mémoire	23
12	Indices des pauses et des preuves	24
13	Explications des pauses et des preuves	26

1 Pourquoi ce chapitre ?

Exponentielle, logarithme et dérivée permettent de décrire un signal qui monte puis décroît et de justifier son comportement à long terme. **Ton parcours.** Partie mathématiques de la spécialité physique-chimie et mathématiques en STI2D. Cette fiche complète les cours de mathématiques communs ; elle ne remplace pas les enseignements de physique-chimie.

- La fonction exponentielle de base e .
- Limites et modèles exponentiels.
- Le logarithme népérien.
- Dériver et étudier le logarithme.
- Comparer exponentielle et puissances à l'infini.

2 L'idée avant la formule

Un facteur t augmente tandis qu'un facteur exponentiel décroît. Leur produit peut d'abord monter, puis redescendre : le signe de la dérivée décide.

3 Le cours formel

3.1 La fonction exponentielle de base e

Intuition | Construire la notion pas à pas

Une exponentielle dont la pente égale la hauteur. La base particulière $e \approx 2,71828$ définit la fonction e^x . Sa propriété essentielle est que sa dérivée est elle-même : à chaque abscisse, la pente de la tangente est égale à la valeur de la fonction.

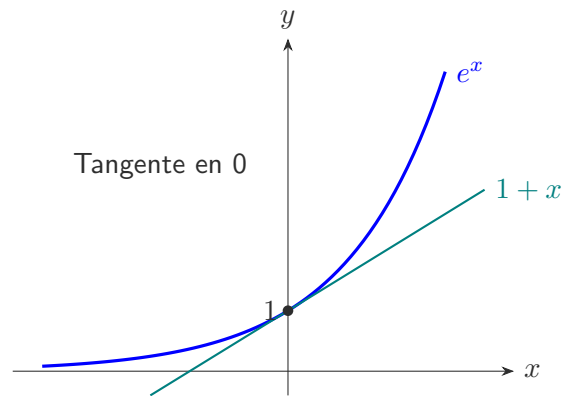
Positivité et croissance. Une exponentielle est toujours strictement positive, même lorsque son exposant est négatif. Comme la dérivée de e^x est positive, cette fonction est strictement croissante sur les réels. Elle ne possède aucune racine.

Conserver les règles des puissances. Le produit de deux exponentielles additionne leurs exposants, un quotient les soustrait, et $e^0 = 1$. L'exponentielle d'une somme devient un produit ; une somme d'exponentielles ne se réunit pas de cette manière.

Dériver une expression composée. Dans e^{kx} , l'exponentielle reste présente mais la dérivée de l'exposant apporte un facteur k . Ainsi $(Ae^{kx})' = Ake^{kx}$. Pour une fonction multipliée par une exponentielle, il faut appliquer la règle du produit : la positivité de l'exponentielle aide ensuite à étudier le signe.

Définition | Comprendre la notion

La fonction exponentielle e^x est la fonction de base e dont la tangente en zéro a une pente égale à 1 ; $e \approx 2,71828$. Elle est définie et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est elle-même : $(e^x)' = e^x$. Elle est donc strictement croissante. Les règles $e^{a+b} = e^a e^b$, $e^{-a} = 1/e^a$ et $e^0 = 1$ restent celles des puissances. Par composition affine, $(e^{kx})' = ke^{kx}$. La croissance dépend du signe de k . L'exponentielle n'est jamais nulle, ce qui simplifie les tableaux de signes.



💡 Exemple | Exemple commenté

Pour $f(x) = 3e^{-2x}$, le facteur 3 reste devant, l'exponentielle se conserve et l'exposant fournit sa dérivée -2. On obtient $f'(x) = -6e^{-2x}$.

L'exponentielle étant positive, f reste positive alors que sa dérivée est négative : la fonction décroît. En zéro, $f(0) = 3e^0 = 3$ et $f'(0) = -6$.

La tangente serait donc $y = -6x + 3$. Sa pente négative n'implique pas que la fonction elle-même devienne négative : cette droite ne donne qu'une description locale.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

L'exposant peut être négatif sans que l'exponentielle le soit. Dans un produit, son signe est toujours positif ; ce sont les autres facteurs qui déterminent le signe final.

À toi d'essayer : Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

La dérivée de e^x est...

1. xe^{x-1}
2. e^x
3. $1/x$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 26](#)

3.2 Limites et modèles exponentiels

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Étudier d'abord ce qui est dans l'exposant. Pour connaître la limite de $e^{u(x)}$, commence par la limite de u . Un exposant qui tend vers $+\infty$ produit une exponentielle qui grandit sans borne ; un exposant qui tend vers $-\infty$ produit une exponentielle qui se rapproche de zéro.

Zéro est une limite, pas une valeur atteinte. L'exponentielle reste positive pour tout argument réel. Dire qu'elle tend vers zéro signifie qu'elle peut devenir aussi petite que l'on veut, sans s'annuler à un instant fini.

Conserver les termes constants. Dans $L + Ae^{-kt}$ avec $k > 0$, le terme exponentiel s'efface à long terme et la limite est L . Cette constante peut représenter une température ambiante ou un équilibre. Elle ne disparaît pas dans un calcul de limite.

Reconnaître une forme indéterminée. Si deux termes tendent vers l'infini et sont soustraits, leurs limites séparées ne donnent pas la limite de la différence. On transforme l'expression, par exemple en factorisant une exponentielle commune, pour comparer leur croissance.

Définition | Comprendre la notion

Quand x tend vers $+\infty$, e^x tend vers $+\infty$; quand x tend vers $-\infty$, elle tend vers 0. La courbe a donc l'axe horizontal pour asymptote vers la gauche. Pour e^{kx} , étudie d'abord le signe et la limite de kx . Ainsi, avec $k > 0$, e^{-kx} tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Une somme constante plus une exponentielle décroissante peut tendre vers un équilibre non nul. Les opérations simples sur les limites sont utilisables, mais une forme comme $\infty - \infty$ demande une transformation avant de conclure.

Exemple | Exemple commenté

Pour $T(t) = 20 + 60e^{-0,2t}$, lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,2t$ tend vers $-\infty$. Donc $e^{-0,2t}$ tend vers zéro, puis $60e^{-0,2t}$ aussi.

La température tend vers $20 + 0 = 20$. Comme le terme ajouté est toujours positif, elle reste strictement supérieure à 20 pour tout temps fini, tout en s'en rapprochant.

En zéro, $T(0) = 80$. Le modèle décrit ainsi un rapprochement de 80 vers 20, et non un refroidissement vers zéro. La droite horizontale d'ordonnée 20 est l'asymptote à long terme.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

On ne calcule pas « infini moins infini » comme zéro. Les deux termes peuvent grandir à des vitesses différentes ; il faut transformer l'expression.

À toi d'essayer : Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Quand $x \rightarrow -\infty$, $e^x \rightarrow \dots$

1. 0
2. $+\infty$
3. $-\infty$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 24 [Explication](#), p. 26

3.3 Le logarithme népérien

Intuition | Construire la notion pas à pas

L'opération inverse de l'exponentielle. Le logarithme népérien de a est l'exposant qu'il faut donner à la base e pour obtenir a . Il est donc défini uniquement pour $a > 0$. Les identités $\ln(e^x) = x$ et $e^{\ln a} = a$ traduisent ce lien inverse sur les domaines adaptés.

Connaître les repères. Puisque $e^0 = 1$ et $e^1 = e$, on a $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$. Un argument entre 0 et 1 possède un logarithme négatif. La fonction $\ln$ est croissante, mais pas nécessairement positive.

Transformer une équation. Si l'inconnue est dans un exposant, $\ln$ permet de retrouver cet exposant. Si l'inconnue est dans un logarithme, l'exponentielle permet de retrouver l'argument. On doit vérifier au préalable les conditions de domaine, notamment pour un argument comme $x - 2$.

Manipuler une inégalité. Les deux fonctions étant croissantes, leur application conserve le sens. Une division ultérieure par un nombre négatif peut cependant le retourner. Les propriétés de produit, quotient et puissance ressemblent à celles du logarithme décimal, mais les valeurs numériques des deux logarithmes diffèrent.

Définition | Comprendre la notion

Pour $a > 0$, $\ln a$ est l'unique réel x tel que $e^x = a$. Les relations inverses sont $\ln(e^x) = x$ et $e^{\ln a} = a$. On a $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$ et $\ln(a^r) = r \ln a$ pour a, b positifs. La fonction $\ln$ est strictement croissante. Elle tend vers $-\infty$ lorsque son argument tend vers 0 par valeurs positives et vers $+\infty$ quand il tend vers $+\infty$. Les deux logarithmes sont liés par $\log x = \ln x / \ln 10$. Le domaine positif doit être vérifié avant de résoudre une équation ou une inéquation.

Exemple | Exemple commenté

Pour $e^{2x} = 5$, on prend $\ln$ des deux membres positifs. On obtient $2x = \ln 5$, puis $x = \ln 5 / 2 \approx 0,805$. Le contrôle exact donne $e^{2(\ln 5 / 2)} = e^{\ln 5} = 5$. Il est préférable de vérifier ainsi avant d'utiliser une valeur décimale arrondie.

Pour $\ln x > 2$, le domaine est $x > 0$. Appliquer l'exponentielle conserve le sens et donne $x > e^2$. Ces valeurs respectent automatiquement le domaine. La solution n'est pas $x > 2$: le logarithme et son argument ne sont pas égaux.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Un logarithme négatif est parfaitement possible, mais son argument doit rester positif. Par exemple $\ln(e^{-2}) = -2$ est défini.

À toi d'essayer : Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

$\ln 1 =$

1. 1
2. 0
3. e

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 26](#)

3.4 Dériver et étudier le logarithme**🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas**

Une pente qui dépend de la position. Sur $]0; +\infty[$, la dérivée de $\ln$ est $1/x$. Cette pente est toujours positive, ce qui explique la croissance de $\ln$. Elle diminue lorsque x augmente : la courbe continue de monter, mais de moins en moins vite.

Respecter le domaine avant de dériver. Toute expression contenant $\ln x$ exige $x > 0$. Une simplification ultérieure ne réintroduit pas zéro. À cette borne exclue, on peut étudier une limite, mais on ne calcule pas une image inexistante.

Combiner les règles. Pour une somme, dérive terme par terme. Pour un produit comme $x \ln x$, les deux facteurs varient : $1 \cdot \ln x + x \cdot (1/x) = \ln x + 1$. Oublier l'une des contributions donne une dérivée incorrecte.

Passer aux variations. Une dérivée contenant $\ln$ se traite avec sa croissance. Résoudre $\ln x + c = 0$ revient à chercher $x = e^{-c}$; la dérivée est négative avant ce point et positive après. On calcule ensuite la valeur de la fonction initiale pour connaître l'extremum.

📖 Définition | Comprendre la notion

Sur $]0; +\infty[$, la dérivée du logarithme népérien est $1/x$. Elle est positive, ce qui confirme la croissance de $\ln$. Les règles de somme, produit et quotient permettent d'étudier des fonctions combinant polynômes et logarithmes. Commence toujours par le domaine. Pour $f(x) = x \ln x$, la règle du produit donne $f'(x) = \ln x + 1$. Le signe de la dérivée se résout alors avec les propriétés du logarithme. À une borne exclue comme zéro, on parle de limite éventuelle, pas d'une valeur de la fonction.

💡 Exemple | Exemple commenté

Pour $f(x) = \ln x - 2x$, le domaine est $x > 0$. La dérivée vaut $1/x - 2 = (1 - 2x)/x$.

Le dénominateur étant positif sur tout le domaine, le signe dépend de $1 - 2x$, nul en $1/2$. La fonction croît donc sur $]0; 1/2]$ puis décroît sur $[1/2; +\infty[$.

Le maximum vaut $f(1/2) = \ln(1/2) - 1 = -\ln 2 - 1$. Cette valeur est négative, ce qui n'empêche pas d'être un maximum : il s'agit de la plus grande valeur de la fonction, pas nécessairement d'une valeur positive.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Le point où la dérivée s'annule donne une abscisse. Pour obtenir le minimum, il faut remplacer cette abscisse dans la fonction de départ, pas dans sa dérivée.

À toi d'essayer : Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

La dérivée de $\ln x$ sur $x > 0$ vaut. . .

1. x
2. $1/x$
3. e^x

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 26](#)

3.5 Comparer exponentielle et puissances à l'infini

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Deux croissances infinies ne sont pas équivalentes. Un polynôme et une exponentielle peuvent tous deux grandir sans borne. Leur quotient permet de comparer la rapidité de cette croissance. À $+\infty$, l'exponentielle e^x finit par dépasser toute puissance fixée x^n .

Les résultats utiles sont $x^n/e^x \rightarrow 0$ et $e^x/x^n \rightarrow +\infty$ pour tout entier $n > 0$. Écrire $x^n e^{-x}$ revient au premier quotient. Le produit d'un terme qui tend vers l'infini par un terme qui tend vers zéro est ici résolu grâce à ce théorème, pas par les seules limites séparées.

Adapter un coefficient dans l'exposant. Pour e^{-kx} avec $k > 0$, pose $t = kx$. Une puissance de x devient une puissance de t multipliée par une constante. On retrouve ainsi la forme connue.

Respecter la portée du résultat. « Domine à l'infini » ne signifie pas « est plus grand pour toutes les valeurs ». Sur une plage limitée, les coefficients et le degré du polynôme peuvent retarder fortement cette domination.

📖 Définition | Comprendre la notion

Pour tout entier n strictement positif, lorsque x tend vers $+\infty$, e^x/x^n tend vers $+\infty$ et $x^n e^{-x}$ tend vers 0. L'exponentielle finit par croître plus vite que toute puissance fixée. Les résultats s'étendent à e^{kx} et e^{-kx} pour un réel k strictement positif. Ils sont des résultats à l'infini : un polynôme peut être plus grand sur une plage finie. Pour utiliser la comparaison, transforme l'expression afin de reconnaître un produit ou quotient de référence. Une écriture $0 \times \infty$ ne permet pas de conclure sans cette comparaison.

 Exemple | Exemple commenté

Pour $x^3 e^{-2x}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, les limites séparées donneraient une forme indéterminée $\infty \times 0$. Posons $t = 2x$. Alors $t \rightarrow +\infty$, $x = t/2$ et $x^3 e^{-2x} = (t^3/8) e^{-t}$. Le résultat de croissance comparée donne $t^3 e^{-t} \rightarrow 0$. Multiplier par $1/8$ conserve la limite zéro. Le changement de variable justifie précisément l'emploi du résultat malgré le coefficient 2 dans l'exposant.

 Attention | Comprendre une erreur fréquente

Le résultat porte sur un degré n fixé et une limite à l'infini. Il ne permet pas d'affirmer qu'une exponentielle dépasse un polynôme à chaque valeur d'un tableau.

À toi d'essayer : Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

En $+\infty$, x^2/e^x tend vers...

1. 0
2. $+\infty$
3. 1

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 25](#) [Explication, p. 26](#)

4 Boîte à outils

 Méthode | La fonction exponentielle de base e

1. Identifie les exponentielles et leurs exposants.
2. Utilise les règles des puissances pour les produits et quotients.
3. Pour dériver, multiplie par la dérivée de l'exposant.
4. Applique aussi la règle du produit si un autre facteur dépend de x .
5. Utilise la positivité de l'exponentielle pour étudier les signes.

 Méthode | Limites et modèles exponentiels

1. Détermine la limite de l'exposant.
2. Applique la limite correspondante de l'exponentielle.
3. Traite les facteurs et constantes qui entourent ce terme.
4. Si une forme indéterminée apparaît, transforme avant de conclure.
5. Interprète une limite comme un comportement à long terme.

 Méthode | Le logarithme népérien

1. Impose la positivité de tout argument de $\ln$.
2. Utilise $\ln$ pour retirer une exponentielle, ou l'exponentielle pour retirer $\ln$.
3. Conserve le sens d'une inégalité à cette étape.
4. Résous l'équation restante en surveillant les divisions négatives.
5. Vérifie la solution dans le domaine et dans la relation initiale.

 Méthode | Dériver et étudier le logarithme

1. Écris le domaine positif imposé par $\ln$.
2. Choisis les règles de somme, produit ou quotient nécessaires.
3. Remplace la dérivée de $\ln$ par $1/x$.
4. Pour les variations, simplifie puis résous le signe de la dérivée.
5. Calcule l'image du point critique avec la fonction initiale.

 Méthode | Comparer exponentielle et puissances à l'infini

1. Identifie une puissance et une exponentielle en concurrence.
2. Réécris une exponentielle négative comme un inverse si cela aide.
3. Pour un exposant kx , pose $t = kx$ en vérifiant $k > 0$.
4. Applique une limite de croissance comparée reconnue.
5. Traite ensuite les constantes et les sommes finies.

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases ; 6 à 10 demandent plusieurs étapes ; 11 à 15 t'invitent à choisir, justifier et contrôler. Cherche avant de consulter les indices.

Exercice 1 — Simplifier un produit ★★☆☆

Simplifie $e^{2x}e^{3-x}$.

Exercice 2 — Une décroissance exponentielle ★★☆☆

Donne la limite de e^{-3x} quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 3 — Deux fonctions inverses ★★☆☆

Calcule $\ln(e^3)$ et $e^{\ln 7}$.

Exercice 4 — Une somme simple ★★☆☆

Dérive $f(x) = 3 \ln x + x^2$ et donne son domaine.

Exercice 5 — Une puissance face à une exponentielle ★★☆☆

Donne la limite de x^5e^{-x} quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 6 — Une dérivée composée ★★☆☆

Dérive $f(x) = 5e^{3x}$.

Exercice 7 — Un équilibre ★★☆☆

Quelle est la limite de $5 + 2e^{-x}$ quand x tend vers $+\infty$?

Exercice 8 — Une équation ★★☆☆

Résous $\ln x = -2$.

Exercice 9 — Un produit logarithmique ★★☆☆

Dérive $g(x) = x \ln x$ sur $x > 0$.

Exercice 10 — Une exponentielle plus rapide ★★☆☆

Quelle est la limite de e^{3x}/x^2 en $+\infty$?

Exercice 11 — Étudier un produit ★★☆☆

Étudie les variations de $f(x) = xe^{-x}$ sur $[0; +\infty[$.

Exercice 12 — Une forme à factoriser ★★☆☆

Étudie la limite de $e^{2x} - 3e^x$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 13 — Une inéquation avec coefficient négatif ★★☆☆

Résous $e^{-2x} \geq 3$.

Exercice 14 — Un minimum ★★ ★

Étudie $g(x) = x \ln x$ sur $x > 0$ et trouve son minimum.

Exercice 15 — Une somme à simplifier ★★ ★

Étudie la limite de $(x^2 + 3x + 1)e^{-x}$ en $+\infty$.

6 Problème — Pour aller plus loin

Durée utile d'un signal exponentiel

On étudie $f(t) = te^{-t}$ pour $t \geq 0$.

1. Calcule $f(0)$ et la dérivée.
2. Étudie les variations et le maximum.
3. Justifie la limite quand t tend vers l'infini.
4. Pour $t > 0$, exprime $\ln(f(t))$ et retrouve le signe de sa dérivée.
5. Une enveloppe $g(t) = e^{-t}$ doit descendre sous 0,1. Trouve le seuil réel.

7 Indices des exercices

Exercice 1

Indice 1. Les bases sont identiques.

Indice 2. Additionne les exposants, pas les coefficients devant.

Exercice 2

Indice 1. Le signe de l'exposant est essentiel.

Indice 2. L'exponentielle d'un nombre très négatif est petite.

Exercice 3

Indice 1. Utilise les relations de réciprocity.

Indice 2. Contrôle le domaine du logarithme.

Exercice 4

Indice 1. Le logarithme impose $x > 0$.

Indice 2. Dérive chaque terme séparément.

Exercice 5

Indice 1. Écris le produit comme un quotient.

Indice 2. Le degré 5 est fixé.

Exercice 6

Indice 1. Le facteur intérieur vaut 3.

Indice 2. Multiplie-le par 5.

Exercice 7

Indice 1. Traite les termes séparément.

Indice 2. Le terme constant est conservé.

Exercice 8

Indice 1. L'exponentielle est la fonction inverse.

Indice 2. Un logarithme négatif correspond à un argument entre 0 et 1.

Exercice 9

Indice 1. Les deux facteurs dépendent de x .

Indice 2. Il faut deux termes.

Exercice 10

Indice 1. Ramène l'exposant à une variable unique.

Indice 2. $x^2 = t^2/9$.

Exercice 11

Indice 1. Applique la dérivée d'un produit.

Indice 2. Mets l'exponentielle en facteur pour lire le signe.

Exercice 12

Indice 1. Les deux termes contiennent e^x .

Indice 2. Une factorisation permet de supprimer l'indétermination.

Exercice 13

Indice 1. Prends le logarithme des deux membres positifs.

Indice 2. La division par -2 inverse le signe.

Exercice 14

Indice 1. Résous l'équation de dérivée nulle.

Indice 2. Utilise la croissance de $\ln$ pour le signe.

Exercice 15

Indice 1. Sépare les termes du polynôme.

Indice 2. Chacun correspond à une limite connue.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le produit de deux exponentielles se réunit en additionnant les exposants.

Construire la réponse.

1. On écrit $e^{2x}e^{3-x} = e^{2x+3-x}$.
2. L'exposant se simplifie en $x + 3$.

Vérifier. En zéro, le produit initial vaut $1 \times e^3$, comme l'expression obtenue.

Conclure. Le produit est e^{x+3} .

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le signe négatif dans l'exposant inverse le comportement de x .

Construire la réponse.

1. Quand $x \rightarrow +\infty$, on a $-3x \rightarrow -\infty$.
2. L'exponentielle d'un argument tendant vers $-\infty$ tend vers zéro.

Vérifier. $e^{-3x} = 1/e^{3x}$ et le dénominateur grandit sans borne, ce qui confirme la limite.

Conclure. La limite est 0, par valeurs positives.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les deux expressions utilisent des fonctions réciproques.

Construire la réponse.

1. $\ln(e^3) = 3$, car $\ln$ retrouve l'exposant.
2. Le nombre 7 est positif, donc $\ln 7$ existe et $e^{\ln 7} = 7$.

Vérifier. Les domaines sont respectés : une exponentielle est positive et l'argument 7 de $\ln$ l'est aussi.

Conclure. Les résultats sont 3 et 7.

Corrigé 4

 Démonstration / Solution expliquée

Comprendre la question. La présence de $\ln$ impose le domaine ; les deux termes se dérivent séparément.

Construire la réponse.

1. Le domaine est $]0; +\infty[$.
2. La dérivée de $3\ln x$ vaut $3/x$ et celle de x^2 vaut $2x$.
3. La somme est $f'(x) = 3/x + 2x$.

Vérifier. Les deux termes sont positifs sur le domaine : la dérivée est strictement positive.

Conclure. $f'(x) = 3/x + 2x$ pour $x > 0$, et f est croissante.

Corrigé 5

 Démonstration / Solution expliquée

Comprendre la question. Le produit peut se lire comme un quotient comparant deux croissances.

Construire la réponse.

1. $x^5 e^{-x} = x^5 / e^x$.
2. La puissance 5 est fixée et l'exponentielle domine toute puissance fixée à $+\infty$.
3. Le quotient tend donc vers zéro.

Vérifier. La limite ne vient pas de la règle erronée « infini fois zéro égale zéro » : elle utilise le résultat de croissance comparée.

Conclure. La limite est 0.

Corrigé 6

 Démonstration / Solution expliquée

Comprendre la question. Le coefficient 5 et la dérivée intérieure 3 sont deux facteurs distincts.

Construire la réponse.

1. L'exposant $3x$ a pour dérivée 3.
2. La dérivée de e^{3x} est donc $3e^{3x}$.
3. En conservant 5, on obtient $15e^{3x}$.

Vérifier. La dérivée est positive sur les réels, cohérente avec une exponentielle croissante multipliée par un nombre positif.

Conclure. $f'(x) = 15e^{3x}$.

Corrigé 7

 Démonstration / Solution expliquée

Comprendre la question. Le terme variable et la constante doivent être traités séparément.

Construire la réponse.

1. Quand $x \rightarrow +\infty$, $e^{-x} \rightarrow 0$.
2. Le facteur 2 conserve cette limite : $2e^{-x} \rightarrow 0$.
3. On ajoute la constante : $5 + 2e^{-x} \rightarrow 5$.

Vérifier. La fonction reste supérieure à 5 pour toute valeur finie de x et s'en rapproche.

Conclure. La limite est 5.

Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On cherche l'argument positif dont le logarithme vaut -2.

Construire la réponse.

1. Le domaine impose $x > 0$.
2. En appliquant l'exponentielle, $x = e^{-2} = 1/e^2$.

Vérifier. Cette valeur est positive et inférieure à 1 ; son logarithme est bien -2.

Conclure. L'unique solution est $x = e^{-2} \approx 0,1353$.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. x et $\ln x$ dépendent tous deux de la variable.

Construire la réponse.

1. On pose $u = x$ et $v = \ln x$, donc $u' = 1$ et $v' = 1/x$.
2. La règle du produit donne $g' = 1 \ln x + x(1/x)$.
3. Comme $x \neq 0$, le second terme vaut 1.

Vérifier. Le terme 1 ne vient pas de la dérivée de $\ln$ seule, mais de sa multiplication par x .

Conclure. $g'(x) = \ln x + 1$ pour $x > 0$.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On ramène le coefficient 3 de l'exposant à la forme de référence.

Construire la réponse.

1. Posons $t = 3x$, donc $x = t/3$ et $t \rightarrow +\infty$.
2. $e^{3x}/x^2 = e^t/(t^2/9) = 9e^t/t^2$.
3. Le quotient e^t/t^2 tend vers $+\infty$. Le facteur positif 9 conserve cette limite.

Vérifier. L'exponentielle est au numérateur : on attend une limite infinie positive, contrairement au quotient inverse.

Conclure. La limite est $+\infty$.

Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le produit de x par une exponentielle exige deux contributions.

Construire la réponse.

1. La dérivée de x est 1 et celle de e^{-x} est $-e^{-x}$.
2. $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}$.

3. L'exponentielle étant positive, le signe est positif avant 1, nul en 1 et négatif après.
4. f croît sur $[0; 1]$ puis décroît sur $[1; +\infty[$.

Vérifier. $f(0) = 0$ et $f(1) = e^{-1} = 1/e$. Les variations prouvent que toute autre valeur du domaine est inférieure ou égale à celle de 1.

Conclure. Le maximum global est $1/e$, atteint pour $x = 1$.

Corrigé 12

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La différence présente d'abord la forme indéterminée $\infty - \infty$.

Construire la réponse.

1. On utilise $e^{2x} = (e^x)^2$ et factorise : $e^{2x} - 3e^x = e^x(e^x - 3)$.
2. Le premier facteur tend vers $+\infty$.
3. Le second tend aussi vers $+\infty$ et devient positif.
4. Le produit tend donc vers $+\infty$.

Vérifier. Pour x grand, le terme de degré deux en e^x domine celui de degré un ; la factorisation le montre sans soustraire des infinis.

Conclure. La limite est $+\infty$.

Corrigé 13

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le logarithme peut être appliqué puisque les deux membres sont positifs.

Construire la réponse.

1. La croissance de $\ln$ donne $-2x \geq \ln 3$.
2. En divisant par -2 , on inverse l'inégalité : $x \leq -\ln 3/2$.

Vérifier. À la borne, l'exponentielle vaut exactement 3. Pour x plus petit, $-2x$ est plus grand et l'exponentielle aussi.

Conclure. Les solutions sont $] -\infty; -\ln 3/2]$.

Corrigé 14

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On utilise le signe de $\ln x + 1$ pour trouver un minimum.

Construire la réponse.

1. $\ln x + 1 = 0$ équivaut à $\ln x = -1$, donc $x = e^{-1}$.
2. Par croissance de $\ln$, la dérivée est négative pour $0 < x < e^{-1}$ et positive pour $x > e^{-1}$.
3. g décroît puis croît, donc son minimum est atteint en e^{-1} .
4. $g(e^{-1}) = e^{-1} \ln(e^{-1}) = -e^{-1} = -1/e$.

Vérifier. Le point critique appartient au domaine positif. La décroissance puis la croissance portent sur tout le domaine, donc le minimum est global.

Conclure. Le minimum est $-1/e$, atteint pour $x = 1/e$.

Corrigé 15

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La distributivité permet de traiter chaque terme du polynôme.

Construire la réponse.

1. On écrit $x^2e^{-x} + 3xe^{-x} + e^{-x}$.
2. Les deux premiers termes tendent vers zéro par croissance comparée.
3. Le troisième tend vers zéro par la limite usuelle de l'exponentielle.
4. La somme de ces trois limites vaut zéro.

Vérifier. Tous les termes sont positifs pour x positif ; il ne s'agit pas d'une compensation entre des termes infinis.

Conclure. La limite est 0.

9 Corrigé du problème

1. **Comprendre la question.** La fonction est un produit de t et d'une exponentielle composée.

Construire la réponse.

- (a) Au départ, $f(0) = 0 \times e^0 = 0$.
- (b) La dérivée de t vaut 1, celle de e^{-t} vaut $-e^{-t}$.
- (c) Par produit, $f'(t) = e^{-t} - te^{-t} = (1 - t)e^{-t}$.

Vérifier. Le facteur exponentiel est commun aux deux contributions et peut être mis en facteur pour l'étude du signe.

Conclure. $f(0) = 0$ et $f'(t) = (1 - t)e^{-t}$.

2. **Comprendre la question.** L'exponentielle est strictement positive : seul le facteur $1 - t$ fixe le signe de la dérivée.

Construire la réponse.

- (a) Pour $0 \leq t < 1$, $1 - t > 0$; en 1, il est nul ; pour $t > 1$, il est négatif.
- (b) f croît donc sur $[0; 1]$ puis décroît sur $[1; +\infty[$.
- (c) Le maximum vaut $f(1) = e^{-1} = 1/e \approx 0,3679$.

Vérifier. Le point 1 appartient au domaine et le changement de signe positif puis négatif garantit un maximum global sur ce domaine.

Conclure. Le maximum est $1/e$, atteint au temps 1.

3. **Comprendre la question.** Les limites séparées du produit donnent une forme indéterminée qu'il faut résoudre.

Construire la réponse.

- (a) Quand $t \rightarrow +\infty$, le premier facteur tend vers l'infini et le second vers zéro.
- (b) On écrit $te^{-t} = t/e^t$.
- (c) La croissance comparée affirme que l'exponentielle domine cette puissance de degré 1 : le quotient tend vers zéro.

Vérifier. Le signal reste positif après zéro tout en se rapprochant de zéro à long terme, cohérent avec sa phase décroissante après le maximum.

Conclure. $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

4. **Comprendre la question.** Le logarithme n'est autorisé que lorsque f est strictement positive, donc ici pour t positif.

Construire la réponse.

- (a) Pour $t > 0$, $\ln(f(t)) = \ln t + \ln(e^{-t}) = \ln t - t$.
- (b) Sa dérivée vaut $1/t - 1 = (1 - t)/t$.
- (c) Le dénominateur est positif : on retrouve le signe de $1 - t$ et donc celui de f' .

Vérifier. La formule générale $(\ln f)' = f'/f$ confirme cette concordance puisque f est positive. En zéro, $\ln f(0)$ n'existe pas.

Conclure. Le logarithme croît puis décroît sur le domaine positif, avec le même point critique 1.

5. **Comprendre la question.** Le seuil demandé est strict : l'égalité à 0,1 ne suffit pas.

Construire la réponse.

- (a) $e^{-t} < 0,1$ donne, par croissance de $\ln$, $-t < \ln 0,1 = -\ln 10$.
- (b) En multipliant par -1, on inverse l'inégalité : $t > \ln 10$.
- (c) La borne vaut environ 2,303 unités de temps.

Vérifier. Au temps exact $\ln 10$, l'enveloppe vaut $e^{-\ln 10} = 1/10 = 0,1$. Il faut donc un temps strictement supérieur.

Conclure. L'enveloppe est sous 0,1 exactement pour $t > \ln 10$.

10 Variante autonome et bilan

Étudie $h(t) = te^{-2t}$ pour $t \geq 0$.

À toi d'essayer : Vérifie ta démarche

Résous la variante, puis explique pourquoi ta méthode s'applique.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 25](#) [Explication, p. 26](#)

- Je peux expliquer : la fonction exponentielle de base e.
- Je peux expliquer : limites et modèles exponentiels.
- Je peux expliquer : le logarithme népérien.
- Je peux expliquer : dériver et étudier le logarithme.
- Je peux expliquer : comparer exponentielle et puissances à l'infini.

11 Fiche-mémoire

La fonction exponentielle de base e.

1. Identifie les exponentielles et leurs exposants.
2. Utilise les règles des puissances pour les produits et quotients.
3. Pour dériver, multiplie par la dérivée de l'exposant.
4. Applique aussi la règle du produit si un autre facteur dépend de x.
5. Utilise la positivité de l'exponentielle pour étudier les signes.

Limites et modèles exponentiels.

1. Détermine la limite de l'exposant.
2. Applique la limite correspondante de l'exponentielle.
3. Traite les facteurs et constantes qui entourent ce terme.
4. Si une forme indéterminée apparaît, transforme avant de conclure.
5. Interprète une limite comme un comportement à long terme.

Le logarithme népérien.

1. Impose la positivité de tout argument de ln.
2. Utilise ln pour retirer une exponentielle, ou l'exponentielle pour retirer ln.
3. Conserve le sens d'une inégalité à cette étape.
4. Résous l'équation restante en surveillant les divisions négatives.
5. Vérifie la solution dans le domaine et dans la relation initiale.

Dériver et étudier le logarithme.

1. Écris le domaine positif imposé par ln.
2. Choisis les règles de somme, produit ou quotient nécessaires.
3. Remplace la dérivée de ln par $1/x$.
4. Pour les variations, simplifie puis résous le signe de la dérivée.
5. Calcule l'image du point critique avec la fonction initiale.

Comparer exponentielle et puissances à l'infini.

1. Identifie une puissance et une exponentielle en concurrence.
2. Réécrit une exponentielle négative comme un inverse si cela aide.
3. Pour un exposant kx , pose $t = kx$ en vérifiant $k > 0$.
4. Applique une limite de croissance comparée reconnue.
5. Traite ensuite les constantes et les sommes finies.

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

La base e est caractérisée par la propriété de dérivation de son exponentielle.

Indice 2 — Un pas de plus.

Il n'y a ici aucun coefficient supplémentaire dans l'argument x .

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Un exposant de plus en plus négatif produit des valeurs positives de plus en plus petites.

Indice 2 — Un pas de plus.

Écris $e^x = 1/e^{-x}$.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

$\ln 1$ est l'exposant à donner à e pour obtenir 1.

Indice 2 — Un pas de plus.

Quelle puissance de toute base positive vaut 1 ?

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

La formule usuelle est valable sur le domaine positif de $\ln$.

Indice 2 — Un pas de plus.

Le logarithme est croissant et sa pente diminue lorsque x augmente.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve**Indice 1 — Une piste.**

Le quotient compare une puissance fixée à une exponentielle.

Indice 2 — Un pas de plus.

À l'infini positif, l'exponentielle domine toute puissance de degré fixé.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche**Indice 1 — Une piste.**

Repère les données utiles et l'inconnue. Reviens à la méthode correspondante dans la boîte à outils.

Indice 2 — Un pas de plus.

Contrôle les unités, les bornes et la plausibilité du résultat avant de lire la correction.

[Revenir à la recherche, p. 23](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

La dérivée de e^x est e^x . Avec un argument composé u , il faudrait ajouter le facteur u' , mais pour u égal à x ce facteur vaut 1.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Quand $x \rightarrow -\infty$, $-x \rightarrow +\infty$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$. Son inverse tend vers zéro. L'exponentielle reste strictement positive : zéro est une limite, pas une valeur atteinte.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

$\ln 1 = 0$ parce que $e^0 = 1$. Il ne faut pas confondre ce résultat avec $\ln e = 1$.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Sur $x > 0$, $(\ln x)' = 1/x$. Cette dérivée est positive, ce qui explique la croissance de $\ln$. Elle n'autorise pas à définir $\ln$ sur les nombres négatifs.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

$x^2/e^x \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Les deux termes croissent, mais l'exponentielle grandit beaucoup plus vite. On utilise ce résultat de croissance comparée pour résoudre la forme indéterminée.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche

Comprendre la question. La variante change la vitesse de décroissance exponentielle, donc le temps du maximum.

Construire la réponse.

1. $h(0) = 0$ et, par produit, $h'(t) = e^{-2t} - 2te^{-2t} = (1 - 2t)e^{-2t}$.
2. L'exponentielle est positive. La dérivée est positive avant $1/2$ et négative après.
3. h croît sur $[0; 1/2]$ puis décroît. Le maximum vaut $h(1/2) = (1/2)e^{-1} = 1/(2e)$.
4. Pour la limite, poser $u = 2t$ donne $te^{-2t} = (u/2)e^{-u} \rightarrow 0$ par croissance comparée.

Vérifier. Doubler le coefficient de décroissance avance ici le maximum de 1 à $1/2$ et diminue sa hauteur.

Conclure. Le maximum est $1/(2e)$ en $t = 1/2$; la limite à l'infini est zéro.

[Revenir à la recherche, p. 23](#)