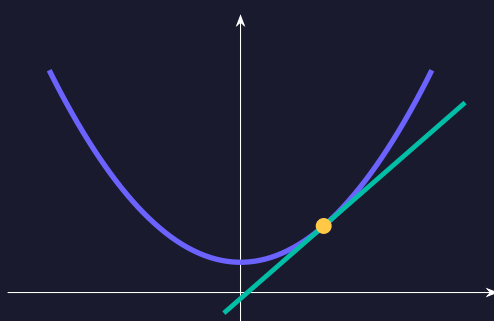


Équations différentielles

Analyse ■ Comprendre et s'entraîner



Comprendre Calculer Vérifier

Terminale STI2D — spécialité maths
Année scolaire 2026–2027

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	Pourquoi ce chapitre ?	3
2	L'idée avant la formule	3
3	Le cours formel	3
3.1	Vérifier une équation différentielle	3
3.2	Résoudre $y' = ay$	4
3.3	Résoudre $y' = ay + b$	5
3.4	Condition initiale et interprétation du modèle	6
3.5	Approcher une solution différentielle par Euler	7
4	Boîte à outils	9
5	Exercices progressifs	11
6	Problème — Pour aller plus loin	13
7	Indices des exercices	14
8	Corrigés détaillés	16
9	Corrigé du problème	21
10	Variante autonome et bilan	22
11	Fiche-mémoire	22
12	Indices des pauses et des preuves	23
13	Explications des pauses et des preuves	25

1 Pourquoi ce chapitre ?

Une équation différentielle décrit comment une grandeur évolue vers un équilibre. La condition initiale fixe la solution et Euler permet une approche numérique. **Ton parcours.** Partie mathématiques de la spécialité physique-chimie et mathématiques en STI2D. Cette fiche complète les cours de mathématiques communs ; elle ne remplace pas les enseignements de physique-chimie.

- Vérifier une équation différentielle.
- Résoudre $y' = ay$.
- Résoudre $y' = ay + b$.
- Condition initiale et interprétation du modèle.
- Approcher une solution différentielle par Euler.

2 L'idée avant la formule

Plus l'écart à la température ambiante est grand, plus le refroidissement est rapide dans ce modèle. L'équilibre est la valeur pour laquelle la dérivée devient nulle.

3 Le cours formel

3.1 Vérifier une équation différentielle

Intuition | Construire la notion pas à pas

L'inconnue est une fonction. Une équation ordinaire cherche un nombre. Une équation différentielle cherche une fonction dont les valeurs et les variations respectent une relation. Dans $y' = ay + b$, la pente à chaque instant dépend de la valeur actuelle de y .

Vérifier une proposition. On calcule d'un côté la dérivée de la fonction proposée, de l'autre l'expression $ay + b$. Il faut retrouver la même expression pour toute valeur de la variable dans l'intervalle étudié. Une coïncidence à un seul instant ne suffit pas.

Ajouter une condition initiale. Une égalité comme $y(0) = 5$ fixe une valeur de départ. Elle se vérifie séparément de l'équation différentielle. Une fonction peut satisfaire la condition initiale sans posséder la bonne évolution.

Chercher un équilibre. Une solution constante ne varie pas : sa dérivée est nulle. Pour $a \neq 0$, elle vérifie $0 = aL + b$, d'où $L = -b/a$. Cet équilibre représente une valeur que le modèle peut maintenir sans évolution, par exemple une température ambiante.

Définition | Comprendre la notion

Une équation différentielle relie une fonction inconnue et sa dérivée. Dans $y' = ay + b$, a et b sont des constantes, mais y est une fonction du temps ou de la variable. Pour vérifier qu'une fonction est solution, calcule sa dérivée puis calcule séparément $ay + b$. Les deux expressions doivent être égales pour tout point de l'intervalle, pas seulement à une valeur. Une condition initiale comme $y(0) = y_0$ ajoute une contrainte de valeur. Une solution d'équilibre est constante : sa dérivée est nulle. Si $a \neq 0$, l'équilibre vaut $-b/a$. Ce vocabulaire relie l'équation à des modèles de refroidissement, de charge ou de croissance.

💡 Exemple | Exemple commenté

Considérons $y(t) = 4e^{-2t} + 3$ et l'équation $y' = -2y + 6$. La dérivée est $y'(t) = -8e^{-2t}$, car la constante 3 disparaît.

Calculons séparément le membre droit : $-2(4e^{-2t} + 3) + 6 = -8e^{-2t} - 6 + 6 = -8e^{-2t}$. Les expressions coïncident pour tout t : la fonction est solution.

Sa valeur initiale est $y(0) = 4 + 3 = 7$. La constante 3 est l'équilibre de l'équation ; elle ne désigne pas la valeur initiale de cette solution particulière.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Tester une équation différentielle à un seul instant ne la vérifie pas. Les deux expressions doivent être égales pour tout point de l'intervalle.

À toi d'essayer : Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Dans une équation différentielle, l'inconnue est...

1. Une fonction
2. Un nombre seulement
3. Une probabilité

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.2 Résoudre $y' = ay$

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Une variation proportionnelle à la quantité présente. Dans $y' = ay$, la pente représente a fois la valeur actuelle. Pour une quantité positive et a positif, plus la quantité grandit, plus sa vitesse de croissance grandit. Pour a négatif, l'évolution se fait en sens décroissant.

Reconnaître l'exponentielle. La dérivée de e^{at} est ae^{at} . Multiplier cette fonction par une constante C conserve la relation : les solutions sont $y(t) = Ce^{at}$.

Fixer la valeur initiale. À $t = 0$, l'exponentielle vaut 1, donc $y(0) = C$. La condition initiale détermine directement C . Sans cette condition, C doit rester libre, y compris égal à zéro ou négatif.

Interpréter les signes. L'exponentielle est positive : la solution garde le signe de C . Si a est négatif, toute solution tend vers zéro lorsque t augmente, mais une solution négative s'en rapproche en croissant. Il faut donc tenir compte du signe initial avant d'annoncer une croissance ou une décroissance.

Si $a = 0$, la formule donne $Ce^0 = C$ et retrouve les fonctions constantes.

📖 Définition | Comprendre la notion

Les solutions de $y' = ay$, avec a constant, sont $y(t) = Ce^{at}$, où C est une constante réelle. La dérivation redonne $aCe^{at} = ay$. Si $a = 0$, les solutions sont constantes, ce que la formule retrouve avec $e^0 = 1$. Si $y(0) = y_0$, alors $C = y_0$. Pour $a < 0$, toute solution tend vers zéro en temps positif ; pour $a > 0$, une solution de valeur initiale positive croît exponentiellement. Une valeur

initiale négative conserve son signe et ne décrit pas une population positive. L'équation signifie que le taux de variation est proportionnel à la quantité présente. Vérifie que cette hypothèse correspond au contexte du modèle.

💡 Exemple | Exemple commenté

Pour $y' = -0,5y$ et $y(0) = 8$, la famille est $Ce^{-0,5t}$. La condition en zéro donne $C = 8$. Ainsi $y(t) = 8e^{-0,5t}$. Sa dérivée est $-4e^{-0,5t}$, qui égale bien $-0,5y(t)$ et reste négative. La fonction est positive, décroissante et tend vers zéro.

Le coefficient $-0,5$ caractérise une variation instantanée proportionnelle. Sur une unité de temps, le coefficient multiplicateur exact est $e^{-0,5}$; il ne faut pas le remplacer par $0,5$ comme dans une baisse discrète de 50% .

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Le coefficient a d'une équation différentielle n'est pas directement un taux discret par période. Le multiplicateur sur une durée h est e^{ah} .

À toi d'essayer : Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Les solutions de $y' = ay$ sont...

1. $Ce^{t/a}$
2. Ce^{at}
3. $at + C$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.3 Résoudre $y' = ay + b$

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Un apport ou un retrait constant modifie l'équilibre. Dans $y' = ay + b$, le terme b s'ajoute à la variation proportionnelle. La valeur vers laquelle une solution peut se rapprocher n'est donc plus nécessairement zéro.

Chercher d'abord une solution constante. Pour $a \neq 0$, l'équilibre L vérifie $aL + b = 0$, soit $L = -b/a$. Cette valeur est imposée par l'équation ; elle n'est pas une constante arbitraire.

Étudier l'écart à l'équilibre. Posons $z = y - L$. Sa dérivée est celle de y , et $z' = a(z + L) + b = az$ parce que $aL + b = 0$. L'écart suit donc une équation homogène. On obtient $z = Ce^{at}$, puis $y = Ce^{at} + L$.

Lire le comportement. Si a est négatif, l'écart tend vers zéro et la solution se rapproche de L . Le signe de C indique de quel côté elle se trouve. Si a est positif, un écart non nul s'amplifie.

Lorsque $a = 0$, on ne divise pas par a : l'équation devient $y' = b$, dont les solutions sont $bt + C$.

Définition | Comprendre la notion

Si $a \neq 0$, pose l'équilibre $L = -b/a$. La fonction $z = y - L$ vérifie $z' = az$. Toutes les solutions sont donc $y(t) = Ce^{at} + L = Ce^{at} - b/a$. La constante L n'est pas une constante arbitraire : elle est fixée par l'équation. C reste à déterminer avec une condition initiale. Si $a < 0$, l'exponentielle tend vers zéro et y tend vers l'équilibre L . La solution s'en rapproche par au-dessus si $C > 0$ et par en-dessous si $C < 0$. Si $a = 0$, l'équation devient $y' = b$ et les solutions sont $bt + C$: la formule avec division par a ne doit pas être utilisée.

Exemple | Exemple commenté

Pour $y' = -2y + 6$, on cherche d'abord $0 = -2L + 6$, d'où $L = 3$. L'écart $z = y - 3$ vérifie $z' = -2z$.

Les solutions sont donc $y(t) = Ce^{-2t} + 3$. En dérivant, on obtient $-2Ce^{-2t}$; en calculant $-2y + 6$, les constantes -6 et $+6$ se compensent et donnent le même résultat.

Si C est positif, la solution est au-dessus de 3 et décroît vers 3. Si C est négatif, elle est en dessous et croît vers 3. Pour C nul, elle reste exactement à l'équilibre.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

L'équilibre L et la constante C n'ont pas le même rôle. L est fixé par a et b ; C dépend de la condition initiale.

À toi d'essayer : Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

L'équilibre de $y' = ay + b$, a non nul, vaut...

1. $-b/a$
2. b/a
3. a/b

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.4 Condition initiale et interprétation du modèle

Intuition | Construire la notion pas à pas

Choisir une trajectoire dans une famille. L'équation fixe une famille de solutions et la condition initiale choisit celle qui passe par le point donné. Pour $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$, on commence par l'équilibre $L = -b/a$ et la famille $Ce^{at} + L$.

La constante est un écart. En zéro, $y(0) = C + L$. Si la valeur initiale est y_0 , alors $C = y_0 - L$. C représente donc l'écart initial à l'équilibre, pas la valeur initiale elle-même.

Une origine de temps différente. Si la condition est donnée en t_0 , on peut écrire directement $y(t) = (y_0 - L)e^{a(t-t_0)} + L$. En $t = t_0$, l'exposant est nul, ce qui facilite le contrôle.

Vérifier qu'un seuil peut être atteint. Une solution qui décroît de 80 vers un équilibre 20 reste au-dessus de 20 à tout temps fini. Un seuil inférieur à l'équilibre est impossible. Avant de prendre

un logarithme pour résoudre un seuil, vérifie donc que l'exponentielle isolée devrait être positive et que le temps obtenu appartient au domaine du modèle.

Définition | Comprendre la notion

Pour $y' = ay + b$, $a \neq 0$, avec $y(0) = y_0$, la solution est $y(t) = (y_0 - L)e^{at} + L$, où $L = -b/a$. Si la condition est donnée à t_0 au lieu de zéro, écris plus directement $y(t) = (y_0 - L)e^{a(t-t_0)} + L$. L'exponentielle vaut alors 1 au temps initial choisi. Une fois la constante calculée, interprète le signe de la dérivée, la limite et les unités. Un seuil doit être compatible avec la valeur initiale et l'équilibre. Une température qui décroît de 80 vers 20 n'atteint pas 10 dans ce modèle.

Exemple | Exemple commenté

Pour $T' = -0,1T + 2$ avec $T(0) = 80$, l'équilibre vaut $L = -2/(-0,1) = 20$. La famille est $Ce^{-0,1t} + 20$.

La condition initiale donne $C + 20 = 80$, donc $C = 60$. La solution est $T(t) = 60e^{-0,1t} + 20$. Le nombre 60 représente l'écart initial à l'équilibre.

Sa dérivée $-6e^{-0,1t}$ est négative. La température décroît de 80 vers 20 en restant strictement au-dessus de 20. Ce comportement permet déjà de déterminer quels seuils sont plausibles avant tout calcul logarithmique.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Ne prends jamais le logarithme d'une quantité négative pour forcer la résolution d'un seuil impossible. La positivité de l'exponentielle doit être contrôlée avant cette étape.

À toi d'essayer : Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Pour $y(t) = Ce^{-t} + 8$ et $y(0) = 11$, C vaut...

1. 11
2. 3
3. 19

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 23 [Explication](#), p. 25

3.5 Approcher une solution différentielle par Euler

Intuition | Construire la notion pas à pas

Approcher une solution sans formule explicite. Dans $y' = ay + b$, la pente est calculable dès que l'on connaît une valeur actuelle de y . La méthode d'Euler utilise cette pente pour tracer un petit segment et estimer la valeur suivante.

Avec un pas h , on calcule $y_{n+1} = y_n + h(ay_n + b)$ et $t_{n+1} = t_n + h$. Toute la pente utilise l'ancienne valeur y_n . La nouvelle valeur ne doit pas être réinjectée au milieu du même calcul.

Distinguer le modèle et son approximation. Les valeurs produites par Euler ne sont généralement pas exactes. Même si les calculs arithmétiques sont justes, un pas trop grand peut donner un comportement contraire à celui de l'équation.

Comprendre un effet du pas. Pour $y' = -ky$, la mise à jour est $y_{n+1} = (1 - kh)y_n$. Si $kh > 1$, le coefficient devient négatif et fait alterner les signes, alors que la solution exponentielle exacte conserve son signe. Ce signal invite à réduire le pas.

Pour comparer la précision de deux pas, atteins le même temps final avec chacun, puis compare à la solution exacte si elle est connue.

Définition | Comprendre la notion

Pour $y' = ay + b$, la pente dépend de la valeur actuelle y . Au pas h , Euler donne $t_{n+1} = t_n + h$ et $y_{n+1} = y_n + h(ay_n + b)$. La formule utilise l'ancienne valeur y_n dans tout le membre droit. Dans un tableur, chaque ligne dépend de la précédente. En Python, calcule la nouvelle valeur après avoir évalué la pente courante. La suite approchée n'est pas la solution exacte. Un pas trop grand peut créer des oscillations artificielles : pour $y' = -ky$, la mise à jour multiplie par $1 - kh$, qui devient négatif si $kh > 1$. Compare plusieurs pas et le comportement attendu du modèle ; si la formule exacte est connue, elle sert de référence.

Exemple | Exemple commenté

Pour $y' = -y + 2$, $y(0) = 0$ et $h = 0,5$, la première pente vaut 2. On obtient $y_1 = 0 + 0,5 \times 2 = 1$ au temps 0,5.

La pente suivante est $-1 + 2 = 1$. Le second pas donne $y_2 = 1 + 0,5 \times 1 = 1,5$ au temps 1. La pente a changé : il ne faut pas réutiliser 2 au deuxième pas.

La solution exacte est $2 - 2e^{-t}$ et vaut environ 1,264 en 1. L'approximation 1,5 est trop grande d'environ 0,236. Elle reste ici cohérente avec une évolution vers l'équilibre 2, mais n'est pas la valeur exacte.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Deux premiers pas de tailles différentes n'atteignent pas le même instant. Compare les valeurs au même temps final avant de comparer leurs erreurs.

À toi d'essayer : Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Pour $y' = ay + b$, Euler utilise. . .

1. $y_{n+1} = y_n + h(ay_n + b)$
2. $y_{n+1} = y_n + ah + b$
3. $y_{n+1} = ay_n + b$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 25](#)

4 Boîte à outils**✂ Méthode | Vérifier une équation différentielle**

1. Identifie l'équation et la fonction proposée.
2. Calcule sa dérivée.
3. Remplace séparément y dans le membre droit.
4. Compare les expressions sur tout l'intervalle.
5. Vérifie à part une condition initiale ou impose une dérivée nulle pour un équilibre.

✂ Méthode | Résoudre $y' = ay$

1. Reconnais la forme $y' = ay$ et lis le coefficient a .
2. Écris la famille Ce^{at} .
3. Utilise la condition initiale pour calculer C si elle est donnée.
4. Contrôle la dérivée et la valeur initiale.
5. Interprète signe, variations et limite selon a et C .

✂ Méthode | Résoudre $y' = ay + b$

1. Identifie a et b ; traite séparément le cas $a = 0$.
2. Pour $a \neq 0$, calcule l'équilibre $L = -b/a$.
3. Écris $y(t) = Ce^{at} + L$.
4. Utilise une condition pour déterminer C si nécessaire.
5. Vérifie l'équation et distingue l'équilibre fixé de la constante libre.

✂ Méthode | Condition initiale et interprétation du modèle

1. Calcule l'équilibre et écris la famille des solutions.
2. Utilise le temps initial exact, qui n'est pas forcément zéro.
3. Détermine l'écart initial à l'équilibre.
4. Contrôle la dérivée et la valeur imposée.
5. Avant un seuil, vérifie sa compatibilité avec les variations et la limite.

 Méthode | Approcher une solution différentielle par Euler

1. Initialise le temps et la valeur à partir de la condition donnée.
2. Calcule la pente $ay_n + b$ avec l'ancienne valeur.
3. Ajoute à y_n le produit de cette pente par h .
4. Avance le temps et recommence avec la nouvelle valeur.
5. Contrôle le comportement et compare les pas au même temps final.

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases ; 6 à 10 demandent plusieurs étapes ; 11 à 15 t'invitent à choisir, justifier et contrôler. Cherche avant de consulter les indices.

Exercice 1 — Une vérification simple ★☆☆

$y(t) = 5e^{3t}$ satisfait-elle $y' = 3y$?

Exercice 2 — La famille complète ★☆☆

Résous $y' = 2y$.

Exercice 3 — Un équilibre non nul ★☆☆

Résous $y' = -y + 5$.

Exercice 4 — Fixer la constante ★☆☆

$y(t) = Ce^{-2t} + 4$ et $y(0) = 10$. Détermine C.

Exercice 5 — Un premier pas ★☆☆

$y' = 2y$, $y(0) = 3$, $h = 0,1$. Calcule y_1 .

Exercice 6 — Un équilibre ★★☆☆

Trouve la solution constante de $y' = -4y + 12$.

Exercice 7 — Une décroissance ★★★☆☆

Résous $y' = -3y$ avec $y(0) = 4$.

Exercice 8 — Un signe à surveiller ★★★☆☆

Résous $y' = 3y + 6$.

Exercice 9 — Un autre instant initial ★★★☆☆

Résous $y' = -y + 3$ avec $y(2) = 7$.

Exercice 10 — Deux pas vers un équilibre ★★★☆☆

$y' = -2y + 8$, $y(0) = 1$, $h = 0,25$. Calcule y_1 et y_2 .

Exercice 11 — Une condition insuffisante ★★★★★

$y(t) = 2t + 1$ vérifie $y(0) = 1$. Est-elle solution de $y' = 2y$?

Exercice 12 — Un temps de demi-vie ★★★★★

$y(t) = 10e^{-0,2t}$. Trouve quand y atteint 5.

Exercice 13 — Le cas $a = 0$ ★★★★★

Résous $y' = 4$ avec $y(0) = 2$.

Exercice 14 — Un seuil de refroidissement ★★ ★

$T(t) = 60e^{-0,1t} + 20$. Quand T atteint-elle 50 ? Peut-elle atteindre 10 pour $t \geq 0$?

Exercice 15 — Un pas trop grand ★★ ★

Pour $y' = -2y$, $y(0) = 1$, compare le premier pas $h = 1$ à $h = 0,25$. Interprète le signe.

6 Problème — Pour aller plus loin

Refroidissement d'un dispositif

La température vérifie $T' = -0,2T + 4$ et $T(0) = 80$, avec t en minutes.

1. Trouve la température d'équilibre.
2. Résous l'équation avec la condition initiale et vérifie.
3. Étudie le sens de variation et la limite.
4. Trouve le temps pour atteindre 50 degrés.
5. Effectue deux pas d'Euler de longueur 1 et compare à la valeur exacte au temps 2.

7 Indices des exercices

Exercice 1

Indice 1. Dérive l'exponentielle composée.

Indice 2. Calcule aussi $3y$.

Exercice 2

Indice 1. Le coefficient a vaut 2.

Indice 2. Il faut une constante arbitraire.

Exercice 3

Indice 1. Calcule $-b/a$.

Indice 2. Ajoute l'exponentielle de coefficient a .

Exercice 4

Indice 1. À zéro, $e^0 = 1$.

Indice 2. Soustrais la valeur d'équilibre.

Exercice 5

Indice 1. Utilise la valeur initiale pour la pente.

Indice 2. Ajoute l'accroissement à 3.

Exercice 6

Indice 1. Une constante a a une dérivée nulle.

Indice 2. Résous une équation du premier degré.

Exercice 7

Indice 1. Le coefficient négatif reste dans l'exposant.

Indice 2. À $t = 0$, l'exponentielle vaut 1.

Exercice 8

Indice 1. L'équilibre peut être négatif.

Indice 2. La formule contient $-b/a$.

Exercice 9

Indice 1. Utilise $t - 2$ dans l'exposant.

Indice 2. L'écart initial vaut $7 - 3$.

Exercice 10

Indice 1. Recalcule la pente après chaque étape.

Indice 2. La seconde pente n'est plus 6.

Exercice 11

Indice 1. Compare les expressions pour tout t .

Indice 2. Une égalité à un point ne vérifie pas une équation différentielle.

Exercice 12

Indice 1. Divise d'abord par 10.

Indice 2. Utilise $\ln$ pour isoler t .

Exercice 13

Indice 1. Reviens à une primitive simple.

Indice 2. Ne divise jamais par zéro.

Exercice 14

Indice 1. Isole le terme exponentiel.

Indice 2. Vérifie son signe avant de prendre un logarithme.

Exercice 15

Indice 1. La solution exacte reste positive.

Indice 2. Ne compare pas les erreurs à des temps différents.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La fonction doit avoir une dérivée égale à trois fois sa propre valeur.

Construire la réponse.

1. La dérivée de $5e^{3t}$ est $15e^{3t}$.
2. Le membre droit $3y$ vaut $3 \times 5e^{3t} = 15e^{3t}$.
3. Les deux expressions sont identiques pour tout t .

Vérifier. La valeur initiale associée est $y(0) = 5$; elle n'a pas été nécessaire pour vérifier l'équation.

Conclure. Oui, la fonction est solution de $y' = 3y$.

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Aucune condition initiale n'est donnée, donc une constante reste libre.

Construire la réponse.

1. Le coefficient a est 2.
2. La famille des solutions est $y(t) = Ce^{2t}$, pour tout réel C .

Vérifier. La dérivée vaut $2Ce^{2t} = 2y(t)$, y compris lorsque C vaut zéro.

Conclure. Toutes les solutions sont Ce^{2t} avec $C \in \mathbb{R}$.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le coefficient a est non nul, donc on peut calculer un équilibre.

Construire la réponse.

1. Ici $a = -1$ et $b = 5$.
2. $L = -5/(-1) = 5$.
3. La famille est $y(t) = Ce^{-t} + 5$.

Vérifier. La dérivée vaut $-Ce^{-t}$, et $-y + 5 = -Ce^{-t} - 5 + 5$ donne la même expression.

Conclure. Toutes les solutions sont $Ce^{-t} + 5$, avec C réel.

Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. À l'origine du temps, l'exponentielle vaut 1.

Construire la réponse.

1. $y(0) = Ce^0 + 4 = C + 4$.
2. La condition donne $C + 4 = 10$, donc $C = 6$.
3. La solution est $y(t) = 6e^{-2t} + 4$.

Vérifier. En zéro, $6 + 4 = 10$. L'équilibre reste 4 : il ne change pas lorsque l'on détermine C .

Conclure. $C = 6$.

Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Un pas utilise la pente calculée avec la valeur initiale 3.

Construire la réponse.

1. La pente initiale vaut $2 \times 3 = 6$.
2. La variation approchée est $0,1 \times 6 = 0,6$.
3. On obtient $y_1 = 3 + 0,6 = 3,6$ au temps 0,1.

Vérifier. La solution exacte $3e^{2t}$ vaut environ 3,664 au même temps : Euler fournit ici une estimation inférieure.

Conclure. $y_1 = 3,6$ à $t_1 = 0,1$.

Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Une solution constante a une dérivée nulle.

Construire la réponse.

1. On note L sa valeur et impose $0 = -4L + 12$.
2. On obtient $4L = 12$, donc $L = 3$.

Vérifier. La dérivée de la fonction constante 3 vaut 0, et $-4 \times 3 + 12 = 0$.

Conclure. La solution constante est $y(t) = 3$.

Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On détermine la constante dans la famille de coefficient -3.

Construire la réponse.

1. La famille est $y(t) = Ce^{-3t}$.
2. En zéro, $y(0) = Ce^0 = C$.
3. La condition impose $C = 4$.

Vérifier. La dérivée vaut $-12e^{-3t} = -3y(t)$ et la valeur en zéro est 4.

Conclure. $y(t) = 4e^{-3t}$.

Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le signe de l'équilibre vient de $-b/a$.

Construire la réponse.

1. Ici $a = 3$ et $b = 6$.

2. $L = -6/3 = -2$.

3. La famille est $y(t) = Ce^{3t} - 2$.

Vérifier. Le membre droit vaut $3Ce^{3t} - 6 + 6 = 3Ce^{3t}$, identique à la dérivée.

Conclure. Toutes les solutions sont $Ce^{3t} - 2$.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La valeur imposée se situe au temps 2 et doit être utilisée à cet instant.

Construire la réponse.

1. L'équilibre de $y' = -y + 3$ est 3.
2. Au temps 2, l'écart à l'équilibre est $7 - 3 = 4$.
3. On écrit donc $y(t) = 4e^{-(t-2)} + 3$.

Vérifier. En 2, la valeur vaut $4 + 3 = 7$. La dérivée est $-4e^{-(t-2)}$, égale à $-y + 3$.

Conclure. La solution est $y(t) = 4e^{-(t-2)} + 3$.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Il faut recalculer la pente après chaque mise à jour.

Construire la réponse.

1. Au départ, $-2y_0 + 8 = -2 + 8 = 6$.
2. $y_1 = 1 + 0,25 \times 6 = 2,5$, au temps 0,25.
3. La nouvelle pente est $-2 \times 2,5 + 8 = 3$.
4. $y_2 = 2,5 + 0,25 \times 3 = 3,25$, au temps 0,5.

Vérifier. L'équilibre vaut 4. Les valeurs 1, 2,5 et 3,25 s'en rapprochent, avec une pente qui diminue.

Conclure. $y_1 = 2,5$ et $y_2 = 3,25$.

Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La condition en zéro doit être distinguée de l'équation sur un intervalle.

Construire la réponse.

1. La fonction $2t + 1$ donne bien $y(0) = 1$.
2. Sa dérivée vaut constamment 2.
3. Le membre droit $2y$ vaut $4t + 2$, égal à 2 seulement pour $t = 0$.

Vérifier. En $t = 1$, la dérivée vaut 2 et le membre droit vaut 6 : l'équation échoue.

Conclure. Non, satisfaire la condition initiale ne suffit pas à être solution.

Corrigé 12

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La quantité doit atteindre la moitié de sa valeur initiale.

Construire la réponse.

1. $10e^{-0,2t} = 5$ donne $e^{-0,2t} = 1/2$.
2. En prenant $\ln$, $-0,2t = \ln(1/2) = -\ln 2$.
3. On divise par $-0,2$: $t = 5 \ln 2 \approx 3,466$.

Vérifier. Ce temps est positif et $e^{-0,2(5 \ln 2)} = e^{-\ln 2} = 1/2$.

Conclure. La valeur 5 est atteinte au temps $5 \ln 2$, soit environ 3,466 unités de temps.

Corrigé 13

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le coefficient de y est nul : il s'agit directement d'une recherche de primitive.

Construire la réponse.

1. Les fonctions de dérivée 4 sont $y(t) = 4t + C$.
2. En zéro, la valeur est C . La condition impose $C = 2$.

Vérifier. La dérivée de $4t + 2$ vaut 4 et sa valeur initiale vaut 2.

Conclure. La solution est $y(t) = 4t + 2$.

Corrigé 14

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On traite séparément le seuil accessible 50 et le seuil situé sous l'équilibre.

Construire la réponse.

1. Pour 50, $60e^{-0,1t} + 20 = 50$ donne $e^{-0,1t} = 1/2$.
2. En prenant $\ln$, $-0,1t = -\ln 2$, donc $t = 10 \ln 2 \approx 6,931$.
3. Pour 10, l'équation imposerait $60e^{-0,1t} = -10$, impossible car le membre gauche est positif.

Vérifier. Le temps du premier seuil est positif. La température reste strictement supérieure à 20, ce qui confirme l'impossibilité du second.

Conclure. La température atteint 50 au temps $10 \ln 2$ et n'atteint jamais 10 dans ce modèle pour $t \geq 0$.

Corrigé 15

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le signe permet de détecter un effet artificiel du grand pas, mais la précision se compare au même temps.

Construire la réponse.

1. Avec $h = 1$, $y_1 = 1 + 1(-2) = -1$ au temps 1.
2. Avec $h = 0,25$, le multiplicateur est $1 - 2h = 0,5$: le premier pas donne 0,5 au temps 0,25.

3. Pour atteindre le temps 1 avec les petits pas, il faut quatre mises à jour : $1 \rightarrow 0,5 \rightarrow 0,25 \rightarrow 0,125 \rightarrow 0,0625$.
4. La solution exacte est e^{-2t} , positive, et vaut environ 0,1353 en 1.

Vérifier. Le grand pas produit un signe impossible pour la solution exacte. Au même temps 1, l'erreur du petit pas est environ 0,0728 contre 1,1353 pour le grand pas.

Conclure. Le pas 1 crée une alternance artificielle de signes ; le pas 0,25 reste positif et donne ici une meilleure approximation.

9 Corrigé du problème

1. **Comprendre la question.** Une température d'équilibre ne varie plus : sa dérivée est nulle.

Construire la réponse.

- (a) On impose $0 = -0,2L + 4$.
 (b) Cela donne $0,2L = 4$, puis $L = 4/0,2 = 20$.

Vérifier. En remplaçant T par 20, le membre droit vaut $-4 + 4 = 0$.

Conclure. La température d'équilibre est 20 degrés.

2. **Comprendre la question.** L'écart à l'équilibre suit une décroissance exponentielle.

Construire la réponse.

- (a) La famille est $T(t) = Ce^{-0,2t} + 20$.
 (b) À l'origine, $C + 20 = 80$, donc $C = 60$.
 (c) La solution est $T(t) = 60e^{-0,2t} + 20$.
 (d) Sa dérivée vaut $-12e^{-0,2t}$. Le membre droit vaut $-0,2(60e^{-0,2t} + 20) + 4 = -12e^{-0,2t}$.

Vérifier. Les expressions de la dérivée et du membre droit sont identiques pour tout t ; en zéro, la température vaut 80.

Conclure. La solution est $60e^{-0,2t} + 20$.

3. **Comprendre la question.** La positivité de l'exponentielle permet de lire le signe de la dérivée et la position par rapport à l'équilibre.

Construire la réponse.

- (a) $T'(t) = -12e^{-0,2t} < 0$: T est strictement décroissante.
 (b) Quand $t \rightarrow +\infty$, l'exposant tend vers $-\infty$ et l'exponentielle vers zéro.
 (c) La limite est donc 20, et $T(t) - 20 = 60e^{-0,2t} > 0$ à tout temps fini.

Vérifier. La solution part de 80 et reste au-dessus de 20 ; elle ne traverse pas l'équilibre.

Conclure. La température décroît vers 20 degrés, sans l'atteindre à un temps fini.

4. **Comprendre la question.** Le seuil 50 se situe entre la température initiale et l'équilibre : il est accessible.

Construire la réponse.

- (a) $60e^{-0,2t} + 20 = 50$ donne $60e^{-0,2t} = 30$.
 (b) En divisant par 60, $e^{-0,2t} = 1/2$.
 (c) On prend $\ln : -0,2t = -\ln 2$, d'où $t = 5 \ln 2 \approx 3,466$ minutes.

Vérifier. À ce temps, le terme exponentiel vaut $1/2$: la température est bien $60/2 + 20 = 50$.

Conclure. La température atteint 50 degrés après environ 3,466 minutes.

5. **Comprendre la question.** Euler utilise la température approchée précédente pour recalculer la pente à chaque minute.

Construire la réponse.

- (a) Au départ, la pente vaut $-0,2 \times 80 + 4 = -12$ degrés par minute.
 (b) Le premier pas donne $T_1 = 80 + 1(-12) = 68$.
 (c) La pente suivante vaut $-0,2 \times 68 + 4 = -9,6$; le second pas donne $T_2 = 68 - 9,6 = 58,4$.
 (d) La valeur exacte au temps 2 est $20 + 60e^{-0,4} \approx 60,219$. L'écart approché moins exact vaut environ $-1,819$ degré.

Vérifier. Les deux valeurs sont comparées au même temps. Le signe de l'écart indique qu'Euler refroidit trop vite avec ce pas.

Conclure. Après deux pas de longueur 1, Euler donne 58,4 degrés, contre environ 60,219 pour la solution exacte.

10 Variante autonome et bilan

Résous $y' = -y + 5$ avec $y(0) = 2$ et décris le mouvement vers l'équilibre.

À toi d'essayer : Vérifie ta démarche

Résous la variante, puis explique pourquoi ta méthode s'applique.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 25](#)

- Je peux expliquer : vérifier une équation différentielle.
- Je peux expliquer : résoudre $y' = ay$.
- Je peux expliquer : résoudre $y' = ay + b$.
- Je peux expliquer : condition initiale et interprétation du modèle.
- Je peux expliquer : approcher une solution différentielle par euler.

11 Fiche-mémoire

Vérifier une équation différentielle.

1. Identifie l'équation et la fonction proposée.
2. Calcule sa dérivée.
3. Remplace séparément y dans le membre droit.
4. Compare les expressions sur tout l'intervalle.
5. Vérifie à part une condition initiale ou impose une dérivée nulle pour un équilibre.

Résoudre $y' = ay$.

1. Reconnais la forme $y' = ay$ et lis le coefficient a .
2. Écris la famille Ce^{at} .
3. Utilise la condition initiale pour calculer C si elle est donnée.
4. Contrôle la dérivée et la valeur initiale.
5. Interprète signe, variations et limite selon a et C .

Résoudre $y' = ay + b$.

1. Identifie a et b ; traite séparément le cas $a = 0$.
2. Pour $a \neq 0$, calcule l'équilibre $L = -b/a$.
3. Écris $y(t) = Ce^{at} + L$.
4. Utilise une condition pour déterminer C si nécessaire.
5. Vérifie l'équation et distingue l'équilibre fixé de la constante libre.

Condition initiale et interprétation du modèle.

1. Calcule l'équilibre et écris la famille des solutions.
2. Utilise le temps initial exact, qui n'est pas forcément zéro.
3. Détermine l'écart initial à l'équilibre.
4. Contrôle la dérivée et la valeur imposée.
5. Avant un seuil, vérifie sa compatibilité avec les variations et la limite.

Approcher une solution différentielle par Euler.

1. Initialise le temps et la valeur à partir de la condition donnée.
2. Calcule la pente $ay_n + b$ avec l'ancienne valeur.
3. Ajoute à y_n le produit de cette pente par h .
4. Avance le temps et recommence avec la nouvelle valeur.
5. Contrôle le comportement et compare les pas au même temps final.

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

L'équation comporte y et sa dérivée.

Indice 2 — Un pas de plus.

Un nombre seul n'a pas de variations à décrire sur un intervalle.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Cherche une fonction dont la dérivée fait apparaître le facteur a .

Indice 2 — Un pas de plus.

La dérivée de e^{at} vaut ae^{at} .

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

À l'équilibre, y est constante et sa dérivée vaut zéro.

Indice 2 — Un pas de plus.

Résous $aL + b = 0$, avec a non nul.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Au temps zéro, e^{-t} vaut 1.

Indice 2 — Un pas de plus.

La condition initiale devient $C + 8 = 11$.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve**Indice 1 — Une piste.**

La pente au début du pas se calcule avec la valeur actuelle y_n .

Indice 2 — Un pas de plus.

Multiplie toute la pente $ay_n + b$ par h , puis ajoute le résultat à y_n .

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche**Indice 1 — Une piste.**

Repère les données utiles et l'inconnue. Reviens à la méthode correspondante dans la boîte à outils.

Indice 2 — Un pas de plus.

Contrôle les unités, les bornes et la plausibilité du résultat avant de lire la correction.

[Revenir à la recherche, p. 22](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

L'inconnue est une fonction. Une solution doit satisfaire la relation entre ses valeurs et sa dérivée en tout point de l'intervalle. Une condition initiale peut ensuite fixer l'une de ces valeurs.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Les solutions sont $y(t) = Ce^{at}$, avec C réel. En dérivant, on obtient $aCe^{at} = ay(t)$. Sans condition initiale, la constante C reste libre.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

$aL = -b$ donne $L = -b/a$. Cette constante est fixée par l'équation, à la différence de la constante libre qui apparaîtra dans la famille des solutions.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

On soustrait 8 : $C = 3$. La solution $3e^{-t} + 8$ vaut bien 11 en zéro. Le nombre 8 reste l'équilibre et ne doit pas être remplacé par la valeur initiale.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Euler donne $y_{n+1} = y_n + h(ay_n + b)$. Les parenthèses sont essentielles : le pas multiplie les deux termes de la pente, et toute cette pente utilise l'ancienne valeur.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche

Comprendre la question. La condition initiale est cette fois située sous l'équilibre.

Construire la réponse.

1. L'équilibre de $y' = -y + 5$ est 5 ; la famille est $Ce^{-t} + 5$.
2. La condition donne $C + 5 = 2$, donc $C = -3$.
3. La solution est $y(t) = 5 - 3e^{-t}$, de dérivée $3e^{-t} > 0$.
4. Pour $t \geq 0$, elle croît depuis 2 et tend vers 5, tout en restant strictement inférieure à 5.

Vérifier. Le membre droit vaut $-y + 5 = 3e^{-t}$, identique à la dérivée ; la valeur en zéro est 2.

Conclure. La solution $5 - 3e^{-t}$ se rapproche de l'équilibre 5 par valeurs inférieures, sans l'atteindre en temps fini.

[Revenir à la recherche, p. 22](#)