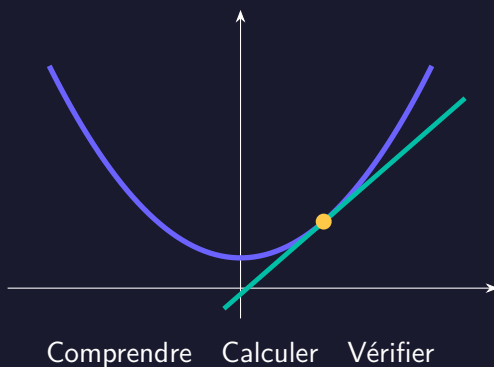


FICHE 03

Intégrales, aires et valeurs moyennes

Analyse ■ Comprendre et s'entraîner



Terminale STI2D — spécialité maths
Année scolaire 2026–2027

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	Pourquoi ce chapitre ?	3
2	L'idée avant la formule	3
3	Le cours formel	3
3.1	Comprendre une intégrale comme une accumulation	3
3.2	Calculer une intégrale avec une primitive	4
3.3	Propriétés et comparaisons des intégrales	6
3.4	Valeur moyenne d'une fonction continue	7
3.5	Approcher une intégrale numériquement	8
4	Boîte à outils	9
5	Exercices progressifs	11
6	Problème — Pour aller plus loin	13
7	Indices des exercices	14
8	Corrigés détaillés	16
9	Corrigé du problème	21
10	Variante autonome et bilan	22
11	Fiche-mémoire	22
12	Indices des pauses et des preuves	23
13	Explications des pauses et des preuves	25

1 Pourquoi ce chapitre ?

Une intégrale transforme une puissance en énergie et permet de calculer une puissance moyenne. Les méthodes numériques fournissent aussi des estimations contrôlées. **Ton parcours.** Partie mathématiques de la spécialité physique-chimie et mathématiques en STI2D. Cette fiche complète les cours de mathématiques communs ; elle ne remplace pas les enseignements de physique-chimie.

- Comprendre une intégrale comme une accumulation.
- Calculer une intégrale avec une primitive.
- Propriétés et comparaisons des intégrales.
- Valeur moyenne d'une fonction continue.
- Approcher une intégrale numériquement.

2 L'idée avant la formule

Une puissance est une quantité par unité de temps. Multiplier sa hauteur par une petite durée donne une petite énergie ; l'intégrale additionne toutes ces contributions.

3 Le cours formel

3.1 Comprendre une intégrale comme une accumulation

Intuition | Construire la notion pas à pas

Additionner des contributions continues. Une intégrale cumule les valeurs d'une fonction sur un intervalle. On peut imaginer de très fines bandes : chacune contribue environ hauteur multipliée par largeur, et l'intégrale correspond à la somme limite de ces contributions.

Lire une aire lorsque la fonction est positive. Si $f \geq 0$ sur $[a; b]$ avec $a < b$, l'intégrale représente l'aire située entre la courbe et l'axe horizontal. Une fonction constante donne un rectangle ; une droite passant par l'origine peut délimiter un triangle.

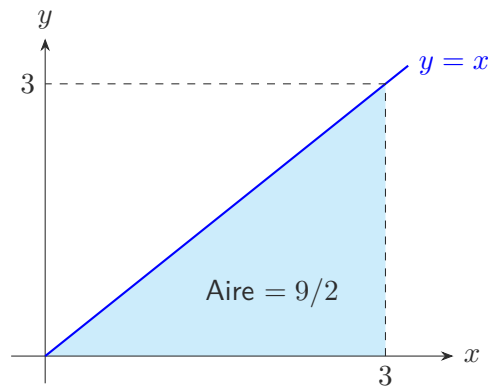
Distinguer intégrale et aire géométrique. Une portion sous l'axe contribue négativement à l'intégrale. Deux zones peuvent donc se compenser, même si chacune occupe une aire positive. Pour obtenir une aire géométrique totale, sépare les intervalles de signe et additionne des aires positives.

Suivre les unités. Une vitesse en m/s intégrée sur un temps en secondes donne un déplacement en mètres. Un débit en litres par minute intégré sur des minutes donne des litres. Pour une vitesse signée, le déplacement peut différer de la distance totale parcourue.

L'intégrale entre deux bornes est un nombre ; une primitive est une fonction qui servira à calculer ce nombre.

Définition | Comprendre la notion

Pour une fonction continue positive sur $[a; b]$, avec $a < b$, l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ mesure l'aire sous la courbe dans les unités du repère. Elle additionne une infinité de petites contributions. Si f prend des valeurs négatives, l'intégrale est une aire algébrique : les zones sous l'axe contribuent négativement. L'aire géométrique totale demande de séparer les intervalles de signe et de prendre chaque aire positive. Si f représente une vitesse, l'intégrale donne le déplacement ; si f est un débit, elle donne une quantité. Multiplie les unités de f par celles de x . Une intégrale est un nombre, alors qu'une primitive est une fonction.



💡 Exemple | Exemple commenté

Un débit constant de 3 litres par minute pendant 4 minutes fournit $3 \times 4 = 12$ litres. Sur un graphique débit-temps, le rectangle a une hauteur de 3 et une largeur de 4.

On écrit $\int_0^4 3 \, dt = 12$. L'unité se simplifie : litres par minute multipliés par minutes donnent des litres, pas des litres par minute.

Si le même débit était observé de la minute 2 à la minute 6, la largeur serait encore $6 - 2 = 4$ et le résultat 12 litres. La durée dépend de la différence des bornes, pas seulement de la borne supérieure.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Une intégrale nulle ne signifie pas forcément que la fonction est nulle. Des contributions positives et négatives peuvent s'annuler.

À toi d'essayer : Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

L'intégrale d'un débit en L/min sur un temps en min s'exprime en...

1. Litres
2. Minutes
3. Litres par minute

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.2 Calculer une intégrale avec une primitive

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Relier accumulation et primitive. Si f est continue sur $[a; b]$ et F une primitive, l'intégrale vaut $F(b) - F(a)$. La primitive transforme ainsi un cumul continu en différence de deux valeurs.

Ne pas évaluer la mauvaise fonction. Il faut d'abord trouver F , puis l'évaluer aux bornes. Calculer seulement $f(b) - f(a)$ mesure une variation de la fonction initiale et ne donne généralement pas son intégrale.

Respecter les signes. On prend valeur à la borne supérieure moins valeur à la borne inférieure. Des parenthèses autour des deux évaluations évitent de ne soustraire qu'un seul terme. La notation $[F(x)]_a^b$ est une instruction de calcul de cette différence.

Pourquoi la constante ne compte pas. Utiliser $F + C$ donne $F(b) + C - F(a) - C$, donc le même résultat. Une seule primitive suffit ; il est souvent plus simple de choisir C égal à zéro. Avant de conclure, contrôle le signe, les unités et un ordre de grandeur. Si la fonction est positive et $a < b$, l'intégrale ne peut pas être négative.

Définition | Comprendre la notion

Si f est continue sur $[a; b]$ et F est une primitive de f , alors $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. On note aussi $[F(x)]_a^b$ cette différence. La constante d'une primitive disparaît dans la soustraction : n'importe quelle primitive convient. Respecte l'ordre valeur finale moins valeur initiale, et mets des parenthèses autour de chacune si la formule comporte plusieurs termes. Un contrôle de signe ou d'ordre de grandeur permet de détecter une erreur. Si f est positive et $a < b$, le résultat doit être positif. Conserve les expressions exactes avant l'approximation numérique.

Exemple | Exemple commenté

Pour $\int_1^2 3x^2 dx$, une primitive de $3x^2$ est $F(x) = x^3$. On écrit donc $[x^3]_1^2 = 2^3 - 1^3 = 8 - 1 = 7$. Prendre la différence des valeurs de la fonction initiale donnerait $12 - 3 = 9$, qui répond à une autre question. La primitive est l'étape indispensable. Sur $[1; 2]$, la fonction varie entre 3 et 12, et l'intervalle a une largeur 1. L'intégrale doit donc être entre 3 et 12 : la valeur 7 respecte cet encadrement. Ce contrôle ne prouve pas le résultat mais peut détecter une erreur grossière.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

La borne zéro ne donne pas systématiquement une valeur nulle de la primitive. Une exponentielle y vaut souvent 1 ; évalue chaque expression au lieu de supprimer le terme.

À toi d'essayer : Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

$\int_a^b f(x) dx$ vaut...

1. $f(b) - f(a)$
2. $F(a) - F(b)$
3. $F(b) - F(a)$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 23 Explication, p. 25

3.3 Propriétés et comparaisons des intégrales

Intuition | Construire la notion pas à pas

Découper puis réunir. Une accumulation sur $[a; c]$ peut être séparée à une borne intermédiaire b . La relation de Chasles additionne les deux intégrales. Elle permet aussi de retrouver une portion inconnue en soustrayant une portion connue au total.

Combiner des grandeurs. L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales, et un coefficient constant peut être sorti de l'intégrale. Pour combiner deux intégrales ainsi, leurs bornes doivent être les mêmes. Un produit de fonctions ne suit pas cette règle.

Tenir compte de l'orientation. Inverser les bornes change le signe. Avec des bornes identiques, aucune largeur n'est parcourue et l'intégrale est nulle. Ces propriétés concernent une accumulation signée, pas uniquement une aire géométrique positive.

Encadrer sans primitive. Si $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a; b]$ avec $a < b$, alors $m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$. Les deux constantes délimitent des rectangles qui encadrent l'accumulation. On peut ainsi obtenir un résultat utile sans connaître la formule exacte de f .

Définition | Comprendre la notion

L'intégrale respecte la linéarité : $\int (af + bg) = a \int f + b \int g$, avec les mêmes bornes. La relation de Chasles donne $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$. Inverser les bornes change le signe : $\int_b^a f = -\int_a^b f$. Avec des bornes identiques, l'intégrale est nulle. Si $f \leq g$ sur $[a; b]$ et $a < b$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. En particulier, si $m \leq f \leq M$, l'intégrale est comprise entre $m(b - a)$ et $M(b - a)$. Ces propriétés permettent des calculs sans connaître de primitive explicite. Elles n'autorisent pas à séparer un produit en produit d'intégrales.

Exemple | Exemple commenté

Si $\int_0^2 f = 5$ et $\int_2^3 f = 4$, Chasles donne $\int_0^3 f = 5 + 4 = 9$. Les intervalles se suivent sans chevauchement supplémentaire.

Sur $[0; 2]$, la linéarité donne $\int_0^2 (3f - 1) = 3 \int_0^2 f - \int_0^2 1$. Le premier terme vaut 15 ; le second est l'aire d'un rectangle de hauteur 1 et largeur 2, donc 2.

Le résultat est 13. Soustraire simplement 1 aurait oublié que la constante contribue sur toute la largeur de l'intervalle.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

La linéarité concerne les sommes. En général, l'intégrale d'un produit n'est pas le produit des intégrales.

À toi d'essayer : Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Inverser les bornes d'une intégrale. . .

1. Ne change rien
2. La rend toujours positive
3. Change son signe

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.4 Valeur moyenne d'une fonction continue

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Remplacer une grandeur variable par une grandeur constante équivalente. Une vitesse moyenne doit produire le même déplacement sur la même durée. Un débit moyen doit fournir la même quantité. On commence donc par l'accumulation totale, puis on la divise par la durée ou la largeur.

Sur $[a; b]$, la moyenne est $m = \int_a^b f(x) dx / (b - a)$. Le rectangle de hauteur m possède la même aire algébrique que celle décrite par f . Le dénominateur est bien la largeur $b - a$, pas forcément la borne b .

Contrôler les unités. L'intégrale multiplie les unités de f par celles de x ; la division par la largeur retire ces dernières. La moyenne retrouve donc les unités de f . Une puissance moyenne s'exprime en watts, tandis que son accumulation sur des heures s'exprime en wattheures.

Éviter la moyenne des seules extrémités. Ce raccourci est exact pour une fonction affine, mais pas pour une courbe quelconque. De même, deux moyennes sur des durées différentes doivent être pondérées par ces durées : chaque moyenne représente une accumulation différente.

📖 Définition | Comprendre la notion

Sur un intervalle $[a; b]$ avec $a < b$, la valeur moyenne de f est $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. Le rectangle de hauteur m et de largeur $b-a$ a la même aire algébrique que sous la courbe. La moyenne a les mêmes unités que f , tandis que l'intégrale combine les unités de f et de x . Pour un débit, la moyenne reste un débit ; pour une puissance, elle reste une puissance. La moyenne des deux valeurs aux extrémités est exacte pour une fonction affine, mais pas pour une fonction quelconque. Une moyenne sur deux intervalles doit être pondérée par leurs durées.

💡 Exemple | Exemple commenté

Pour $v(t) = t^2$ sur $[0; 3]$, une primitive est $t^3/3$. L'accumulation vaut $27/3 - 0 = 9$, puis la moyenne vaut $9/(3 - 0) = 3$.

La moyenne des seules valeurs extrêmes donnerait $(0 + 9)/2 = 4,5$. Cette valeur est trop élevée : elle remplace implicitement la courbe par le segment qui relie les extrémités.

Un rectangle de hauteur 3 et de largeur 3 a bien une aire 9. Si v est une vitesse en m/s et t un temps en secondes, le déplacement est 9 m et la vitesse moyenne 3 m/s.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Pour réunir des moyennes, pondère par les durées. La moyenne simple n'est adaptée que si les périodes ont le même poids.

À toi d'essayer : Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

La valeur moyenne sur $[a; b]$ est l'intégrale divisée par...

1. $b - a$
2. $b + a$
3. 2

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.5 Approcher une intégrale numériquement

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Remplacer une courbe par des bandes simples. On découpe $[a; b]$ en n intervalles de largeur $h = (b - a)/n$. Sur chacun, un rectangle utilise une valeur de la fonction comme hauteur. L'aire approchée est la somme des hauteurs multipliée par h .

Choisir gauche ou droite. Les rectangles à gauche prennent les abscisses $a, a + h, \dots, b - h$; ceux à droite prennent $a + h, \dots, b$. Chaque somme utilise exactement n hauteurs. Ajouter les deux extrémités ferait compter une hauteur de trop.

Savoir de quel côté se trouve l'erreur. Si f est croissante, les hauteurs de gauche sont inférieures aux valeurs de la courbe sur chaque intervalle : elles sous-estiment l'intégrale. À droite, elles la surestiment. Pour une fonction décroissante, les rôles s'inversent.

Une autre approche par tirages. Pour $0 \leq f \leq M$, on peut tirer uniformément des points dans le rectangle de largeur $b - a$ et hauteur M . La proportion située sous la courbe estime la fraction d'aire occupée. On multiplie donc cette proportion par l'aire du rectangle. Ce résultat aléatoire fluctue ; il n'est ni exact ni un encadrement garanti.

📖 Définition | Comprendre la notion

Découpe $[a; b]$ en n intervalles de largeur $h = (b - a)/n$. La somme des rectangles à gauche est $h \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh)$; à droite, utilise les points de rang 1 à n . Pour une fonction croissante, la somme à gauche sous-estime l'intégrale et celle à droite la surestime. Pour une fonction décroissante, les rôles s'inversent. Augmenter n améliore l'approximation pour une fonction continue. La méthode de Monte-Carlo estime aussi une aire : pour $0 \leq f \leq M$, tire des points uniformément dans le

rectangle de dimensions $b - a$ et M . La proportion sous la courbe multipliée par l'aire du rectangle estime l'intégrale. Le résultat fluctue ; davantage de points réduit généralement cette fluctuation.

Exemple | Exemple commenté

Pour $f(x) = x$ sur $[0; 1]$ avec quatre rectangles, la largeur est $h = 1/4 = 0,25$. À gauche, les hauteurs sont 0, 0,25, 0,5 et 0,75. Leur somme vaut 1,5, donc l'approximation est 0,375. À droite, les hauteurs sont 0,25, 0,5, 0,75 et 1 ; l'approximation vaut $0,25 \times 2,5 = 0,625$. La fonction étant croissante, l'intégrale se trouve entre ces deux nombres. L'aire exacte du triangle vaut 0,5, bien dans cet intervalle. Réduire la largeur des bandes diminue l'écart entre les deux sommes pour cette fonction.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

La proportion Monte-Carlo n'est pas directement l'intégrale, sauf si le rectangle a une aire égale à 1. Multiplie toujours par l'aire de la zone de tirage.

À toi d'essayer : Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Pour une fonction croissante, les rectangles à gauche...

1. Donnent toujours la valeur exacte
2. Surestiment l'intégrale
3. Sous-estiment l'intégrale

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 25](#)

4 Boîte à outils

Méthode | Comprendre une intégrale comme une accumulation

1. Identifie l'intervalle et sa largeur $b - a$.
2. Repère le signe de la fonction sur chaque portion.
3. Calcule les aires simples par la géométrie si possible.
4. Pour l'intégrale, donne un signe aux contributions sous l'axe.
5. Pour une aire géométrique, additionne les valeurs positives et précise les unités.

Méthode | Calculer une intégrale avec une primitive

1. Vérifie que la fonction est continue sur l'intervalle.
2. Cherche une primitive et contrôle-la par dérivation.
3. Calcule séparément $F(b)$ et $F(a)$.
4. Soustrais dans l'ordre $F(b) - F(a)$ avec des parenthèses.

5. Contrôle signe, ordre de grandeur et unités avant d'arrondir.

Méthode | Propriétés et comparaisons des intégrales

1. Vérifie et aligne les bornes des intégrales connues.
2. Utilise Chasles pour découper ou reconstituer un intervalle.
3. Utilise la linéarité pour les sommes et coefficients constants.
4. Intègre une constante en la multipliant par la largeur.
5. Pour un encadrement, multiplie les bornes de la fonction par $b - a$.

Méthode | Valeur moyenne d'une fonction continue

1. Identifie l'intervalle et sa largeur.
2. Calcule l'intégrale, c'est-à-dire l'accumulation totale.
3. Divise par la largeur pour obtenir la moyenne.
4. Pour plusieurs périodes, additionne leurs accumulations avant de diviser.
5. Contrôle que la moyenne garde les unités de la fonction et reste entre ses bornes.

Méthode | Approcher une intégrale numériquement

1. Calcule $h = (b - a)/n$.
2. Liste exactement n abscisses gauches ou droites.
3. Évalue la fonction à ces abscisses et additionne les hauteurs.
4. Multiplie par h puis utilise les variations pour interpréter l'erreur.
5. Pour Monte-Carlo, multiplie la proportion observée par l'aire totale du rectangle.

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases ; 6 à 10 demandent plusieurs étapes ; 11 à 15 t'invitent à choisir, justifier et contrôler. Cherche avant de consulter les indices.

Exercice 1 — Une aire rectangulaire ★☆☆

Calcule $\int_1^5 2 \, dx$ par la géométrie.

Exercice 2 — Un polynôme ★☆☆

Calcule $\int_0^2 (2x + 1) \, dx$.

Exercice 3 — Chasles ★☆☆

On sait $\int_0^5 f = 12$ et $\int_0^2 f = 3$. Calcule $\int_2^5 f$.

Exercice 4 — Une moyenne affine ★☆☆

Calcule la moyenne de $f(x) = 2x + 1$ sur $[0; 4]$.

Exercice 5 — Deux rectangles ★☆☆

Approche $\int_0^2 x^2 \, dx$ avec deux rectangles à gauche.

Exercice 6 — Une aire triangulaire ★★☆☆

Calcule $\int_0^3 x \, dx$ géométriquement.

Exercice 7 — Une exponentielle ★★☆☆

Calcule $\int_0^1 2e^{2x} \, dx$.

Exercice 8 — Linéarité ★★☆☆

Sur $[1; 4]$, $\int f = 7$ et $\int g = 2$. Calcule $\int (2f - 3g)$.

Exercice 9 — Une moyenne non affine ★★☆☆

Calcule la moyenne de x^2 sur $[1; 2]$.

Exercice 10 — Un encadrement ★★☆☆

Pour le même calcul, utilise deux rectangles à droite puis compare à la valeur exacte.

Exercice 11 — Aire et intégrale ★★★

Compare $\int_{-1}^1 x \, dx$ et l'aire entre la droite et l'axe.

Exercice 12 — Une intégrale logarithmique ★★★

Calcule $\int_1^3 1/x \, dx$.

Exercice 13 — Un encadrement ★★★

Sur $[2; 5]$, $4 \leq f(x) \leq 6$. Encadre son intégrale.

Exercice 14 — Deux durées différentes ★★ ★

Une puissance moyenne vaut 100 W pendant 2 h puis 200 W pendant 1 h. Calcule la moyenne sur 3 h.

Exercice 15 — Monte-Carlo ★★ ★

On tire 2 000 points uniformément dans $[0; 2] \times [0; 3]$. 900 sont sous une courbe comprise entre 0 et 3. Estime son intégrale.

6 Problème — Pour aller plus loin

Énergie fournie par une puissance variable

La puissance est $P(t) = 2t + 3$ watts pendant $0 \leq t \leq 4$ secondes.

1. Calcule l'énergie totale avec une primitive et donne son unité.
2. Calcule la puissance moyenne.
3. Retrouve l'énergie par l'aire d'un trapèze.
4. Utilise quatre rectangles à gauche puis à droite et encadre l'intégrale.
5. Une simulation uniforme dans le rectangle $[0;4] \times [0;11]$ place 635 points sur 1 000 sous la courbe. Estime l'énergie et discute la précision.

7 Indices des exercices

Exercice 1

Indice 1. La largeur est $b - a$.

Indice 2. Multiplie largeur et hauteur.

Exercice 2

Indice 1. Intègre les deux termes.

Indice 2. Évalue $x^2 + x$, pas $2x + 1$.

Exercice 3

Indice 1. Découpe l'intervalle en 2.

Indice 2. Isole la partie inconnue.

Exercice 4

Indice 1. La largeur vaut 4.

Indice 2. Divise l'aire par cette largeur.

Exercice 5

Indice 1. Prends les débuts des deux sous-intervalles.

Indice 2. Le point 2 n'est pas un point gauche.

Exercice 6

Indice 1. Dessine la droite et les bornes.

Indice 2. Utilise la moitié du rectangle.

Exercice 7

Indice 1. Le facteur 2 est la dérivée de l'exposant.

Indice 2. N'oublie pas e^0 .

Exercice 8

Indice 1. Sors les coefficients constants.

Indice 2. Conserve le signe moins.

Exercice 9

Indice 1. Utilise la primitive $x^3/3$.

Indice 2. La largeur n'est pas 2.

Exercice 10

Indice 1. Utilise cette fois les fins des intervalles.

Indice 2. La primitive est $x^3/3$.

Exercice 11

Indice 1. Sépare l'intervalle en zéro.

Indice 2. Les aires géométriques sont positives.

Exercice 12

Indice 1. Utilise la primitive logarithmique.

Indice 2. Le logarithme de 1 est nul.

Exercice 13

Indice 1. Compare à deux rectangles.

Indice 2. Leur largeur est $5 - 2$.

Exercice 14

Indice 1. Commence par la quantité totale.

Indice 2. Pondère par la durée.

Exercice 15

Indice 1. La proportion seule n'est pas l'aire.

Indice 2. Multiplie par l'aire du rectangle de tirage.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Une fonction constante positive délimite un rectangle.

Construire la réponse.

1. La largeur de l'intervalle est $5 - 1 = 4$.
2. La hauteur constante est 2.
3. L'aire vaut $4 \times 2 = 8$.

Vérifier. Le départ en 1 ne donne pas une largeur de 5. La fonction positive impose un résultat positif.

Conclure. $\int_1^5 2 \, dx = 8$.

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Une primitive de la somme se construit terme par terme.

Construire la réponse.

1. Une primitive de $2x + 1$ est $F(x) = x^2 + x$.
2. $F(2) = 4 + 2 = 6$ et $F(0) = 0$.
3. L'intégrale vaut $6 - 0 = 6$.

Vérifier. La région est un trapèze de largeur 2 et de hauteurs 1 et 5 : son aire $(1 + 5) \times 2/2 = 6$ confirme le calcul.

Conclure. $\int_0^2 (2x + 1) \, dx = 6$.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. L'intervalle de 0 à 5 se décompose en deux portions consécutives.

Construire la réponse.

1. Chasles donne $\int_0^5 f = \int_0^2 f + \int_2^5 f$.
2. En remplaçant les valeurs connues, $12 = 3 + \int_2^5 f$.
3. On soustrait 3, ce qui donne 9.

Vérifier. La somme des deux portions $3 + 9$ reconstitue bien le total 12.

Conclure. $\int_2^5 f = 9$.

Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La moyenne est l'intégrale divisée par la largeur 4.

Construire la réponse.

1. Une primitive de $2x + 1$ est $x^2 + x$.
2. L'intégrale sur $[0; 4]$ vaut $16 + 4 - 0 = 20$.
3. La moyenne est $20/4 = 5$.

Vérifier. Comme la fonction est affine, la moyenne des extrémités donne aussi $(1 + 9)/2 = 5$.

Conclure. La valeur moyenne est 5.

Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Deux rectangles partagent l'intervalle de longueur 2 en bandes de largeur 1.

Construire la réponse.

1. $h = (2 - 0)/2 = 1$.
2. Les abscisses gauches sont 0 et 1.
3. Les hauteurs valent $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$.
4. La somme des aires vaut $1(0 + 1) = 1$.

Vérifier. Le carré est croissant sur $[0; 2]$: les rectangles à gauche se trouvent sous la courbe.

Conclure. L'approximation par la gauche est 1, par défaut.

Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La droite y égal à x délimite un triangle au-dessus de l'axe.

Construire la réponse.

1. Entre 0 et 3, la base mesure 3.
2. La hauteur au point final vaut $f(3) = 3$.
3. L'aire du triangle est la moitié du rectangle : $3 \times 3/2 = 4,5$.

Vérifier. La fonction est positive ou nulle sur l'intervalle, donc cette aire égale l'intégrale.

Conclure. $\int_0^3 x \, dx = 4,5$.

Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le facteur 2 correspond à la dérivée de l'exposant.

Construire la réponse.

1. Une primitive de $2e^{2x}$ est e^{2x} .
2. À la borne 1, elle vaut e^2 .

3. À la borne zéro, elle vaut $e^0 = 1$.

4. La différence est $e^2 - 1$.

Vérifier. L'intégrande est positif et $e^2 - 1 > 0$. Oublier la valeur 1 à la borne zéro donnerait une erreur.

Conclure. L'intégrale vaut exactement $e^2 - 1$.

Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les deux intégrales ont les mêmes bornes, donc on peut utiliser la linéarité.

Construire la réponse.

1. $\int_1^4 (2f - 3g) = 2 \int_1^4 f - 3 \int_1^4 g.$

2. On remplace par $2 \times 7 - 3 \times 2 = 14 - 6 = 8$.

Vérifier. Le coefficient négatif -3 porte sur toute l'intégrale de g.

Conclure. L'intégrale demandée vaut 8.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La fonction est quadratique : la moyenne des extrémités n'est pas un raccourci valide.

Construire la réponse.

1. Une primitive de x^2 est $x^3/3$.

2. L'intégrale vaut $(8 - 1)/3 = 7/3$.

3. La largeur $2 - 1$ vaut 1 : la moyenne est donc aussi $7/3$.

Vérifier. $7/3 \approx 2,333$ est entre 1 et 4. La moyenne des extrémités donnerait 2,5, une autre valeur.

Conclure. La moyenne est $7/3$.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On utilise cette fois les extrémités droites des mêmes bandes.

Construire la réponse.

1. Les abscisses sont 1 et 2, les hauteurs 1 et 4.

2. La somme à droite vaut $1(1 + 4) = 5$.

3. La valeur exacte est $[x^3/3]_0^2 = 8/3 \approx 2,667$.

4. On retrouve l'encadrement $1 \leq 8/3 \leq 5$.

Vérifier. La croissance explique que la somme de droite soit supérieure à la valeur exacte.

Conclure. L'approximation par la droite est 5, par excès ; l'intégrale exacte est $8/3$.

Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les deux moitiés de l'intervalle ont des contributions de signes opposés.
Construire la réponse.

1. Sur $[-1; 0]$, le triangle a une aire $1 \times 1/2 = 0,5$ et se situe sous l'axe : sa contribution est $-0,5$.
2. Sur $[0; 1]$, le triangle de même aire se situe au-dessus : sa contribution est $+0,5$.
3. L'intégrale est $-0,5 + 0,5 = 0$, tandis que l'aire géométrique additionne $0,5 + 0,5 = 1$.

Vérifier. La symétrie explique la compensation des contributions signées sans faire disparaître les régions géométriques.

Conclure. L'intégrale vaut 0 et l'aire géométrique totale vaut 1.

Corrigé 12

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. L'intervalle est positif, ce qui permet d'utiliser $\ln$ comme primitive.

Construire la réponse.

1. La fonction $1/x$ est continue sur $[1; 3]$.
2. Une primitive est $\ln x$.
3. La différence vaut $\ln 3 - \ln 1 = \ln 3$, car $\ln 1 = 0$.

Vérifier. Sur l'intervalle, $1/3 \leq 1/x \leq 1$. En multipliant par la largeur 2, on attend une intégrale entre $2/3$ et 2 ; $\ln 3 \approx 1,099$ convient.

Conclure. $\int_1^3 1/x \, dx = \ln 3 \approx 1,099$.

Corrigé 13

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La fonction est encadrée par deux constantes sur un intervalle de largeur connue.

Construire la réponse.

1. La largeur est $5 - 2 = 3$.
2. La constante 4 fournit une intégrale de $4 \times 3 = 12$.
3. La constante 6 fournit une intégrale de $6 \times 3 = 18$.
4. La conservation de l'ordre donne l'encadrement entre ces deux valeurs.

Vérifier. Une fonction constamment égale à 4 ou à 6 atteindrait respectivement les deux bornes : l'encadrement est cohérent.

Conclure. $12 \leq \int_2^5 f(x) \, dx \leq 18$.

Corrigé 14

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les deux puissances moyennes concernent des durées différentes.

Construire la réponse.

1. La première période fournit $100 \times 2 = 200$ Wh.
2. La seconde fournit $200 \times 1 = 200$ Wh.
3. L'énergie totale est 400 Wh sur une durée de 3 h.
4. La puissance moyenne vaut $400/3 \approx 133,3$ W.

Vérifier. Une moyenne simple de 150 W donnerait 450 Wh sur 3 h, ce qui ne correspond pas à l'énergie réelle.

Conclure. La puissance moyenne sur les trois heures est d'environ 133,3 W.

Corrigé 15

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le tirage estime une proportion d'aire, qu'il faut convertir en aire.

Construire la réponse.

1. La proportion de points sous la courbe est $900/2000 = 0,45$.
2. Le rectangle a une largeur 2 et une hauteur 3, donc une aire 6.
3. L'estimation vaut $0,45 \times 6 = 2,7$.

Vérifier. Le résultat se situe entre 0 et l'aire totale 6. Un nouveau tirage peut donner une autre proportion.

Conclure. L'intégrale est estimée à 2,7 ; ce n'est pas une valeur exacte.

9 Corrigé du problème

1. **Comprendre la question.** L'énergie est l'accumulation de la puissance au cours du temps.

Construire la réponse.

- (a) On calcule $E = \int_0^4 (2t + 3) dt$.
- (b) Une primitive est $F(t) = t^2 + 3t$.
- (c) $E = F(4) - F(0) = (16 + 12) - 0 = 28$.

Vérifier. Les unités sont watts multipliés par secondes, soit des joules. La puissance positive impose une énergie positive.

Conclure. L'énergie totale fournie est de 28 J.

2. **Comprendre la question.** La puissance moyenne doit fournir la même énergie pendant la même durée.

Construire la réponse.

- (a) La durée est $4 - 0 = 4$ secondes.
- (b) La moyenne vaut $E/4 = 28/4 = 7$ watts.

Vérifier. Une puissance constante de 7 W pendant 4 s fournirait bien 28 J. La moyenne est entre les valeurs minimale 3 W et maximale 11 W.

Conclure. La puissance moyenne est de 7 W.

3. **Comprendre la question.** La courbe affine forme un trapèze avec l'axe horizontal.

Construire la réponse.

- (a) Les hauteurs aux bornes sont $P(0) = 3$ et $P(4) = 11$.
- (b) La largeur est 4 secondes.
- (c) L'aire du trapèze vaut $4(3 + 11)/2 = 4 \times 7 = 28$.

Vérifier. Cette méthode géométrique retrouve le calcul par primitive, puisque la puissance est positive.

Conclure. L'aire représente la même énergie de 28 J.

4. **Comprendre la question.** Quatre rectangles sur un intervalle de largeur 4 ont chacun une largeur de 1.

Construire la réponse.

- (a) À gauche, on utilise les temps 0, 1, 2, 3 : les hauteurs sont 3, 5, 7, 9 et la somme des aires vaut 24.
- (b) À droite, on utilise 1, 2, 3, 4 : les hauteurs sont 5, 7, 9, 11 et la somme vaut 32.
- (c) La fonction croît : les rectangles gauches sous-estiment l'intégrale et les droits la surestiment.

Vérifier. On obtient bien $24 \leq 28 \leq 32$. Les deux sommes comportent quatre rectangles, pas cinq.

Conclure. L'encadrement par ces rectangles est de 24 J à 32 J.

5. **Comprendre la question.** Le tirage uniforme estime la proportion de l'aire du rectangle située sous la courbe.

Construire la réponse.

- (a) La proportion observée est $635/1000 = 0,635$.
- (b) L'aire du rectangle de tirage vaut $4 \times 11 = 44$.
- (c) L'énergie estimée est $0,635 \times 44 = 27,94$ J.
- (d) L'écart à la valeur exacte est $27,94 - 28 = -0,06$ J.

Vérifier. La proximité de cette estimation ne garantit pas qu'un autre tirage de 1000 points sera aussi précis. L'aléa ne fournit pas un encadrement déterministe.

Conclure. La simulation estime l'énergie à 27,94 J, très proche de 28 J pour ce tirage.

10 Variante autonome et bilan

Calcule énergie et puissance moyenne pour $Q(t) = t^2$ de 0 à 3 secondes.

À toi d'essayer : Vérifie ta démarche

Résous la variante, puis explique pourquoi ta méthode s'applique.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 25](#)

- Je peux expliquer : comprendre une intégrale comme une accumulation.
- Je peux expliquer : calculer une intégrale avec une primitive.
- Je peux expliquer : propriétés et comparaisons des intégrales.
- Je peux expliquer : valeur moyenne d'une fonction continue.
- Je peux expliquer : approcher une intégrale numériquement.

11 Fiche-mémoire

Comprendre une intégrale comme une accumulation.

1. Identifie l'intervalle et sa largeur $b - a$.
2. Repère le signe de la fonction sur chaque portion.
3. Calcule les aires simples par la géométrie si possible.
4. Pour l'intégrale, donne un signe aux contributions sous l'axe.
5. Pour une aire géométrique, additionne les valeurs positives et précise les unités.

Calculer une intégrale avec une primitive.

1. Vérifie que la fonction est continue sur l'intervalle.
2. Cherche une primitive et contrôle-la par dérivation.
3. Calcule séparément $F(b)$ et $F(a)$.
4. Soustrais dans l'ordre $F(b) - F(a)$ avec des parenthèses.
5. Contrôle signe, ordre de grandeur et unités avant d'arrondir.

Propriétés et comparaisons des intégrales.

1. Vérifie et aligne les bornes des intégrales connues.
2. Utilise Chasles pour découper ou reconstituer un intervalle.
3. Utilise la linéarité pour les sommes et coefficients constants.
4. Intègre une constante en la multipliant par la largeur.
5. Pour un encadrement, multiplie les bornes de la fonction par $b - a$.

Valeur moyenne d'une fonction continue.

1. Identifie l'intervalle et sa largeur.
2. Calcule l'intégrale, c'est-à-dire l'accumulation totale.
3. Divise par la largeur pour obtenir la moyenne.
4. Pour plusieurs périodes, additionne leurs accumulations avant de diviser.
5. Contrôle que la moyenne garde les unités de la fonction et reste entre ses bornes.

Approcher une intégrale numériquement.

1. Calcule $h = (b - a)/n$.
2. Liste exactement n abscisses gauches ou droites.
3. Évalue la fonction à ces abscisses et additionne les hauteurs.
4. Multiplie par h puis utilise les variations pour interpréter l'erreur.
5. Pour Monte-Carlo, multiplie la proportion observée par l'aire totale du rectangle.

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Une intégrale multiplie les unités de la hauteur par celles de la largeur.

Indice 2 — Un pas de plus.

Un débit en litres par minute est cumulé pendant un temps en minutes.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

F désigne une primitive de f .

Indice 2 — Un pas de plus.

La différence doit se faire dans l'ordre valeur finale moins valeur initiale.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Écris chaque intégrale comme une différence de valeurs d'une primitive.

Indice 2 — Un pas de plus.

Compare $F(b) - F(a)$ et $F(a) - F(b)$.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

La moyenne répartit l'accumulation totale sur la largeur de l'intervalle.

Indice 2 — Un pas de plus.

La largeur entre a et b n'est pas b seul.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve**Indice 1 — Une piste.**

Pour une fonction croissante, la hauteur au début de chaque intervalle est la plus petite de cet intervalle.

Indice 2 — Un pas de plus.

Compare chaque rectangle de gauche avec la portion de courbe située au-dessus de sa base.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche**Indice 1 — Une piste.**

Repère les données utiles et l'inconnue. Reviens à la méthode correspondante dans la boîte à outils.

Indice 2 — Un pas de plus.

Contrôle les unités, les bornes et la plausibilité du résultat avant de lire la correction.

[Revenir à la recherche, p. 22](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

L'unité est le litre : $(\text{L}/\text{min}) \times \text{min} = \text{L}$. L'intégrale donne une quantité de liquide, tandis que la moyenne du débit resterait en litres par minute.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. On évalue la primitive aux bornes, pas la fonction initiale. Toute constante ajoutée à F disparaît dans la soustraction.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Inverser les bornes change le signe : $\int_b^a f = -\int_a^b f$. En effet, $F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a))$. Cela n'impose pas que l'une des intégrales soit toujours positive.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Il faut diviser par $b - a$, pour $a < b$: $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. Le rectangle de hauteur m et largeur $b - a$ retrouve ainsi la même accumulation.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Les rectangles à gauche sous-estiment l'intégrale d'une fonction croissante : leur hauteur ne dépasse pas les valeurs de la fonction sur chaque bande. Les rectangles à droite donnent au contraire une surestimation.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche

Comprendre la question. Une puissance quadratique exige une moyenne obtenue par l'intégrale.

Construire la réponse.

1. L'énergie est $\int_0^3 t^2 dt = [t^3/3]_0^3 = 27/3 = 9 \text{ J}$.
2. La durée vaut 3 secondes, donc la puissance moyenne est $9/3 = 3 \text{ W}$.
3. La moyenne des extrémités serait $(0 + 9)/2 = 4,5 \text{ W}$; ce raccourci n'est pas exact pour une fonction quadratique.

Vérifier. Une puissance constante de 3 W durant 3 s fournit bien 9 J.

Conclure. L'énergie est 9 J et la puissance moyenne 3 W.

[Revenir à la recherche, p. 22](#)