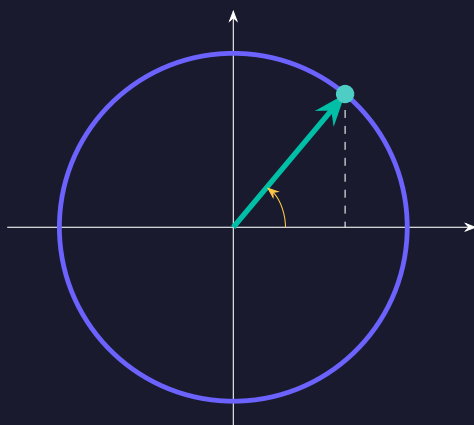


FICHE 05

Complexes, transformations et signaux

Nombres complexes ■ Comprendre et s'entraîner



Terminale STI2D — spécialité maths
Année scolaire 2026–2027

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	Pourquoi ce chapitre ?	3
2	L'idée avant la formule	3
3	Le cours formel	3
3.1	La notation exponentielle complexe	3
3.2	Résoudre des équations simples	4
3.3	Translations, rotations et homothéties	5
3.4	Formules d'addition, duplication et linéarisation	6
3.5	Réduire une combinaison sinus-cosinus	7
4	Boîte à outils	9
5	Exercices progressifs	11
6	Problème — Pour aller plus loin	13
7	Indices des exercices	14
8	Corrigés détaillés	16
9	Corrigé du problème	21
10	Variante autonome et bilan	22
11	Fiche-mémoire	22
12	Indices des pauses et des preuves	23
13	Explications des pauses et des preuves	25

1 Pourquoi ce chapitre ?

La forme exponentielle d'un complexe simplifie les rotations et les produits. Elle donne aussi les formules qui permettent de recombinaison des signaux de même fréquence. **Ton parcours.** Partie mathématiques de la spécialité physique-chimie et mathématiques en STI2D. Cette fiche complète les cours de mathématiques communs ; elle ne remplace pas les enseignements de physique-chimie.

- La notation exponentielle complexe.
- Résoudre des équations simples.
- Translations, rotations et homothéties.
- Formules d'addition, duplication et linéarisation.
- Réduire une combinaison sinus-cosinus.

2 L'idée avant la formule

Un module représente une longueur et un argument une direction. Multiplier ajoute les directions et multiplie les longueurs ; additionner demande de revenir aux coordonnées.

3 Le cours formel

3.1 La notation exponentielle complexe

Intuition | Construire la notion pas à pas

Lire une notation compacte. La notation $e^{i\theta}$ désigne $\cos \theta + i \sin \theta$. Son module vaut 1 et son argument est θ modulo 2π . Ainsi $re^{i\theta}$ rassemble module et direction dans une écriture courte.

Comprendre le produit. Les règles admises donnent $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$. Multiplier deux complexes multiplie donc leurs modules et additionne leurs arguments. Cette opération peut être vue comme un changement d'échelle accompagné d'une rotation.

Comprendre quotient et puissance. Diviser les complexes divise les modules et soustrait les arguments. Une puissance entière n multiplie l'argument par n , mais élève aussi le module à la puissance n : $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$.

Simplifier des angles sans changer le nombre. Retirer un multiple entier de 2π ne change ni cosinus ni sinus. On réduit donc les angles après les opérations pour reconnaître des directions simples et, si nécessaire, revenir à la forme algébrique.

Définition | Comprendre la notion

On note $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Un complexe non nul s'écrit $re^{i\theta}$. Les règles admises donnent $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ et $e^{i\alpha}/e^{i\beta} = e^{i(\alpha-\beta)}$. Dans un produit, les modules se multiplient et les arguments s'additionnent. Dans un quotient, ils se divisent et se soustraient. Pour une puissance entière, $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$. Les arguments restent définis modulo 2π .

Exemple | Exemple commenté

Le produit $(2e^{i\pi/3})(3e^{i\pi/6})$ possède le module $2 \times 3 = 6$ et l'argument $\pi/3 + \pi/6 = 2\pi/6 + \pi/6 = \pi/2$. Il vaut donc $6e^{i\pi/2} = 6i$.

Pour vérifier algébriquement, les facteurs sont $1 + i\sqrt{3}$ et $3\sqrt{3}/2 + (3/2)i$. Le produit a pour partie réelle $3\sqrt{3}/2 - 3\sqrt{3}/2 = 0$ et pour partie imaginaire $3/2 + 9/2 = 6$. On retrouve $6i$.

La forme exponentielle évite ici un développement plus long tout en rendant la direction finale évidente : un quart de tour sur l'axe imaginaire positif.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Dans un produit, les angles s'additionnent ; ils ne se multiplient pas. C'est une puissance qui multiplie un angle par l'exposant.

À toi d'essayer : Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} =$$

1. $e^{i(\alpha-\beta)}$
2. $e^{i\alpha\beta}$
3. $e^{i(\alpha+\beta)}$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.2 Résoudre des équations simples

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Conserver les opérations réversibles. Au premier degré, on isole z comme dans les réels, en vérifiant que le coefficient par lequel on divise est non nul. Si ce coefficient est complexe, on peut utiliser son conjugué pour écrire le quotient sous forme algébrique.

Résoudre un carré réel négatif dans les complexes. Pour $z^2 = -a$ avec $a > 0$, on utilise $i^2 = -1$. Les nombres $i\sqrt{a}$ et $-i\sqrt{a}$ ont tous deux pour carré $-a$. Il ne s'agit pas d'une racine carrée réelle d'un nombre négatif.

Justifier qu'il n'y a pas d'autre solution. Si r est une racine non nulle de l'équation $z^2 = c$, l'identité $z^2 - r^2 = (z - r)(z + r)$ transforme l'équation en produit nul. Les seules possibilités sont z égal à r ou à $-r$.

Vérifier chaque candidat. Une équation au carré non nul donne deux signes à contrôler. Pour un premier degré, on remplace le résultat dans l'expression initiale, en développant si le coefficient est complexe. Le cas $z^2 = 0$ se traite séparément et donne uniquement zéro.

📖 Définition | Comprendre la notion

Pour $a \neq 0$, l'équation $az + b = 0$ a pour solution $z = -b/a$. Le quotient se calcule dans la forme adaptée aux données. Pour $z^2 = c$ avec c réel : si $c > 0$, les solutions sont $\pm\sqrt{c}$; si $c = 0$, la solution est zéro ; si $c < 0$, les solutions sont $\pm i\sqrt{-c}$. Vérifie par substitution et garde les deux signes pour un carré non nul. Les complexes permettent de résoudre une équation sans solution réelle, sans attribuer une racine carrée réelle à un nombre négatif.

💡 Exemple | Exemple commenté

Réolvons $z^2 = -9$. Puisque $(3i)^2 = 9i^2 = -9$, le nombre $3i$ est une solution. Son opposé $-3i$ possède le même carré, donc il convient aussi.

Pour montrer que la liste est complète, on écrit $z^2 + 9 = z^2 - (3i)^2 = (z - 3i)(z + 3i)$. Un produit complexe est nul si au moins un facteur est nul. On obtient donc exactement $z = 3i$ ou $z = -3i$.

Dans les réels, l'équation n'avait aucune solution car un carré réel est positif ou nul. L'élargissement aux complexes permet les deux solutions imaginaires pures, sans modifier les propriétés des carrés réels.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Une solution d'une équation au carré ne suffit pas lorsque le second membre est non nul : l'opposé convient également. La factorisation permet de ne pas oublier ce deuxième signe.

À toi d'essayer : Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

$z^2 = -4$ a pour solutions. . .

1. -2 et 2
2. $4i$ seulement
3. $-2i$ et $2i$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 23 [Explication](#), p. 25

3.3 Translations, rotations et homothéties

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Lire une addition comme un déplacement. La transformation $w = z + b$ ajoute le même vecteur à chaque point : c'est une translation de vecteur d'affixe b . Les différences entre deux affixes restent identiques, donc les distances entre points sont conservées.

Lire une multiplication réelle comme un changement d'échelle. Pour $w = kz$, les coordonnées sont multipliées par k . Si k est négatif, le point passe aussi de l'autre côté de l'origine. Les distances sont multipliées par $|k|$, car une distance reste positive.

Lire un facteur de module un comme une rotation. Multiplier par $e^{i\theta}$ conserve le module et ajoute θ à la direction. La transformation est donc une rotation de centre O et d'angle θ . En particulier, multiplier par i tourne d'un quart de tour direct.

Déplacer le centre du raisonnement. Pour tourner autour d'un point d'affixe a , on considère d'abord le déplacement $z - a$ depuis ce centre, puis on le tourne et l'on revient au repère initial : $w = a + e^{i\theta}(z - a)$. Cette chronologie explique la formule.

📖 Définition | Comprendre la notion

La transformation $w = z + b$ est une translation de vecteur d'affixe b . Pour un réel k non nul, $w = kz$ est une homothétie de centre O et de rapport k . Les distances à O sont multipliées par $|k|$; un k négatif place l'image de l'autre côté de O . La transformation $w = e^{i\theta}z$ est une rotation de

centre O et d'angle θ : elle conserve les modules et ajoute θ aux arguments. Pour un centre d'affixe a , on peut d'abord déplacer l'origine : $w - a = e^{i\theta}(z - a)$ décrit une rotation autour de a . Cette écriture se justifie en comparant les déplacements depuis le centre.

Exemple | Exemple commenté

Appliquons la multiplication par i à $z = 2 + i$. On obtient $w = i(2 + i) = 2i + i^2 = -1 + 2i$. Les coordonnées $(2; 1)$ deviennent $(-1; 2)$: c'est un quart de tour dans le sens direct.

Les modules sont $|z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ et $|w| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. La distance au centre est conservée. Une deuxième multiplication par i donne $-2 - i = -z$, soit un demi-tour au total.

Pour une rotation autour d'un centre différent, on ne multiplie pas simplement z par i : on tourne le vecteur depuis le centre. Le contrôle du centre est immédiat dans $w = a + i(z - a)$: si z vaut a , w vaut a .

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Le rapport d'une homothétie peut être négatif, mais le rapport des distances vaut sa valeur absolue. Le signe négatif décrit un changement de côté par rapport au centre.

À toi d'essayer : Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Multiplier une affixe par i réalise...

1. Une homothétie de rapport 2
2. Une rotation de centre O et d'angle $\pi/2$
3. Une translation

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.4 Formules d'addition, duplication et linéarisation

Intuition | Construire la notion pas à pas

Construire les formules à partir d'un produit. Le produit $(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)$ se développe en quatre termes. Sa partie réelle vaut $\cos a \cos b - \sin a \sin b$, car $i^2 = -1$. Sa partie imaginaire vaut $\sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Identifier le même produit autrement. Les facteurs sont e^{ia} et e^{ib} , donc leur produit est $e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$. Identifier les deux composantes fournit les formules d'addition.

Doubler un angle. En prenant b égal à a , on obtient $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$ et $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$. Avec $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, on réécrit cette dernière identité sous deux formes adaptées.

Retirer les carrés trigonométriques. Isoler $\cos^2 a$ ou $\sin^2 a$ donne $(1 + \cos 2a)/2$ et $(1 - \cos 2a)/2$. Cette linéarisation facilite notamment une primitive. Il faut doubler l'argument complet : si a vaut $3x$, le cosinus obtenu porte sur $6x$.

Définition | Comprendre la notion

Les formules d'addition sont

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

Elles se démontrent en développant $(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)$ et en identifiant les parties réelle et imaginaire avec $e^{i(a+b)}$. Pour $b = a$, on obtient $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$ et $\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$. Ainsi $\cos^2 a = (1 + \cos 2a)/2$ et $\sin^2 a = (1 - \cos 2a)/2$. Cette linéarisation transforme des carrés trigonométriques en sommes, utiles pour calculer des primitives.

Exemple | Exemple commenté

Calculons $\cos(\pi/3 + \pi/6)$. La formule d'addition donne

$$\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} = 0.$$

L'angle total vaut $\pi/2$ et son cosinus vaut bien zéro, ce qui contrôle le signe moins.

Pour une différence d'angles, on remplace b par $-b$ et l'on utilise la parité : $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. Le signe devient plus parce que le sinus de $-b$ est l'opposé de celui de b . Repartir de cette transformation évite de confondre les deux formules.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

$\sin(2a)$ ne vaut pas $2 \sin a$, et $\cos(a + b)$ ne vaut pas $\cos a + \cos b$. Le mouvement sur le cercle n'est pas une opération linéaire sur les angles.

À toi d'essayer : Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

$\cos(a + b)$ vaut...

1. $\cos a \cos b - \sin a \sin b$
2. $\cos a + \cos b$
3. $\cos a \cos b + \sin a \sin b$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.5 Réduire une combinaison sinus-cosinus

Intuition | Construire la notion pas à pas

Fixer la forme recherchée. On veut transformer $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ en une seule expression $A \cos(\omega t + \varphi)$ avec amplitude A positive. Le choix de la convention cosinus détermine les signes des relations sur la phase.

Développer pour identifier. La formule d'addition donne $A \cos \varphi \cos(\omega t) - A \sin \varphi \sin(\omega t)$. Il faut donc $A \cos \varphi = a$ et $-A \sin \varphi = b$.

Retrouver l'amplitude. En élevant ces deux relations au carré puis en additionnant, on obtient $A^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = a^2 + b^2$. Ainsi $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ si les coefficients ne sont pas tous deux nuls.

Déterminer la phase avec les deux signes. Les relations sont $\cos \varphi = a/A$ et $\sin \varphi = -b/A$. Le signe moins est indispensable. Une arctangente d'un quotient sans contrôle du quadrant peut donner la direction opposée. Si a et b sont nuls, le signal est nul et la phase n'a pas de valeur imposée.

Définition | Comprendre la notion

Pour écrire $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ avec $A > 0$, développe le membre droit :

$$A \cos \varphi \cos(\omega t) - A \sin \varphi \sin(\omega t).$$

Il faut donc $A \cos \varphi = a$ et $-A \sin \varphi = b$. En ajoutant les carrés, $A = \sqrt{a^2 + b^2}$; puis $\cos \varphi = a/A$ et $\sin \varphi = -b/A$ déterminent le quadrant. Le signe moins est essentiel dans la convention cosinus. Si a et b sont nuls, le signal est nul et aucune phase particulière n'est imposée.

Exemple | Exemple commenté

Pour $3 \cos t + 4 \sin t$, l'amplitude vaut $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. La phase doit satisfaire $\cos \varphi = 3/5$ et $\sin \varphi = -4/5$. On choisit donc une phase du quatrième quadrant, par exemple $\varphi \approx -0,9273$. Le développement vérifie

$$5 \cos(t + \varphi) = 5 \cos \varphi \cos t - 5 \sin \varphi \sin t = 3 \cos t + 4 \sin t.$$

À t égal à zéro, les deux écritures donnent 3. À t égal à $\pi/2$, elles donnent 4. Une phase de signe positif aurait transformé le coefficient du sinus en -4 et aurait décrit un autre signal.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Dans la convention $A \cos(t + \varphi)$, le coefficient du sinus est négatif de $A \sin \varphi$. Une phase choisie avec le mauvais signe inverse ce terme.

À toi d'essayer : Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Dans $A \cos(t + \varphi)$, le coefficient de $\sin t$ est...

1. $-A \sin \varphi$
2. $A \sin \varphi$
3. $A \cos \varphi$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 25](#)

4 Boîte à outils

Méthode | La notation exponentielle complexe

1. Écris chaque complexe non nul avec un module positif et un argument.
2. Pour un produit, multiplie les modules et additionne les arguments.
3. Pour un quotient, divise les modules et soustrais les arguments.
4. Pour une puissance, élève le module à cette puissance et multiplie l'angle.
5. Réduis l'angle modulo 2π puis contrôle avec une forme algébrique lorsque c'est simple.

Méthode | Résoudre des équations simples

1. Identifie le degré de l'équation et les coefficients non nuls.
2. Au premier degré, isole z puis effectue le quotient avec la forme adaptée.
3. Pour $z^2 = c$ réel, distingue c positif, nul et négatif.
4. Garde les deux signes lorsque c est non nul et justifie l'exhaustivité par un produit nul.
5. Substitue chaque solution dans l'équation initiale.

Méthode | Translations, rotations et homothéties

1. Identifie si la formule ajoute une affixe, multiplie par un réel ou par un facteur de module un.
2. Calcule l'image en regroupant les composantes ou en utilisant modules et arguments.
3. Identifie le centre, le vecteur, le rapport ou l'angle de la transformation.
4. Pour un centre a , travaille sur le déplacement $z - a$ avant de revenir à w .
5. Contrôle la propriété attendue : distance conservée, rapport positif des distances ou déplacement constant.

Méthode | Formules d'addition, duplication et linéarisation

1. Identifie la structure : somme, différence, angle double ou carré.
2. Écris la formule symbolique avant de remplacer les angles.
3. Garde le signe moins dans l'addition du cosinus et contrôle les parités pour une différence.
4. Pour une linéarisation, double tout l'argument.

5. Pour une primitive obtenue, dérive le résultat afin de contrôler les facteurs.

Méthode | Réduire une combinaison sinus-cosinus

1. Annonce la convention choisie pour la sinusoïde résultante.
2. Développe cette forme et identifie les coefficients du sinus et du cosinus.
3. Calcule $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ puis traite le cas A égal à zéro.
4. Détermine la phase avec son cosinus, son sinus et le bon quadrant.
5. Contrôle en redéveloppant la forme obtenue, puis sur une ou deux valeurs simples de t.

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases ; 6 à 10 demandent plusieurs étapes ; 11 à 15 t'invitent à choisir, justifier et contrôler. Cherche avant de consulter les indices.

Exercice 1 — Un réel négatif ★★☆☆

Écris -3 sous forme exponentielle.

Exercice 2 — Premier degré ★★☆☆

Résous $2z + 4 - 6i = 0$.

Exercice 3 — Une translation ★★☆☆

Par $w = z + 3 - 2i$, quelle est l'image de $z = 1 + 4i$?

Exercice 4 — Une duplication ★★☆☆

On a $\sin a = 3/5$ et $\cos a = 4/5$. Calcule $\sin(2a)$.

Exercice 5 — Une amplitude ★★☆☆

Quelle est l'amplitude de $5 \cos t + 12 \sin t$?

Exercice 6 — Un quotient exponentiel ★★☆☆

Calcule $(6e^{i\pi/2})/(2e^{i\pi/6})$.

Exercice 7 — Un carré négatif ★★☆☆

Résous $z^2 = -16$.

Exercice 8 — Une homothétie négative ★★☆☆

Par $w = -2z$, quelle est l'image de $z = 1 - 3i$? Quel est le rapport des distances à O ?

Exercice 9 — Linéariser un carré ★★☆☆

Écris $\cos^2(3x)$ comme une somme sans carré trigonométrique.

Exercice 10 — Une forme exacte ★★☆☆

Écris $\cos t + \sin t$ sous la forme $A \cos(t + \varphi)$.

Exercice 11 — Une puissance ★★★

Calcule $(1 + i)^4$ avec la forme exponentielle.

Exercice 12 — Un coefficient complexe ★★★

Résous $(1 + i)z = 2 - i$.

Exercice 13 — Une rotation vérifiée ★★★

Applique une rotation de centre O et d'angle $\pi/2$ à $z = 3 - 2i$. Contrôle la distance à O.

Exercice 14 — Une primitive par linéarisation ★★ ★

Détermine une primitive de $\sin^2 x$.

Exercice 15 — Un quadrant à respecter ★★ ★

Pour $-3 \cos t + 4 \sin t$, indique l'amplitude et les signes du cosinus et du sinus de la phase dans la forme $A \cos(t + \varphi)$.

6 Problème — Pour aller plus loin

Additionner et transformer des signaux

On considère $z_1 = 2e^{i\pi/3}$ et $z_2 = 2e^{-i\pi/3}$.

1. Donne les formes algébriques, la somme et le produit.
2. Interprète la multiplication d'un point z par i .
3. Résous $z^2 = -9$ et exprime les solutions en forme exponentielle.
4. Dédus une forme simplifiée de $\cos(\theta + \pi/3) + \cos(\theta - \pi/3)$.
5. Simplifie $\sin^2\theta$ à l'aide de $\cos(2\theta)$.

7 Indices des exercices

Exercice 1

Indice 1. Le point est sur l'axe réel négatif.

Indice 2. Un demi-tour a pour angle π .

Exercice 2

Indice 1. Passe le terme constant de l'autre côté.

Indice 2. Divise les deux composantes par 2.

Exercice 3

Indice 1. Ajoute le vecteur de translation.

Indice 2. Regroupe les deux parties.

Exercice 4

Indice 1. Utilise le produit des deux valeurs.

Indice 2. La formule contient un facteur 2.

Exercice 5

Indice 1. Additionne les carrés des coefficients.

Indice 2. Prends la racine après la somme.

Exercice 6

Indice 1. Divise les modules et soustrais les angles.

Indice 2. Mets les angles au même dénominateur.

Exercice 7

Indice 1. Écris $-16 = 16i^2$.

Indice 2. Il faut les deux signes.

Exercice 8

Indice 1. Le facteur multiplie les deux composantes.

Indice 2. Une distance utilise la valeur absolue du rapport.

Exercice 9

Indice 1. Prends tout l'angle $3x$ comme u .

Indice 2. $2u = 6x$.

Exercice 10

Indice 1. Le coefficient du sinus porte un signe moins dans le développement.

Indice 2. La phase est dans le quatrième quadrant.

Exercice 11

Indice 1. La puissance multiplie l'angle par 4.

Indice 2. Elle élève aussi le module à la puissance 4.

Exercice 12

Indice 1. Le coefficient de z est non nul.

Indice 2. Rends le dénominateur réel.

Exercice 13

Indice 1. Multiplie par i .

Indice 2. Compare les sommes de carrés des composantes.

Exercice 14

Indice 1. Commence par supprimer le carré grâce à la duplication.

Indice 2. Une primitive de $\cos 2x$ est $\sin 2x/2$.

Exercice 15

Indice 1. Identifie séparément les deux coefficients.

Indice 2. Le sinus de la phase est l'opposé du coefficient de $\sin t$, divisé par A .

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le réel -3 correspond à un point de l'axe réel négatif.

Construire la réponse.

1. Sa distance à l'origine est 3, donc son module est 3.
2. Une direction vers la gauche a pour argument π .
3. On obtient $-3 = 3e^{i\pi}$.

Vérifier. $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$, donc $3e^{i\pi} = -3$. Le signe négatif est porté par l'angle, pas par le module.

Conclure. Une forme exponentielle est $3e^{i\pi}$.

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le coefficient de z est le réel non nul 2 ; on peut isoler z directement.

Construire la réponse.

1. On soustrait $4 - 6i$ aux deux membres : $2z = -4 + 6i$.
2. On divise les deux composantes par 2 : $z = -2 + 3i$.

Vérifier. $2(-2 + 3i) + 4 - 6i = -4 + 6i + 4 - 6i = 0$. Les opérations étant réversibles, la solution est unique.

Conclure. $z = -2 + 3i$.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La formule ajoute le vecteur d'affixe $3 - 2i$ au point initial.

Construire la réponse.

1. On remplace z par $1 + 4i$: $w = (1 + 4i) + (3 - 2i)$.
2. Les réels donnent 4 et les termes imaginaires $4i - 2i = 2i$, donc $w = 4 + 2i$.

Vérifier. La différence image moins départ vaut $(4 + 2i) - (1 + 4i) = 3 - 2i$, exactement le vecteur de translation. Les coordonnées ont augmenté de 3 horizontalement et diminué de 2 verticalement.

Conclure. L'image a pour affixe $4 + 2i$.

Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le sinus d'un angle double dépend du sinus et du cosinus de l'angle initial.

Construire la réponse.

1. On utilise $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$.
2. En remplaçant, $\sin(2a) = 2 \times (3/5) \times (4/5) = 24/25$.

Vérifier. Les données sont cohérentes car $(3/5)^2 + (4/5)^2 = 1$. Le résultat $24/25$ reste entre -1 et 1. Doubler seulement $3/5$ aurait donné $6/5$, impossible pour un sinus.

Conclure. $\sin(2a) = 24/25$.

Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les coefficients du cosinus et du sinus sont les deux composantes utilisées pour l'amplitude.

Construire la réponse.

1. On prend $a = 5$ et $b = 12$.
2. L'amplitude vaut $A = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$.

Vérifier. Le nombre 17, somme des coefficients, supposerait que sinus et cosinus valent tous deux 1 au même instant, ce qui est impossible puisque leurs carrés totalisent 1.

Conclure. L'amplitude est 13.

Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Un quotient divise les modules et soustrait l'angle du dénominateur.

Construire la réponse.

1. Le module du quotient est $6/2 = 3$.
2. L'angle vaut $\pi/2 - \pi/6 = 3\pi/6 - \pi/6 = 2\pi/6 = \pi/3$.
3. Le quotient est donc $3e^{i\pi/3}$.

Vérifier. En le multipliant par le dénominateur $2e^{i\pi/6}$, on retrouve le module 6 et l'angle $\pi/3 + \pi/6 = \pi/2$, soit le numérateur initial.

Conclure. Le résultat est $3e^{i\pi/3}$.

Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le second membre est négatif ; les solutions se cherchent dans les imaginaires purs.

Construire la réponse.

1. On écrit $-16 = 16i^2 = (4i)^2$.
2. L'équation devient $z^2 - (4i)^2 = 0$, soit $(z - 4i)(z + 4i) = 0$.
3. Les deux solutions sont donc $4i$ et $-4i$.

Vérifier. $(4i)^2 = 16i^2 = -16$ et $(-4i)^2 = 16i^2 = -16$. Les nombres réels 4 et -4 auraient au contraire un carré positif.

Conclure. L'ensemble des solutions est $\{-4i; 4i\}$.

Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le rapport -2 multiplie les coordonnées et inverse la direction depuis l'origine.

Construire la réponse.

1. $w = -2(1 - 3i) = -2 + 6i$.
2. La distance initiale vaut $\sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$. La distance finale vaut $\sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.
3. Le rapport des distances est donc 2, la valeur absolue de -2.

Vérifier. Les deux coordonnées ont changé de signe : l'image est sur la demi-droite opposée. Cela explique le signe négatif du rapport d'homothétie, sans produire une distance négative.

Conclure. L'image est $-2 + 6i$ et les distances à O sont multipliées par 2.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On veut supprimer le carré trigonométrique en utilisant la formule du cosinus double.

Construire la réponse.

1. La formule générale est $\cos^2 u = (1 + \cos(2u))/2$.
2. On prend $u = 3x$, donc $2u = 6x$.
3. On obtient $\cos^2(3x) = (1 + \cos(6x))/2$.

Vérifier. À x égal à zéro, les deux membres valent 1. À x égal à $\pi/6$, le membre gauche vaut $\cos^2(\pi/2) = 0$ et le droit $(1 + \cos \pi)/2 = 0$.

Conclure. $\cos^2(3x) = (1 + \cos(6x))/2$.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On identifie les coefficients dans la convention cosinus avec une phase ajoutée.

Construire la réponse.

1. L'amplitude est $A = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
2. Il faut $\cos \varphi = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$ et $\sin \varphi = -1/\sqrt{2} = -\sqrt{2}/2$.
3. Le quatrième quadrant donne $\varphi = -\pi/4$.

Vérifier. Le développement de $\sqrt{2} \cos(t - \pi/4)$ donne $\sqrt{2}[(\sqrt{2}/2) \cos t + (\sqrt{2}/2) \sin t] = \cos t + \sin t$.

Conclure. $\cos t + \sin t = \sqrt{2} \cos(t - \pi/4)$.

Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On transforme d'abord $1 + i$ en forme exponentielle pour simplifier la puissance.

Construire la réponse.

1. Son module est $\sqrt{2}$ et un argument $\pi/4$, donc $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.
2. La puissance quatrième donne $(\sqrt{2})^4 e^{i4\pi/4} = 4e^{i\pi}$.
3. Comme $e^{i\pi} = -1$, le résultat vaut -4 .

Vérifier. La méthode algébrique donne $(1 + i)^2 = 2i$, puis $(2i)^2 = 4i^2 = -4$. Elle confirme le module 4 et la direction négative.

Conclure. $(1 + i)^4 = -4$.

Corrigé 12

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le coefficient $1 + i$ est non nul ; on divise puis on utilise son conjugué.

Construire la réponse.

1. $z = (2 - i)/(1 + i)$. On multiplie en haut et en bas par $1 - i$.
2. Le numérateur vaut $(2 - i)(1 - i) = 2 - 2i - i + i^2 = 1 - 3i$.
3. Le dénominateur vaut $(1 + i)(1 - i) = 1 - i^2 = 2$.
4. On obtient $z = 1/2 - (3/2)i$.

Vérifier. $(1 + i)(1/2 - (3/2)i) = 1/2 - (3/2)i + (1/2)i - (3/2)i^2 = 2 - i$. La substitution retrouve le membre droit.

Conclure. L'unique solution est $z = 1/2 - (3/2)i$.

Corrigé 13

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Une rotation directe de $\pi/2$ autour de O correspond à la multiplication par i .

Construire la réponse.

1. $w = i(3 - 2i) = 3i - 2i^2 = 2 + 3i$.
2. Le module initial vaut $\sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.
3. Le module final vaut $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

Vérifier. Les coordonnées $(3; -2)$ deviennent $(2; 3)$, selon la règle $(a; b) \mapsto (-b; a)$ du quart de tour direct. La distance au centre est identique.

Conclure. L'image a pour affixe $2 + 3i$; la rotation conserve la distance $\sqrt{13}$ à O.

Corrigé 14 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La linéarisation transforme le carré en une somme dont les primitives sont connues.

Construire la réponse.

1. On écrit $\sin^2 x = (1 - \cos(2x))/2 = 1/2 - (1/2) \cos(2x)$.
2. Une primitive de $1/2$ est $x/2$.
3. Une primitive de $\cos(2x)$ est $\sin(2x)/2$, car sa dérivée apporte un facteur 2.
4. Une primitive cherchée est donc $F(x) = x/2 - \sin(2x)/4$.

Vérifier. $F'(x) = 1/2 - (2 \cos(2x))/4 = (1 - \cos(2x))/2 = \sin^2 x$. Cette dérivation contrôle à la fois le signe et le facteur $1/4$.

Conclure. Une primitive est $F(x) = x/2 - \sin(2x)/4$; toutes les autres s'obtiennent en ajoutant une constante.

Corrigé 15 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le coefficient du cosinus est négatif et celui du sinus positif; la phase doit tenir compte du signe moins de la formule.

Construire la réponse.

1. L'amplitude est $A = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$.
2. La relation $A \cos \varphi = -3$ donne $\cos \varphi = -3/5$.
3. La relation $-A \sin \varphi = 4$ donne $\sin \varphi = -4/5$.
4. Les deux valeurs négatives placent la phase dans le troisième quadrant, ou dans $] -\pi; -\pi/2[$ pour une mesure principale.

Vérifier. Le développement donne bien $5(-3/5) \cos t - 5(-4/5) \sin t = -3 \cos t + 4 \sin t$. Choisir un angle du premier quadrant aurait inversé les deux coefficients.

Conclure. L'amplitude est 5; la phase vérifie $\cos \varphi = -3/5$ et $\sin \varphi = -4/5$.

9 Corrigé du problème

1. **Comprendre la question.** La forme exponentielle donne directement les modules et arguments ; les valeurs trigonométriques permettent la forme algébrique.

Construire la réponse.

- (a) $z_1 = 2(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3)) = 1 + i\sqrt{3}$.
- (b) $z_2 = 2(\cos(-\pi/3) + i \sin(-\pi/3)) = 1 - i\sqrt{3}$.
- (c) La somme vaut 2, car les parties imaginaires s'annulent.
- (d) Le produit vaut $2 \times 2 e^{i(\pi/3 - \pi/3)} = 4e^0 = 4$.

Vérifier. Les nombres sont conjugués. Le produit doit être le carré du module : $|z_1|^2 = 4$.

Conclure. Les formes algébriques sont $1 \pm i\sqrt{3}$; leur somme vaut 2 et leur produit 4.

2. **Comprendre la question.** Multiplier des complexes multiplie leurs modules et additionne leurs arguments.

Construire la réponse.

- (a) Le nombre i a pour module 1 et pour argument $\pi/2$.
- (b) Pour un point non situé à l'origine, la multiplication par i conserve sa distance à l'origine et augmente son argument d'un quart de tour.
- (c) En coordonnées, $i(x + iy) = -y + ix$: le point $(x; y)$ devient $(-y; x)$.

Vérifier. Le point $(1; 0)$ devient $(0; 1)$, ce qui vérifie le sens positif du quart de tour. L'origine reste fixe.

Conclure. La transformation est une rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.

3. **Comprendre la question.** On cherche les complexes dont le carré vaut un réel négatif.

Construire la réponse.

- (a) Comme $i^2 = -1$, on reconnaît $(3i)^2 = -9$ et $(-3i)^2 = -9$.
- (b) La factorisation $z^2 + 9 = (z - 3i)(z + 3i)$ montre qu'il n'y a pas d'autre solution.
- (c) Les modules valent 3 ; les arguments peuvent être $\pi/2$ et $-\pi/2$.

Vérifier. En forme exponentielle, le carré double l'argument et donne $9e^{i\pi} = 9e^{-i\pi} = -9$.

Conclure. Les solutions sont $3i = 3e^{i\pi/2}$ et $-3i = 3e^{-i\pi/2}$.

4. **Comprendre la question.** Les deux décalages opposés font se compenser les contributions en sinus.

Construire la réponse.

- (a) $\cos(\theta + \pi/3) = \cos \theta \cos(\pi/3) - \sin \theta \sin(\pi/3)$.
- (b) $\cos(\theta - \pi/3) = \cos \theta \cos(\pi/3) + \sin \theta \sin(\pi/3)$.
- (c) En additionnant, les termes en sinus disparaissent et il reste $2 \cos \theta \cos(\pi/3)$.
- (d) Comme $\cos(\pi/3) = 1/2$, le résultat est $\cos \theta$.

Vérifier. En zéro, les deux cosinus valent chacun $1/2$ et leur somme 1, comme $\cos 0$. Le développement établit l'identité pour tout angle.

Conclure. $\cos(\theta + \pi/3) + \cos(\theta - \pi/3) = \cos \theta$.

5. **Comprendre la question.** La formule de l'angle double permet de remplacer le carré par un cosinus.

Construire la réponse.

- (a) On part de $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$.
- (b) Comme $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$, on obtient $\cos(2\theta) = 1 - 2 \sin^2 \theta$.
- (c) On isole le carré : $2 \sin^2 \theta = 1 - \cos(2\theta)$, puis on divise par 2.

Vérifier. En zéro, les deux membres valent 0 ; en $\pi/2$, ils valent 1. La nouvelle expression fait apparaître un terme constant et une fréquence doublée.

Conclure. $\sin^2 \theta = (1 - \cos(2\theta))/2$.

10 Variante autonome et bilan

Calcule $3e^{i\pi/4} \times 2e^{i\pi/4}$, puis interprète la multiplication par $2e^{i\pi/4}$.

À toi d'essayer : Vérifie ta démarche

Résous la variante, puis explique pourquoi ta méthode s'applique.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 24 Explication, p. 25

- Je peux expliquer : la notation exponentielle complexe.
- Je peux expliquer : résoudre des équations simples.
- Je peux expliquer : translations, rotations et homothéties.
- Je peux expliquer : formules d'addition, duplication et linéarisation.
- Je peux expliquer : réduire une combinaison sinus-cosinus.

11 Fiche-mémoire

La notation exponentielle complexe.

1. Écris chaque complexe non nul avec un module positif et un argument.
2. Pour un produit, multiplie les modules et additionne les arguments.
3. Pour un quotient, divise les modules et soustrais les arguments.
4. Pour une puissance, élève le module à cette puissance et multiplie l'angle.
5. Réduis l'angle modulo 2π puis contrôle avec une forme algébrique lorsque c'est simple.

Résoudre des équations simples.

1. Identifie le degré de l'équation et les coefficients non nuls.
2. Au premier degré, isole z puis effectue le quotient avec la forme adaptée.
3. Pour $z^2 = c$ réel, distingue c positif, nul et négatif.
4. Garde les deux signes lorsque c est non nul et justifie l'exhaustivité par un produit nul.
5. Substitue chaque solution dans l'équation initiale.

Translations, rotations et homothéties.

1. Identifie si la formule ajoute une affixe, multiplie par un réel ou par un facteur de module un.
2. Calcule l'image en regroupant les composantes ou en utilisant modules et arguments.
3. Identifie le centre, le vecteur, le rapport ou l'angle de la transformation.
4. Pour un centre a , travaille sur le déplacement $z - a$ avant de revenir à w .
5. Contrôle la propriété attendue : distance conservée, rapport positif des distances ou déplacement constant.

Formules d'addition, duplication et linéarisation.

1. Identifie la structure : somme, différence, angle double ou carré.
2. Écris la formule symbolique avant de remplacer les angles.
3. Garde le signe moins dans l'addition du cosinus et contrôle les parités pour une différence.
4. Pour une linéarisation, double tout l'argument.
5. Pour une primitive obtenue, dérive le résultat afin de contrôler les facteurs.

Réduire une combinaison sinus-cosinus.

1. Annonce la convention choisie pour la sinusoïde résultante.
2. Développe cette forme et identifie les coefficients du sinus et du cosinus.
3. Calcule $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ puis traite le cas A égal à zéro.
4. Détermine la phase avec son cosinus, son sinus et le bon quadrant.
5. Contrôle en redéveloppant la forme obtenue, puis sur une ou deux valeurs simples de t .

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

La règle exponentielle transforme un produit en somme des exposants.

Indice 2 — Un pas de plus.

Les deux arguments se combinent par addition.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Le carré de $2i$ vaut $4i^2 = -4$.

Indice 2 — Un pas de plus.

Son opposé possède le même carré.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Le complexe i a pour module 1 et pour argument $\pi/2$.

Indice 2 — Un pas de plus.

Le produit conserve donc les distances à 0 et ajoute un quart de tour.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Dans le produit complexe, le terme $i^2 \sin a \sin b$ devient négatif.

Indice 2 — Un pas de plus.

La partie réelle fournit la formule du cosinus.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve**Indice 1 — Une piste.**

Développe le cosinus d'une somme.

Indice 2 — Un pas de plus.

Le terme en sinus vient avec le signe moins.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche**Indice 1 — Une piste.**

Repère les données utiles et l'inconnue. Reviens à la méthode correspondante dans la boîte à outils.

Indice 2 — Un pas de plus.

Contrôle les unités, les bornes et la plausibilité du résultat avant de lire la correction.

[Revenir à la recherche, p. 22](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}.$$

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Les solutions sont $-2i$ et $2i$.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Multiplier une affixe par i réalise une rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Le coefficient de $\sin t$ est $-A \sin \varphi$.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche

Comprendre la question. On multiplie les modules et on additionne les arguments, puis on interprète le facteur appliqué.

Construire la réponse.

1. Le module du produit vaut $3 \times 2 = 6$.
2. Son argument vaut $\pi/4 + \pi/4 = \pi/2$, donc le produit est $6e^{i\pi/2} = 6i$.
3. Multiplier un point z par $2e^{i\pi/4}$ multiplie sa distance à l'origine par 2 et ajoute $\pi/4$ à son argument.

Vérifier. La transformation combine un agrandissement de rapport 2 et une rotation de centre O . L'origine reste fixe.

Conclure. Le produit vaut $6i$; la transformation double les longueurs et tourne de $\pi/4$ autour de l'origine.

[Revenir à la recherche, p. 22](#)