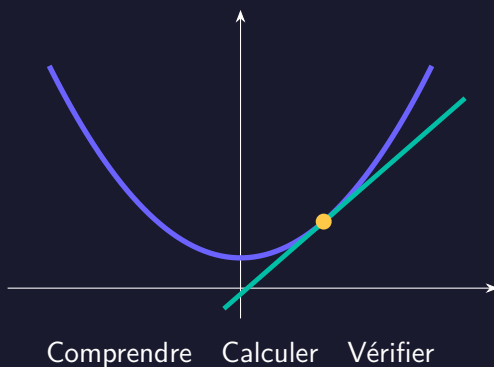


Fonctions composées et primitives

Analyse ■ Comprendre et s'entraîner



Terminale STI2D — spécialité maths
Année scolaire 2026–2027

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1 Pourquoi ce chapitre ?	3
2 L'idée avant la formule	3
3 Le cours formel	3
3.1 Composer des fonctions et contrôler le domaine	3
3.2 La dérivée d'une fonction composée	4
3.3 Étudier les variations d'une composée	5
3.4 Reconnaître une dérivée composée à l'envers	6
3.5 Primitives de la forme u'/u	7
4 Boîte à outils	8
5 Exercices progressifs	10
6 Problème — Pour aller plus loin	12
7 Indices des exercices	13
8 Corrigés détaillés	15
9 Corrigé du problème	20
10 Variante autonome et bilan	21
11 Fiche-mémoire	21
12 Indices des pauses et des preuves	22
13 Explications des pauses et des preuves	24

1 Pourquoi ce chapitre ?

La composition relie des transformations successives. Reconnaître la dérivée intérieure aide aussi à retrouver une primitive sans développer inutilement. **Ton parcours.** Partie mathématiques de la spécialité physique-chimie et mathématiques en STI2D. Cette fiche complète les cours de mathématiques communs ; elle ne remplace pas les enseignements de physique-chimie.

- Composer des fonctions et contrôler le domaine.
- La dérivée d'une fonction composée.
- Étudier les variations d'une composée.
- Reconnaître une dérivée composée à l'envers.
- Primitives de la forme u'/u .

2 L'idée avant la formule

Une expression comme $\ln(1 + t^2)$ applique d'abord un carré et une addition, puis un logarithme. La chaîne doit être suivie dans cet ordre pour le domaine comme pour la dérivée.

3 Le cours formel

3.1 Composer des fonctions et contrôler le domaine

Intuition | Construire la notion pas à pas

Enchaîner deux transformations. Dans $v(u(x))$, la première opération est u , la seconde est v . La sortie de u devient l'entrée de v . On lit donc les parenthèses de l'intérieur vers l'extérieur.

L'ordre a un effet. Ajouter 2 puis élever au carré ne donne pas généralement le même résultat qu'élever au carré puis ajouter 2. La notation $v \circ u$ décrit un ordre précis ; ce n'est pas un produit de fonctions.

Passer deux contrôles de domaine. Il faut pouvoir calculer $u(x)$, puis appliquer v au résultat. Pour $\ln(u(x))$, cela impose $u(x) > 0$. Pour $\sqrt{u(x)}$, cela impose $u(x) \geq 0$. Pour $1/u(x)$, cela impose $u(x) \neq 0$. Plusieurs contraintes peuvent devoir être satisfaites simultanément.

Préparer les calculs suivants. Décomposer une fonction permet de repérer la règle de dérivation ou de primitive adaptée. Utiliser une lettre auxiliaire comme t pour la fonction extérieure rend le rôle de chaque expression plus visible et évite de confondre x avec son image.

Définition | Comprendre la notion

Composer deux fonctions revient à enchaîner deux transformations. Si $f = v \circ u$, alors $f(x) = v(u(x))$: applique u d'abord, puis v au résultat. Le domaine exige que x appartienne au domaine de u et que $u(x)$ appartienne au domaine de v . Un logarithme demande un argument strictement positif ; une racine carrée demande un argument positif ou nul ; un dénominateur doit être non nul. L'ordre compte généralement : $v \circ u$ et $u \circ v$ ne sont pas la même fonction. Décomposer une formule en fonction intérieure et extérieure prépare la dérivation et la recherche de primitives.

Exemple | Exemple commenté

Dans $f(x) = \ln(2x - 1)$, l'intérieur est $u(x) = 2x - 1$ et l'extérieur $v(t) = \ln t$. Pour $x = 2$, l'intérieur vaut 3, puis l'extérieur donne $\ln 3$.

La fonction affine existe pour tout réel, mais son résultat doit être strictement positif pour entrer dans $\ln$. On résout $2x - 1 > 0$, soit $x > 1/2$.

À $x = 1/2$, l'intérieur serait nul et le logarithme impossible. La borne est donc exclue. Le domaine de la composée est $]1/2; +\infty[$, même si la fonction intérieure seule est définie partout.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Un logarithme négatif peut être un dénominateur valide. Pour $1/\ln x$, il faut exclure un logarithme nul, et non tous les logarithmes négatifs.

À toi d'essayer : Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Dans e^{x^2} , la fonction intérieure est...

1. $x \mapsto x^2$
2. $x \mapsto 2x$
3. $x \mapsto e^x$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 22 [Explication](#), p. 24

3.2 La dérivée d'une fonction composée

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Deux variations se multiplient. Si une petite variation de x modifie $u(x)$, puis que cette modification agit sur v , la pente finale combine les deux pentes. La dérivée de $v(u(x))$ est donc $u'(x)v'(u(x))$.

Un ordre de calcul fiable. Écris l'intérieur u et calcule sa dérivée. Dérive ensuite la fonction extérieure comme si son argument était une simple lettre, puis remets u à sa place. Multiplie enfin par u' .

On obtient ainsi $nu^{n-1}u'$ pour une puissance, $e^u u'$ pour une exponentielle et u'/u pour un logarithme d'argument positif. Pour une racine carrée d'argument strictement positif, la formule est $u'/(2\sqrt{u})$.

Domaine de définition et dérivabilité. Une racine peut être définie lorsque son argument vaut zéro, mais la formule avec $\sqrt{u}$ au dénominateur ne s'y applique pas automatiquement. Il faut justifier le domaine sur lequel les deux fonctions sont dérivables, pas seulement celui où l'expression existe.

📖 Définition | Comprendre la notion

Si u est dérivable et v est dérivable aux valeurs prises par u , la composée vérifie $(v \circ u)'(x) = u'(x)v'(u(x))$. La variation extérieure est multipliée par la variation intérieure. Oublier u' revient à supposer que l'intérieur varie comme x , ce qui est faux en général. Pour un entier n , $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ sur le domaine adapté. Pour l'exponentielle, $(e^u)' = u'e^u$. Pour u positive, $(\ln u)' = u'/u$. Écris séparément u , sa dérivée et la dérivée extérieure avant de simplifier.

💡 Exemple | Exemple commenté

Pour $f(x) = (x^2 + 1)^3$, l'intérieur est $u = x^2 + 1$, de dérivée $2x$. Le cube extérieur a pour dérivée $3u^2$.

En combinant, $f'(x) = 3(x^2 + 1)^2 \times 2x = 6x(x^2 + 1)^2$. Le facteur $2x$ est indispensable et peut s'annuler, même si $x^2 + 1$ ne s'annule jamais.

Le développement initial $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$ donne comme dérivée $6x^5 + 12x^3 + 6x$, égale au résultat factorisé. La composition évite ce long développement tout en conservant la même réponse.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

La formule de la chaîne n'est pas seulement la dérivée de l'extérieur. Le facteur u' doit être présent, même lorsque la fonction extérieure est l'exponentielle.

À toi d'essayer : Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

La dérivée de $v(u(x))$ vaut...

1. $u'(x)v'(u(x))$
2. $v'(x)$
3. $u'(x) + v'(x)$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 22 [Explication](#), p. 24

3.3 Étudier les variations d'une composée

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Utiliser une forme factorisée pour les variations. Après dérivation d'une composée, un facteur peut être toujours positif. C'est le cas d'une exponentielle, ou d'un dénominateur dont la positivité a été établie. Le signe dépend alors des facteurs restants.

Exponentielle et logarithme conservent le sens. Ces fonctions extérieures sont croissantes. La dérivée de e^u a donc le signe de u' ; celle de $\ln u$ aussi sur un domaine où $u > 0$. Il faut cependant toujours vérifier les conditions et les points où u' s'annule.

Ne pas confondre positivité et croissance. Un carré est positif ou nul, mais la fonction carré décroît sur les négatifs avant de croître sur les positifs. Une composée au carré peut donc changer plusieurs fois de sens. Son seul signe ne permet pas de connaître ses variations.

Achever l'étude. Une dérivée factorisée sert à construire un tableau de signes, puis les variations. Les valeurs extrêmes se calculent dans la fonction initiale. Un résultat peut être maximal sans que la dérivée et la fonction aient la même valeur.

📖 Définition | Comprendre la notion

Une dérivée composée peut souvent être factorisée en termes dont le signe est simple. L'exponentielle et un carré strictement positif ne changent pas le signe : concentre-toi sur les autres facteurs. Pour $u > 0$, $(\ln u)' = u'/u$ a le signe de u' . De même, e^u a une dérivée du signe de u' . Cela traduit la croissance des fonctions extérieures $\ln$ et $\exp$. Ne généralise pas cette propriété à toute composée :

un carré ou un cosinus n'est pas croissant sur tout son domaine. Commence par le domaine, calcule la dérivée, établis son signe puis les variations et les valeurs utiles.

Exemple | Exemple commenté

Pour $f(x) = e^{-x^2}$, la dérivée de l'exposant est $-2x$. Donc $f'(x) = -2xe^{-x^2}$.

Le facteur exponentiel est toujours positif. La dérivée a le signe de $-x$: positif avant zéro, nul en zéro, négatif après. La fonction croît puis décroît et atteint $f(0) = 1$ comme maximum.

Le contrôle direct utilise $-x^2 \leq 0$. Par croissance de l'exponentielle, $e^{-x^2} \leq e^0 = 1$, avec égalité seulement en zéro. Les deux raisonnements concordent.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Un facteur au carré peut être nul. On peut dire qu'il est positif ou nul sans preuve supplémentaire ; pour l'ignorer dans une étude de signe, il faut aussi repérer ses zéros.

À toi d'essayer : Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Le signe de la dérivée de $e^{u(x)}$ est celui de...

1. Toujours positif
2. $u(x)$
3. $u'(x)$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 22](#) [Explication, p. 24](#)

3.4 Reconnaître une dérivée composée à l'envers

Intuition | Construire la notion pas à pas

Reconnaître une dérivée déjà connue. La règle de la chaîne dit que la dérivée de $F(u)$ vaut $u'f(u)$ si $F' = f$. Pour trouver une primitive, on cherche donc dans l'expression la présence de l'intérieur u et de sa dérivée u' .

Un facteur constant peut être ajusté. Si l'expression contient trois fois $u'f(u)$, une primitive est trois fois $F(u)$. Le facteur de correction doit être une constante. Diviser par une expression variable créerait de nouveaux termes lors de la dérivation.

Deux formes à reconnaître. Une primitive de $u'e^u$ est e^u . Une primitive de $u'u^n$ est $u^{n+1}/(n+1)$ lorsque les expressions sont définies et $n \neq -1$. Les conditions de domaine restent nécessaires.

Accepter les limites des formules disponibles. Une exponentielle composée sans le facteur intérieur adapté n'a pas forcément de primitive exprimable à l'aide des fonctions usuelles. La bonne méthode n'est pas de forcer une formule, mais de contrôler toute proposition par dérivation.

Définition | Comprendre la notion

Si F est une primitive de f , alors $F(u(x))$ est une primitive de $u'(x)f(u(x))$. Le facteur u' doit être présent, éventuellement à une constante près. On reconnaît notamment $u'e^u$, de primitive e^u , et $u'u^n$, de primitive $u^{n+1}/(n+1)$ lorsque la formule est définie et $n \neq -1$. Une exponentielle composée sans le bon facteur intérieur ne possède pas nécessairement une primitive exprimable par les formules usuelles. Ne force pas la reconnaissance. La dérivation de la réponse reste le contrôle décisif.

Exemple | Exemple commenté

Pour $6xe^{x^2}$, on choisit $u = x^2$, donc $u' = 2x$. L'expression vaut $3u'e^u$. Une primitive est donc $F(x) = 3e^{x^2}$. Le contrôle donne $F' = 3 \times 2xe^{x^2} = 6xe^{x^2}$. Le coefficient 3 est constant et peut rester devant. Si le facteur x avait été absent dans l'énoncé, le même raisonnement ne fonctionnerait plus : il manquerait une partie variable de la dérivée intérieure.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Diviser une primitive candidate par $u'(x)$ n'est pas une règle générale. Si ce facteur varie, il faut aussi le dériver, ce qui modifie entièrement le résultat.

À toi d'essayer : Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Une primitive de $u'e^u$ est...

1. $e^{u'}$
2. ue^u
3. e^u

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 22 [Explication](#), p. 24

3.5 Primitives de la forme u'/u

Intuition | Construire la notion pas à pas

Reconnaître la dérivée d'un logarithme. La dérivée de $\ln u$ est u'/u lorsque u est positive. Une fraction dont le numérateur est la dérivée du dénominateur possède donc une primitive logarithmique.

Ajuster un coefficient. Commence par nommer le dénominateur u et calculer u' . Si le numérateur vaut k fois cette dérivée, avec k constant, une primitive est $k \ln u$. La ressemblance visuelle ne suffit pas : calcule effectivement la dérivée du dénominateur.

Gérer le signe et les intervalles. Lorsque u est négative sur un intervalle, $\ln u$ n'existe pas, mais $\ln(-u)$ convient. On réunit les deux cas dans $\ln|u|$. Cette notation n'autorise jamais à traverser un zéro de u ; la fraction initiale y est également interdite.

Fixer une constante si nécessaire. Une condition de valeur se traite après la reconnaissance de la primitive. Le logarithme au point imposé n'est pas forcément nul : il faut l'évaluer puis calculer la constante.

 Définition | Comprendre la notion

Sur un intervalle où u est strictement positive et dérivable, une primitive de u'/u est $\ln u$. En particulier, une primitive de $1/x$ sur $]0; +\infty[$ est $\ln x$. Sur un intervalle où u est strictement négative, on peut employer $\ln(-u)$; la notation $\ln|u|$ rassemble les deux situations, sans autoriser le passage par un zéro de u . Repère le dénominateur, calcule sa dérivée et compare au numérateur. Si le facteur manquant est constant, ajuste-le. Si ce n'est pas le cas, cette méthode immédiate ne s'applique pas.

 Exemple | Exemple commenté

Pour $6x/(x^2 + 4)$, le dénominateur $u = x^2 + 4$ est strictement positif sur les réels. Sa dérivée vaut $2x$.

Le numérateur $6x$ vaut trois fois cette dérivée. Une primitive est donc $F(x) = 3\ln(x^2 + 4)$. En dérivant, $F'(x) = 3 \times 2x/(x^2 + 4)$, ce qui redonne la fraction.

On n'applique pas la règle des puissances avec un exposant -1 , car elle demanderait de diviser par zéro. C'est précisément le logarithme qui traite cette forme particulière.

 Attention | Comprendre une erreur fréquente

Le logarithme d'une valeur absolue ne supprime pas les zéros du dénominateur. La primitive doit rester étudiée sur un intervalle qui ne traverse aucun de ces zéros.

À toi d'essayer : Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Une primitive de $1/x$ sur $x > 0$ est...

1. $-1/x^2$
2. $x^0/0$
3. $\ln x$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 24](#)

4 Boîte à outils

 Méthode | Composer des fonctions et contrôler le domaine

1. Identifie l'opération intérieure puis l'opération extérieure.
2. Vérifie que l'intérieur est défini.
3. Impose les contraintes de l'extérieur à la valeur intérieure.
4. Résous simultanément les conditions obtenues.
5. Pour une valeur, effectue les opérations dans l'ordre des parenthèses.

 Méthode | La dérivée d'une fonction composée

1. Vérifie le domaine de dérivabilité de la composée.
2. Identifie u et calcule u' .
3. Dérive l'extérieur puis remplace son argument par u .
4. Multiplie par la dérivée intérieure.
5. Simplifie et contrôle un coefficient ou un cas particulier.

 Méthode | Étudier les variations d'une composée

1. Vérifie le domaine de la fonction.
2. Applique la règle de la chaîne.
3. Factorise et identifie les facteurs toujours positifs.
4. Établis les signes restants puis les variations.
5. Évalue la fonction aux points critiques et contrôle les extrema.

 Méthode | Reconnaître une dérivée composée à l'envers

1. Repère une expression intérieure u .
2. Calcule u' et compare-la au facteur présent.
3. Ajuste uniquement par un coefficient constant si nécessaire.
4. Applique la primitive de la forme reconnue.
5. Dérive toute la réponse pour vérifier qu'aucun facteur variable ne manque.

 Méthode | Primitives de la forme u'/u

1. Repère le dénominateur u et son domaine de signe constant.
2. Calcule u' puis compare au numérateur.
3. Ajuste par une constante si le rapport est constant.
4. Utilise $\ln u$, $\ln(-u)$ ou $\ln|u|$ sur l'intervalle adapté.
5. Ajoute la constante nécessaire puis contrôle par dérivation.

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases ; 6 à 10 demandent plusieurs étapes ; 11 à 15 t'invitent à choisir, justifier et contrôler. Recherche avant de consulter les indices.

Exercice 1 — Calculer dans l'ordre ★☆☆

$u(x) = x + 2$, $v(x) = x^2$. Calcule $v(u(3))$ et $u(v(3))$.

Exercice 2 — Une puissance composée ★☆☆

Dérive $(3x + 1)^4$.

Exercice 3 — Un logarithme toujours défini ★☆☆

Dérive $\ln(x^2 + 1)$.

Exercice 4 — Reconnaître une exponentielle ★☆☆

Trouve une primitive de $2xe^{x^2}$.

Exercice 5 — Le cas de référence ★☆☆

Trouve une primitive de $5/x$ sur $x > 0$.

Exercice 6 — Un domaine logarithmique ★★☆☆

Détermine le domaine de $\ln(5 - 2x)$.

Exercice 7 — Une exponentielle composée ★★☆☆

Dérive e^{x^2} .

Exercice 8 — Un maximum exponentiel ★★☆☆

Étudie $f(x) = e^{4x-x^2}$.

Exercice 9 — Un facteur à ajuster ★★☆☆

Trouve une primitive de $4(2x + 1)^3$.

Exercice 10 — Une fraction composée ★★☆☆

Trouve une primitive de $2x/(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 — Deux contraintes ★★★

Détermine le domaine de $1/\ln x$.

Exercice 12 — Une racine ★★★

Dérive $\sqrt{x^2 + 1}$ et justifie le domaine de dérivabilité.

Exercice 13 — Une erreur de signe ★★★

Un élève affirme que $(x^2 - 1)^2$ croît partout car c'est un carré. Étudie sa dérivée.

Exercice 14 — Une proposition incorrecte ★★ ★

$F(x) = e^{x^2}$ est-elle une primitive de e^{x^2} ?

Exercice 15 — Une condition initiale ★★ ★

$F'(x) = 3/(3x + 2)$ sur $x > -2/3$, et $F(0) = 0$. Détermine F .

6 Problème — Pour aller plus loin

Composer, dériver et retrouver une primitive

On étudie $f(t) = \ln(1 + t^2)$ et $g(t) = 2t/(1 + t^2)$.

1. Justifie le domaine de f et identifie intérieur et extérieur.
2. Dérive f et étudie ses variations.
3. Trouve la primitive G de g telle que $G(0) = 2$.
4. Trouve une primitive de $2t \exp(t^2)$.
5. Vérifie pourquoi $\exp(t^2)$ n'est pas une primitive de $\exp(t^2)$.

7 Indices des exercices

Exercice 1

Indice 1. Commence par les parenthèses intérieures.

Indice 2. Ne confonds pas composer et multiplier.

Exercice 2

Indice 1. Il y a un facteur intérieur 3.

Indice 2. Le nouvel exposant est 3.

Exercice 3

Indice 1. Applique u'/u .

Indice 2. Le domaine est tout $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Indice 1. Observe l'exposant.

Indice 2. Sa dérivée est déjà présente.

Exercice 5

Indice 1. La formule des puissances ne convient pas à l'exposant -1.

Indice 2. Utilise le logarithme.

Exercice 6

Indice 1. L'argument du logarithme doit être positif.

Indice 2. La borne est exclue.

Exercice 7

Indice 1. La fonction intérieure est x^2 .

Indice 2. Dérive-la séparément.

Exercice 8

Indice 1. Étudie le signe de $4 - 2x$.

Indice 2. Le maximum de l'exposant donne ici celui de l'exponentielle.

Exercice 9

Indice 1. Dérive une puissance quatrième pour contrôler.

Indice 2. Divise le coefficient obtenu par 2.

Exercice 10

Indice 1. Compare numérateur et dérivée du dénominateur.

Indice 2. Le logarithme reste défini partout.

Exercice 11

Indice 1. Une contrainte vient du logarithme, l'autre de la fraction.

Indice 2. Le logarithme vaut zéro en 1.

Exercice 12

Indice 1. La dérivée de $\sqrt{u}$ contient $2\sqrt{u}$ au dénominateur.

Indice 2. Le facteur intérieur est $2x$.

Exercice 13

Indice 1. Un carré peut diminuer en se rapprochant de zéro.

Indice 2. Étudie les trois facteurs de la dérivée.

Exercice 14

Indice 1. Dérive la proposition.

Indice 2. Un facteur variable ne se corrige pas comme une constante.

Exercice 15

Indice 1. Commence par la famille de primitives.

Indice 2. En zéro, le logarithme vaut $\ln 2$.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les deux compositions appliquent les mêmes opérations dans des ordres différents.

Construire la réponse.

1. Pour $v(u(3))$, on calcule $u(3) = 3 + 2 = 5$, puis $v(5) = 5^2 = 25$.
2. Pour $u(v(3))$, on calcule $v(3) = 3^2 = 9$, puis $u(9) = 9 + 2 = 11$.

Vérifier. Les expressions générales sont $(x + 2)^2$ et $x^2 + 2$, qui ne sont pas identiques.

Conclure. $v(u(3)) = 25$ et $u(v(3)) = 11$: l'ordre compte.

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La puissance quatrième est appliquée à une fonction affine.

Construire la réponse.

1. L'intérieur $3x + 1$ a pour dérivée 3.
2. La dérivée extérieure est $4(3x + 1)^3$.
3. En multipliant, on obtient $12(3x + 1)^3$.

Vérifier. Le terme dominant initial est $81x^4$; sa dérivée $324x^3$ correspond au terme dominant de la réponse.

Conclure. La dérivée est $12(3x + 1)^3$ sur les réels.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le logarithme est défini partout car son argument est strictement positif.

Construire la réponse.

1. $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ pour tout réel x .
2. La dérivée intérieure est $2x$.
3. La formule du logarithme composé donne $2x/(x^2 + 1)$.

Vérifier. Le dénominateur est positif : la dérivée est négative pour x négatif, nulle en zéro et positive pour x positif.

Conclure. La dérivée est $2x/(x^2 + 1)$ sur les réels.

Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le facteur placé devant l'exponentielle est exactement la dérivée de l'exposant.

Construire la réponse.

1. On pose $u = x^2$, donc $u' = 2x$.
2. La fonction est de la forme $u'e^u$.
3. Une primitive est $e^u = e^{x^2}$.

Véifier. La règle de la chaîne donne $(e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$.

Conclure. Une primitive est $F(x) = e^{x^2}$.

Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Sur les positifs, le logarithme est une primitive de l'inverse.

Construire la réponse.

1. La dérivée de $\ln x$ est $1/x$.
2. On conserve le coefficient 5 : une primitive est $5 \ln x$.

Véifier. $(5 \ln x)' = 5/x$ et le domaine $x > 0$ est respecté.

Conclure. Une primitive est $F(x) = 5 \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le logarithme exige un argument strictement positif.

Construire la réponse.

1. On impose $5 - 2x > 0$.
2. En soustrayant 5, $-2x > -5$.
3. En divisant par -2, on inverse le sens : $x < 5/2$.

Véifier. En zéro, l'argument vaut 5 et est autorisé. À la borne $5/2$, il vaut zéro et ne l'est plus.

Conclure. Le domaine est $] - \infty; 5/2[$.

Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. L'exponentielle conserve son expression, mais son argument varie.

Construire la réponse.

1. L'intérieur x^2 a pour dérivée $2x$.
2. La règle donne $(e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$.

Véifier. En zéro, la dérivée s'annule à cause de $2x$; l'exponentielle vaut toujours 1.

Conclure. La dérivée vaut $2xe^{x^2}$.

Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. L'exponentielle positive laisse le signe de la dérivée de son exposant.

Construire la réponse.

1. L'exposant $4x - x^2$ a pour dérivée $4 - 2x$.
2. $f'(x) = (4 - 2x)e^{4x-x^2}$.
3. Le signe est positif avant 2 puis négatif après : f croît puis décroît.
4. Le maximum vaut $f(2) = e^{8-4} = e^4$.

Vérifier. La forme $4x - x^2 = 4 - (x - 2)^2 \leq 4$ confirme directement que $f(x) \leq e^4$.

Conclure. f croît sur $] -\infty; 2]$, décroît sur $[2; +\infty[$ et atteint son maximum e^4 en 2.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On cherche un coefficient devant la puissance quatrième pour retrouver l'amplitude demandée.

Construire la réponse.

1. La dérivée de $(2x + 1)^4$ vaut $4(2x + 1)^3 \times 2 = 8(2x + 1)^3$.
2. On veut un coefficient 4, moitié de 8.
3. On choisit donc $F(x) = \frac{1}{2}(2x + 1)^4$.

Vérifier. Sa dérivée vaut $(1/2) \times 8(2x + 1)^3 = 4(2x + 1)^3$.

Conclure. Une primitive est $\frac{1}{2}(2x + 1)^4$.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le numérateur correspond exactement à la dérivée du dénominateur.

Construire la réponse.

1. On pose $u = x^2 + 1$, strictement positif pour tout réel x .
2. On calcule $u' = 2x$.
3. La fonction est u'/u , donc une primitive est $\ln(x^2 + 1)$.

Vérifier. La dérivée de cette expression est bien $2x/(x^2 + 1)$, sans restriction supplémentaire.

Conclure. Une primitive sur les réels est $\ln(x^2 + 1)$.

Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Il faut définir le logarithme et empêcher le dénominateur de s'annuler.

Construire la réponse.

1. Pour $\ln x$, on impose $x > 0$.
2. Pour son inverse, on impose aussi $\ln x \neq 0$.

3. Comme $\ln x = 0$ équivaut à $x = 1$, on exclut cette valeur du domaine positif.

Vérifier. Les valeurs entre 0 et 1 ont un logarithme négatif mais non nul, donc elles restent autorisées.

Conclure. Le domaine est $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

Corrigé 12

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La racine exige une justification de la positivité de son argument.

Construire la réponse.

1. Pour tout réel x , $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. La racine extérieure est donc dérivable aux valeurs prises par l'intérieur.
2. L'intérieur a pour dérivée $2x$.
3. La formule donne $2x / (2\sqrt{x^2 + 1}) = x / \sqrt{x^2 + 1}$.

Vérifier. Le dénominateur est au moins 1 et ne s'annule jamais.

Conclure. La fonction est dérivable sur les réels, avec dérivée $x / \sqrt{x^2 + 1}$.

Corrigé 13

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Être un carré garantit la positivité, pas le sens de variation.

Construire la réponse.

1. La règle de la chaîne donne $f' = 2(x^2 - 1) \times 2x = 4x(x - 1)(x + 1)$.
2. Les zéros sont -1, 0 et 1.
3. En combinant les signes des trois facteurs, on obtient successivement moins, plus, moins, plus sur les quatre intervalles.
4. f décroît jusqu'à -1, croît jusqu'à 0, décroît jusqu'à 1, puis croît.

Vérifier. Les valeurs $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$ suffisent déjà à contredire une croissance partout.

Conclure. L'affirmation est fausse : la fonction alterne deux phases de décroissance et deux phases de croissance.

Corrigé 14

 Démonstration / Solution expliquée

Comprendre la question. Une proposition de primitive doit être testée par dérivation.

Construire la réponse.

1. La dérivée de $F(x) = e^{x^2}$ est $2xe^{x^2}$.
2. Elle n'est pas identique à e^{x^2} sur un intervalle.
3. Le facteur supplémentaire $2x$ dépend de x : une simple correction par constante ne le supprime pas.

Vérifier. En zéro, la dérivée proposée vaut 0 alors que la fonction à primitiver vaut 1 : ce contre-exemple suffit à invalider la proposition.

Conclure. Non. Les formules usuelles ne fournissent pas ici une primitive immédiate de e^{x^2} .

Corrigé 15

 Démonstration / Solution expliquée

Comprendre la question. La fraction est de forme logarithmique et la valeur en zéro fixe la constante.

Construire la réponse.

1. Sur $x > -2/3$, $3x + 2 > 0$. La dérivée du dénominateur est 3, égale au numérateur.
2. La famille est $F(x) = \ln(3x + 2) + C$.
3. La condition $F(0) = 0$ donne $\ln 2 + C = 0$, donc $C = -\ln 2$.

Vérifier. La dérivée vaut $3/(3x + 2)$ et en zéro on obtient $\ln 2 - \ln 2 = 0$.

Conclure. $F(x) = \ln(3x + 2) - \ln 2 = \ln((3x + 2)/2)$ sur $] -2/3; +\infty[$.

9 Corrigé du problème

1. **Comprendre la question.** Il faut vérifier l'argument du logarithme avant de composer les fonctions.

Construire la réponse.

- (a) Pour tout réel t , $t^2 \geq 0$, donc $1 + t^2 \geq 1 > 0$.
- (b) L'intérieur est $u(t) = 1 + t^2$ et l'extérieur est la fonction $\ln$.
- (c) La fonction intérieure est définie partout et ses valeurs sont toujours acceptées par $\ln$.

Vérifier. Même en zéro, l'argument vaut 1, pas zéro : aucune abscisse n'est exclue.

Conclure. f est définie sur tous les réels.

2. **Comprendre la question.** La règle de la chaîne donne une fraction dont le dénominateur est toujours positif.

Construire la réponse.

- (a) La dérivée de l'intérieur est $2t$, donc $f'(t) = 2t/(1 + t^2)$.
- (b) Le signe est celui de t : négatif avant zéro, nul en zéro et positif après.
- (c) f décroît sur $] -\infty; 0]$ puis croît sur $[0; +\infty[$. Son minimum vaut $f(0) = \ln 1 = 0$.

Vérifier. Le contrôle direct $1 + t^2 \geq 1$ et la croissance de $\ln$ donnent aussi $f(t) \geq 0$, avec égalité seulement en zéro.

Conclure. La dérivée est g ; le minimum global de f est 0, atteint en zéro.

3. **Comprendre la question.** La question précédente fournit déjà une primitive de g .

Construire la réponse.

- (a) Comme $f' = g$, la famille est $G(t) = \ln(1 + t^2) + C$.
- (b) En zéro, $G(0) = \ln 1 + C = C$. La condition impose $C = 2$.

Vérifier. La dérivée de $\ln(1 + t^2) + 2$ reste g et sa valeur en zéro vaut 2.

Conclure. $G(t) = \ln(1 + t^2) + 2$.

4. **Comprendre la question.** Le facteur $2t$ est exactement la dérivée de l'exposant.

Construire la réponse.

- (a) Posons $u(t) = t^2$: $u'(t) = 2t$.
- (b) La fonction est de la forme $u'e^u$.
- (c) Une primitive est donc $e^u = e^{t^2}$.

Vérifier. La règle de la chaîne redonne $(e^{t^2})' = 2te^{t^2}$.

Conclure. Une primitive est e^{t^2} .

5. **Comprendre la question.** Une même exponentielle ne reste sa propre dérivée que lorsque l'argument intérieur apporte le bon facteur.

Construire la réponse.

- (a) La dérivée de e^{t^2} est $2te^{t^2}$.
- (b) Cette expression n'est pas identique à e^{t^2} : en zéro, la première vaut 0 et la seconde 1.
- (c) Le facteur $2t$ dépend de t ; une division par une constante ne peut pas le supprimer.

Vérifier. Le calcul précédent montrait une primitive de deux t fois l'exponentielle, pas une primitive de l'exponentielle seule.

Conclure. e^{t^2} n'est pas une primitive de e^{t^2} .

10 Variante autonome et bilan

Trouve une primitive de $3/(3t + 1)$ sur $t > -1/3$ puis impose $F(0) = 4$.

À toi d'essayer : Vérifie ta démarche

Résous la variante, puis explique pourquoi ta méthode s'applique.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 24](#)

- Je peux expliquer : composer des fonctions et contrôler le domaine.
- Je peux expliquer : la dérivée d'une fonction composée.
- Je peux expliquer : étudier les variations d'une composée.
- Je peux expliquer : reconnaître une dérivée composée à l'envers.
- Je peux expliquer : primitives de la forme u'/u .

11 Fiche-mémoire

Composer des fonctions et contrôler le domaine.

1. Identifie l'opération intérieure puis l'opération extérieure.
2. Vérifie que l'intérieur est défini.
3. Impose les contraintes de l'extérieur à la valeur intérieure.
4. Résous simultanément les conditions obtenues.
5. Pour une valeur, effectue les opérations dans l'ordre des parenthèses.

La dérivée d'une fonction composée.

1. Vérifie le domaine de dérivabilité de la composée.
2. Identifie u et calcule u' .
3. Dérive l'extérieur puis remplace son argument par u .
4. Multiplie par la dérivée intérieure.
5. Simplifie et contrôle un coefficient ou un cas particulier.

Étudier les variations d'une composée.

1. Vérifie le domaine de la fonction.
2. Applique la règle de la chaîne.
3. Factorise et identifie les facteurs toujours positifs.
4. Établis les signes restants puis les variations.
5. Évalue la fonction aux points critiques et contrôle les extrema.

Reconnaître une dérivée composée à l'envers.

1. Repère une expression intérieure u .
2. Calcule u' et compare-la au facteur présent.
3. Ajuste uniquement par un coefficient constant si nécessaire.
4. Applique la primitive de la forme reconnue.
5. Dérive toute la réponse pour vérifier qu'aucun facteur variable ne manque.

Primitives de la forme u'/u .

1. Repère le dénominateur u et son domaine de signe constant.
2. Calcule u' puis compare au numérateur.
3. Ajuste par une constante si le rapport est constant.
4. Utilise $\ln u$, $\ln(-u)$ ou $\ln|u|$ sur l'intervalle adapté.
5. Ajoute la constante nécessaire puis contrôle par dérivation.

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Observe l'ordre des opérations pour calculer une image.

Indice 2 — Un pas de plus.

On calcule d'abord le carré, puis l'exponentielle de ce résultat.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

La variation se transmet d'abord par u , puis par v .

Indice 2 — Un pas de plus.

La dérivée de v doit être évaluée à la valeur $u(x)$, puis multipliée par la dérivée de u .

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Commence par écrire la dérivée de la composée exponentielle.

Indice 2 — Un pas de plus.

Le facteur exponentiel est toujours strictement positif.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Lis la règle de dérivation de l'exponentielle composée à l'envers.

Indice 2 — Un pas de plus.

La dérivée intérieure est déjà présente dans l'expression à primitiver.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve**Indice 1 — Une piste.**

La règle des puissances ne s'applique pas à l'exposant -1.

Indice 2 — Un pas de plus.

Quelle fonction usuelle possède la dérivée $1/x$ sur les positifs ?

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Vérifie ta démarche**Indice 1 — Une piste.**

Repère les données utiles et l'inconnue. Reviens à la méthode correspondante dans la boîte à outils.

Indice 2 — Un pas de plus.

Contrôle les unités, les bornes et la plausibilité du résultat avant de lire la correction.

[Revenir à la recherche, p. 21](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

La fonction intérieure est $u : x \mapsto x^2$. L'extérieur est $v : t \mapsto e^t$. On a bien $v(u(x)) = e^{x^2}$; inverser cet ordre donnerait une autre expression.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

$(v(u(x)))' = u'(x)v'(u(x))$. Les deux effets se multiplient ; on ne remplace pas l'argument de v' par x et on n'oublie pas le facteur intérieur.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

La dérivée est $u'(x)e^{u(x)}$. Puisque $e^{u(x)} > 0$, le signe est exactement celui de $u'(x)$, y compris son annulation éventuelle.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Une primitive de $u'e^u$ est e^u , car la règle de la chaîne redonne exactement $u'e^u$. On peut ajouter une constante pour la famille complète.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Une primitive de $1/x$ sur $]0; +\infty[$ est $\ln x$, puisque $(\ln x)' = 1/x$. Le domaine positif est indispensable pour cette écriture.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Vérifie ta démarche

Comprendre la question. On reconnaît une fraction dont le numérateur dérive le dénominateur.

Construire la réponse.

1. Sur $t > -1/3$, $3t + 1 > 0$, donc le logarithme de cet argument est autorisé.
2. La dérivée de $3t + 1$ vaut 3 : les primitives sont $\ln(3t + 1) + C$.
3. En zéro, $\ln 1 + C = C$. La condition impose $C = 4$.

Vérifier. La dérivée de $\ln(3t + 1) + 4$ est $3/(3t + 1)$ et la valeur initiale est 4.

Conclure. $F(t) = \ln(3t + 1) + 4$ sur $] -1/3; +\infty[$.

[Revenir à la recherche, p. 21](#)