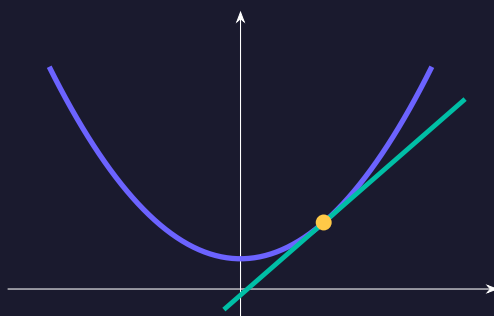


Dérivation et fonction inverse

Analyse ■ Comprendre et s'entraîner



Comprendre Calculer Vérifier

Terminale STMG et STI2D — commun
Année scolaire 2026–2027

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	Pourquoi ce chapitre ?	3
2	L'idée avant la formule	3
3	Le cours formel	3
3.1	Comprendre la fonction inverse	3
3.2	Dériver l'inverse et ses applications	4
3.3	Dériver les polynômes de degré au plus trois	6
3.4	Du signe de la dérivée aux variations	7
3.5	Optimiser une grandeur avec la dérivée	8
4	Boîte à outils	9
5	Exercices progressifs	11
6	Problème — Pour aller plus loin	13
7	Indices des exercices	14
8	Corrigés détaillés	16
9	Corrigé du problème	21
10	Variante autonome et bilan	23
11	Fiche-mémoire	23
12	Indices des pauses et des preuves	24
13	Explications des pauses et des preuves	26

1 Pourquoi ce chapitre ?

La fonction inverse intervient quand un coût fixe est partagé. La dérivée permet de chercher un compromis entre cette répartition et un coût qui augmente avec la production. **Ton parcours.** Enseignement commun de mathématiques pour les séries STMG et STI2D. Les situations de gestion et les situations techniques mobilisent ici les mêmes notions du programme.

- Comprendre la fonction inverse.
- Dériver l'inverse et ses applications.
- Dériver les polynômes de degré au plus trois.
- Du signe de la dérivée aux variations.
- Optimiser une grandeur avec la dérivée.

2 L'idée avant la formule

Produire davantage répartit mieux les frais fixes, mais peut augmenter le coût variable unitaire. La meilleure quantité équilibre ces deux effets.

3 Le cours formel

3.1 Comprendre la fonction inverse

Intuition | Construire la notion pas à pas

Partager une quantité fixe. Si une somme fixe est répartie entre de plus en plus de personnes, chaque part diminue. Ce type de situation conduit à une expression k/x , construite à partir de la fonction inverse $1/x$.

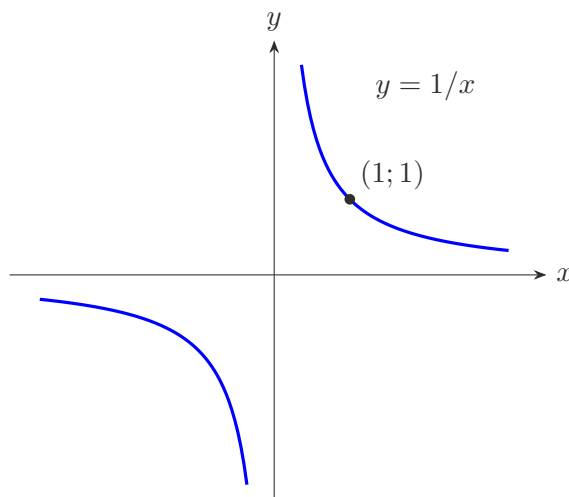
Pourquoi zéro est interdit. Chercher $1/0$ reviendrait à trouver un nombre dont le produit par zéro vaut 1 : c'est impossible. Le domaine se sépare donc en deux intervalles, l'un négatif et l'autre positif. On ne relie pas les deux branches de la courbe en passant par zéro.

Comparer sans se tromper. Sur chacun des deux intervalles, la fonction est décroissante. Pour deux nombres positifs, augmenter le dénominateur diminue la fraction. Pour deux nombres négatifs, il faut également tenir compte de l'ordre : $-1/8$ est plus proche de zéro et plus grand que $-1/3$.

Lire les valeurs approchées. Quand x grandit en valeur absolue, l'inverse se rapproche de zéro sans l'atteindre. Quand x approche zéro, les valeurs deviennent très grandes en valeur absolue. Le signe de l'image est celui de x . Une grandeur physique peut restreindre le modèle aux valeurs positives et même aux entiers.

Définition | Comprendre la notion

La fonction inverse est $f(x) = 1/x$, définie pour $x \neq 0$. Son signe est celui de x ; elle ne s'annule jamais. Sa courbe a deux branches et est symétrique par rapport à l'origine, car $f(-x) = -f(x)$. Elle décroît sur chacun des intervalles $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$. On ne dit pas qu'elle décroît sur tout son domaine sans distinguer les deux intervalles. Quand x devient grand en valeur absolue, $1/x$ se rapproche de 0. Quand x approche 0 par valeurs positives, l'image grandit sans borne ; par valeurs négatives, elle diminue sans borne. Les axes sont des asymptotes.



💡 Exemple | Exemple commenté

Une dépense de 120 euros partagée également entre n personnes donne $c(n) = 120/n$. Pour 4 personnes, la part est $120/4 = 30$ euros. Pour 10 personnes, elle est de 12 euros. Doubler le nombre de personnes divise la part par deux : pour 8 personnes, elle serait de 15 euros. Ce n'est pas une diminution d'un nombre fixe d'euros chaque fois qu'une personne s'ajoute. Le modèle impose un entier $n \geq 1$. La part reste positive pour tout groupe fini. Dire qu'elle tend vers zéro lorsque le groupe grandit ne signifie donc pas qu'un groupe suffisamment grand paierait exactement zéro.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

La décroissance doit être annoncée séparément sur chaque intervalle. Elle ne permet pas de comparer un nombre négatif et un nombre positif comme s'ils appartenaient à une seule branche.

À toi d'essayer : Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

La fonction inverse est définie...

1. Pour tous les réels
2. Seulement pour $x > 0$
3. Pour $x \neq 0$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 26](#)

3.2 Dériver l'inverse et ses applications

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Expliquer les variations par la dérivée. Pour $x \neq 0$, la dérivée de $1/x$ est $-1/x^2$. Le carré est strictement positif ; le signe moins placé devant rend donc la dérivée négative sur chacune des deux branches.

Agir sur la fonction inverse. Pour $f(x) = a/x + b$, multiplier par a multiplie aussi la dérivée par a ; ajouter b ne change aucune pente. Ainsi $f'(x) = -a/x^2$. Si a est positif, la fonction décroît ; si a est négatif, elle croît, sur chacun des intervalles de son domaine.

Interpréter un coût. Dans un coût moyen $a/x + b$ pour $x > 0$, le terme a/x peut représenter un coût fixe réparti sur x unités, tandis que b est un coût par unité. Produire davantage répartit mieux la partie fixe, mais ne fait pas disparaître b .

Séparer valeur et pente. Pour une tangente, on calcule la fonction au point choisi, puis sa dérivée en ce même point. La première donne une hauteur ; la seconde donne l'évolution locale. Le domaine physique, souvent $x > 0$, reste à respecter.

Définition | Comprendre la notion

Pour $x \neq 0$, la dérivée de $1/x$ vaut $-1/x^2$. Le carré du dénominateur est positif, donc la dérivée est strictement négative : l'inverse décroît sur chacune de ses deux branches. Pour $f(x) = a/x + b$ avec a et b constants, $f'(x) = -a/x^2$. Le signe dépend donc de a . La règle permet d'étudier un coût moyen, une durée à débit variable ou une autre grandeur inversement proportionnelle. Garde les unités et le domaine du modèle : une quantité physique peut imposer $x > 0$.

Exemple | Exemple commenté

Pour $c(x) = 120/x + 5$ avec $x > 0$, on dérive chaque terme : $c'(x) = -120/x^2 + 0$. Cette dérivée est strictement négative, donc le coût moyen décroît.

À $x = 10$, le coût vaut 17 et la pente vaut $-120/100 = -1,2$. La pente négative explique une diminution locale, mais ne signifie pas que le coût lui-même est négatif.

Quand x augmente, $120/x$ se rapproche de zéro et c se rapproche de 5 par valeurs supérieures. La constante 5 influence donc les valeurs, tout en disparaissant dans la dérivée.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Dans $-a/x^2$, le signe moins appartient au numérateur. Même lorsque x est négatif, le carré du dénominateur reste positif.

À toi d'essayer : Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

La dérivée de $5/x$ est...

1. $-1/(5x^2)$
2. $-5/x^2$
3. $5/x^2$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 24 [Explication](#), p. 26

3.3 Dériver les polynômes de degré au plus trois

Intuition | Construire la notion pas à pas

Dériver une expression, puis calculer une pente. La fonction dérivée donne une formule valable pour toutes les abscisses autorisées. On remplace x par une valeur seulement après avoir établi cette formule. Substituer d'abord transformerait la fonction en une constante et ferait perdre l'information de variation.

Traiter les termes séparément. Les règles de dérivation s'appliquent à une somme terme par terme. Le coefficient d'un terme est conservé et multiplie la dérivée de sa puissance. Ainsi $5x^2$ donne $5 \times 2x = 10x$.

Le terme bx donne b , puisque la pente d'une droite $y = bx$ est constante. Un terme constant c donne zéro : déplacer toute une courbe verticalement ne modifie pas ses pentes. Les signes moins doivent être intégrés aux coefficients.

Manipuler un paramètre. Une lettre comme a peut désigner un nombre fixe alors que x est la variable. On dérive par rapport à x en conservant a . Une condition sur la pente, telle que $f'(1) = 11$, devient ensuite une équation pour déterminer a .

Un polynôme et sa dérivée sont définis sur tous les réels. La valeur $f(a)$ décrit une hauteur, tandis que $f'(a)$ décrit une pente : elles ne sont pas interchangeables.

Définition | Comprendre la notion

$(c)' = 0$, $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$. La dérivée d'une somme est la somme des dérivées, et $(kf)' = kf'$ pour une constante k . Un terme constant disparaît parce que sa valeur ne varie pas. Applique la règle à chaque terme en gardant les signes. Une fois la fonction dérivée calculée, on peut évaluer sa valeur en un point. Ne remplace pas x trop tôt : dériver une valeur numérique donnerait zéro et perdrait la variation.

Exemple | Exemple commenté

Pour $f(x) = x^3 - 4x + 7$, la dérivée du cube est $3x^2$, celle de $-4x$ est -4 et celle de 7 est 0 . Donc $f'(x) = 3x^2 - 4$.

La pente en 2 vaut $3 \times 2^2 - 4 = 12 - 4 = 8$. Il faut calculer le carré avant la multiplication : 3×2^2 vaut 12 , pas 36 . La hauteur est $f(2) = 8 - 8 + 7 = 7$.

Si l'on souhaite une tangente, on utilisera les deux résultats : $y = 8(x - 2) + 7$. L'exemple montre pourquoi la dérivation et l'évaluation de la fonction sont deux calculs complémentaires.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Dans $-3x^2$, le signe moins et le coefficient 3 restent devant le carré. La valeur en 2 est -12, et non le carré de -6.

À toi d'essayer : Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

La dérivée de $3x^2$ est...

1. $3x$
2. $6x^2$
3. $6x$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 26](#)

3.4 Du signe de la dérivée aux variations**🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas**

Passer d'une pente locale à une évolution. Sur un intervalle où f est dérivable, le signe de sa dérivée indique le sens de variation. Des pentes positives font monter la fonction quand x augmente ; des pentes négatives la font descendre.

Organiser l'étude. Cherche d'abord où la dérivée s'annule ou cesse d'être définie, puis étudie son signe sur les intervalles obtenus. Le signe d'une expression factorisée se lit facteur par facteur ; il ne suffit pas de calculer la dérivée en quelques points choisis au hasard.

Repérer un changement de sens. Si la dérivée passe de négative à positive, f descend puis remonte : elle atteint un minimum local. Dans l'autre sens, elle atteint un maximum local. Une dérivée nulle sans changement de signe donne seulement une tangente horizontale.

Ne pas oublier les bornes. Sur un intervalle fermé, les valeurs aux extrémités peuvent être les plus grandes ou les plus petites. Complète donc le tableau avec les images des bornes et des points critiques, puis compare-les.

Le signe de f renseigne la position par rapport à l'axe horizontal ; celui de sa dérivée renseigne la montée ou la descente. Une fonction peut être négative tout en étant croissante.

📖 Définition | Comprendre la notion

Sur un intervalle, une dérivée positive donne une fonction croissante ; une dérivée négative donne une fonction décroissante. On cherche les zéros de la dérivée puis on étudie son signe entre eux. Un changement de signe de positif à négatif indique un maximum local ; de négatif à positif, un minimum local. Une dérivée nulle sans changement de signe ne suffit pas. Le tableau de variations donne les valeurs aux bornes et aux points critiques. Un extremum global sur un intervalle fermé se détermine en comparant les valeurs possibles, y compris celles des bornes. Le signe de f et celui de sa dérivée décrivent deux choses différentes.

 Exemple | Exemple commenté

Pour $f(x) = x^2 - 4x + 7$, la dérivée est $2x - 4 = 2(x - 2)$. Le facteur 2 étant positif, le signe est celui de $x - 2$: négatif avant 2, nul en 2, positif après.

La fonction décroît donc jusqu'à 2, puis croît. Sa valeur minimale est $f(2) = 4 - 8 + 7 = 3$. La forme $f(x) = (x - 2)^2 + 3$ confirme ce résultat puisque le carré est toujours positif ou nul.

La fonction reste positive même là où sa dérivée est négative. « Décroissante » signifie que ses valeurs diminuent quand x augmente ; cela ne signifie pas qu'elles se trouvent sous zéro.

 Attention | Comprendre une erreur fréquente

Résoudre $f'(x) = 0$ fournit des candidats, pas automatiquement des extrema. Il faut étudier les signes et, pour un extremum global, examiner les bornes.

À toi d'essayer : Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Si la dérivée passe de + à -, la fonction présente. ...

1. Forcément un zéro
2. Un minimum local
3. Un maximum local

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 24 [Explication](#), p. 26

3.5 Optimiser une grandeur avec la dérivée

 Intuition | Construire la notion pas à pas

Choisir le meilleur résultat parmi les choix possibles. Optimiser une grandeur signifie la rendre aussi grande ou aussi petite que possible tout en respectant des contraintes. Il faut distinguer la variable choisie, par exemple une quantité produite, et la grandeur optimisée, par exemple un bénéfice.

Commencer par les contraintes. Avant de calculer une dérivée, écris l'ensemble des valeurs réalisables : intervalle de longueurs, capacité maximale, nombres entiers d'objets. Un résultat situé hors de cet ensemble n'est pas une solution du problème, même s'il donne le sommet de la courbe.

Justifier le meilleur choix. La dérivée sert à repérer les phases de croissance et de décroissance. Un passage de positif à négatif donne un maximum local ; les bornes du domaine restent des candidats à un maximum global. Compare toutes les valeurs pertinentes.

Revenir à une décision. Une production entière ne peut pas prendre une valeur comme 4,5. Le modèle continu aide à repérer la zone optimale ; on compare ensuite les entiers admissibles voisins. L'arrondi automatique peut manquer une égalité ou retenir le mauvais choix.

La conclusion doit donner à la fois le choix optimal et la valeur obtenue, avec leurs unités si le contexte en fournit.

 Définition | Comprendre la notion

Une optimisation cherche la plus petite ou la plus grande valeur d'une grandeur sous des contraintes. Choisis la variable, exprime la grandeur par une fonction et détermine son domaine. Étudie la dérivée, ses signes et les valeurs aux points critiques et aux bornes. Reviens ensuite au contexte : une longueur doit rester positive, une production peut être entière, une solution peut être hors du domaine. Un maximum local n'est pas automatiquement le maximum global. Pour un nombre entier d'objets, compare les entiers voisins du meilleur choix continu plutôt que d'arrondir sans contrôle.

 Exemple | Exemple commenté

Une recette est modélisée par $R(x) = -2x^2 + 80x$ sur $[0; 30]$. La dérivée $R'(x) = -4x + 80 = -4(x - 20)$ est positive avant 20 et négative après.

La recette croît jusqu'à 20 puis décroît. Le candidat intérieur est donc $x = 20$, pour lequel $R(20) = -800 + 1600 = 800$. Les bornes donnent $R(0) = 0$ et $R(30) = -1800 + 2400 = 600$.

La valeur 800 est la plus grande : le maximum autorisé est atteint en 20. Si la capacité avait limité x à 15, ce choix n'aurait plus été possible ; il aurait fallu reprendre la conclusion sur le nouveau domaine, sans conserver automatiquement le sommet.

 Attention | Comprendre une erreur fréquente

Résoudre la dérivée égale à zéro sans vérifier le domaine peut proposer une décision impossible. Un optimum peut se situer à une borne même lorsque la dérivée n'y est pas nulle.

À toi d'essayer : Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Avant de dériver un modèle d'optimisation, on doit. . .

1. Définir son domaine admissible
2. Ignorer les unités
3. Choisir systématiquement $x = 0$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 25](#) [Explication, p. 26](#)

4 Boîte à outils

 Méthode | Comprendre la fonction inverse

1. Annonce le domaine et les contraintes du contexte.
2. Pour calculer une image, remplace x par la valeur non nulle donnée.
3. Pour comparer, identifie d'abord la branche positive ou négative.
4. Avant de multiplier une inégalité par x , détermine son signe.
5. Dans un problème de personnes ou d'objets, conclus avec un entier admissible.

 Méthode | Dériver l'inverse et ses applications

1. Identifie le coefficient a de l'inverse et la constante b .
2. Écris $f'(x) = -a/x^2$ sur le domaine autorisé.
3. Utilise $x^2 > 0$ pour étudier le signe.
4. Pour une tangente, calcule aussi l'image du point.
5. Interprète les variations et les unités dans le contexte.

 Méthode | Dériver les polynômes de degré au plus trois

1. Repère la variable de dérivation et les coefficients constants.
2. Dérive chaque terme avec son signe.
3. Réunis les termes pour obtenir la fonction dérivée.
4. Remplace ensuite la variable par l'abscisse demandée.
5. Pour un paramètre, traduis la pente imposée en équation et vérifie la valeur trouvée.

 Méthode | Du signe de la dérivée aux variations

1. Annonce l'intervalle étudié et calcule la dérivée.
2. Cherche ses zéros et étudie son signe sur chaque morceau.
3. Traduis les signes en flèches de variation.
4. Calcule les images des bornes et des points critiques.
5. Compare ces valeurs pour identifier les extrema demandés.

 Méthode | Optimiser une grandeur avec la dérivée

1. Définis la variable, la grandeur à optimiser et le domaine autorisé.
2. Calcule la dérivée et ses zéros dans ce domaine.
3. Étudie son signe pour établir les variations.
4. Compare les valeurs aux points critiques et aux bornes.
5. Si la variable est entière, compare les candidats entiers puis formule la décision.

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases ; 6 à 10 demandent plusieurs étapes ; 11 à 15 t'invitent à choisir, justifier et contrôler. Recherche avant de consulter les indices.

Exercice 1 — Images et signes ★☆☆

Calcule $f(4)$ et $f(-2)$ pour $f(x) = 1/x$.

Exercice 2 — Un multiple de l'inverse ★☆☆

Dérive $f(x) = 7/x - 2$ pour $x > 0$.

Exercice 3 — Dériver terme à terme ★☆☆

Dérive $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 4$.

Exercice 4 — Lire un signe ★☆☆

$f'(x) > 0$ sur $[1; 4]$. Que peut-on dire de f sur cet intervalle ?

Exercice 5 — Un maximum quadratique ★☆☆

$B(x) = -x^2 + 10x$ sur $[0; 10]$. Trouve son maximum.

Exercice 6 — Comparer des inverses ★★☆☆

Compare $1/3$ et $1/8$, puis $1/(-8)$ et $1/(-3)$.

Exercice 7 — Un coefficient négatif ★★☆☆

Étudie les variations de $g(x) = -4/x + 3$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 8 — Une pente en un point ★★☆☆

Pour $g(x) = -x^3 + 6x$, calcule la dérivée puis sa valeur en 2.

Exercice 9 — Construire un tableau ★★☆☆

Étudie $f(x) = x^2 - 6x + 5$ sur $[0; 5]$.

Exercice 10 — Une contrainte active ★★☆☆

$B(x) = -x^2 + 10x$, mais $x \in [0; 3]$. Quel est le maximum autorisé ?

Exercice 11 — Un partage sous plafond ★★★

On partage 180 euros entre n personnes. Combien faut-il de personnes au minimum pour payer au plus 12 euros chacune ?

Exercice 12 — Une tangente à un coût ★★★

$c(x) = 100/x + 2$ pour $x > 0$. Donne la tangente en $x = 10$.

Exercice 13 — Trouver un paramètre ★★★

On a $h(x) = ax^3 + 2x$ et $h'(1) = 14$. Détermine a .

Exercice 14 — Une dérivée nulle sans extremum ★★ ★

Pour $f(x) = x^3$, la dérivée est $3x^2$. Pourquoi $x = 0$ ne donne-t-il pas un maximum ou minimum ?

Exercice 15 — Une production entière ★★ ★

$B(n) = -n^2 + 9n$ pour un entier $n \in [0; 9]$. Quelles productions maximisent B ?

6 Problème — Pour aller plus loin

Répartir un coût fixe

Le coût moyen est $C(x) = x + 144/x$ euros par unité, pour $2 \leq x \leq 24$.

1. Explique pourquoi $x = 0$ est exclu et calcule $C(6)$, $C(12)$, $C(24)$.
2. Dérive C et mets la dérivée sur un dénominateur unique.
3. Étudie les variations et trouve le minimum sur le domaine.
4. Calcule l'équation de la tangente en $x = 6$.
5. Le coût total est $T(x) = xC(x)$. Retrouve T et explique pourquoi coût total et coût moyen ne sont pas le même objectif.

7 Indices des exercices

Exercice 1

Indice 1. L'inverse est le quotient 1 par le nombre.

Indice 2. Un dénominateur négatif donne un quotient négatif.

Exercice 2

Indice 1. La constante -2 a une dérivée nulle.

Indice 2. Conserve le facteur 7.

Exercice 3

Indice 1. Applique une règle distincte à chaque terme.

Indice 2. La dérivée d'une constante est nulle.

Exercice 4

Indice 1. La dérivée décrit les variations.

Indice 2. Ne confonds pas signe de f et signe de sa dérivée.

Exercice 5

Indice 1. Cherche où la dérivée change de signe.

Indice 2. La parabole est tournée vers le bas.

Exercice 6

Indice 1. Les deux branches sont décroissantes.

Indice 2. Un nombre négatif proche de zéro est plus grand qu'un négatif plus éloigné.

Exercice 7

Indice 1. Attention au double signe moins.

Indice 2. Le dénominateur au carré est positif.

Exercice 8

Indice 1. Calcule d'abord la fonction dérivée.

Indice 2. Remplace ensuite x par l'abscisse demandée.

Exercice 9

Indice 1. Le point critique est 3.

Indice 2. Compare aussi les deux valeurs aux bornes.

Exercice 10

Indice 1. Le domaine est prioritaire.

Indice 2. Le point critique peut se trouver en dehors.

Exercice 11

Indice 1. Le nombre de personnes est positif.

Indice 2. La multiplication par n conserve donc le sens de l'inégalité.

Exercice 12

Indice 1. Il faut l'image et la pente.

Indice 2. Applique ensuite la formule de tangente.

Exercice 13

Indice 1. Traite a comme une constante pendant la dérivation.

Indice 2. La condition sur la pente devient une équation en a .

Exercice 14

Indice 1. Étudie le signe autour de zéro, pas seulement au point.

Indice 2. La dérivée garde le même signe.

Exercice 15

Indice 1. Le sommet continu n'est pas un entier.

Indice 2. Compare les deux entiers voisins.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Chaque image est le quotient de 1 par l'abscisse.

Construire la réponse.

1. $f(4) = 1/4 = 0,25$.
2. $f(-2) = 1/(-2) = -1/2 = -0,5$.

Vérifier. Chaque image a le même signe que son abscisse et son produit par cette abscisse vaut 1.

Conclure. $f(4) = 1/4$ et $f(-2) = -1/2$.

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le facteur 7 est conservé et la constante -2 a une dérivée nulle.

Construire la réponse.

1. La dérivée de $7/x$ est $7(-1/x^2) = -7/x^2$.
2. En ajoutant la dérivée de -2, on obtient toujours $-7/x^2$.

Vérifier. Pour $x > 0$, le dénominateur est positif et le résultat négatif : la fonction décroît.

Conclure. $f'(x) = -7/x^2$ sur $]0; +\infty[$.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les quatre termes utilisent les règles du cube, du carré, de la fonction affine et de la constante.

Construire la réponse.

1. $2x^3$ donne $2 \times 3x^2 = 6x^2$.
2. $5x^2$ donne $10x$; $-3x$ donne -3 ; 4 donne zéro.
3. On réunit les résultats : $f'(x) = 6x^2 + 10x - 3$.

Vérifier. Le degré maximal a diminué de 3 à 2 et le signe du coefficient -3 est conservé.

Conclure. $f'(x) = 6x^2 + 10x - 3$ sur les réels.

Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le signe donné concerne la dérivée sur tout un intervalle.

Construire la réponse.

1. Une dérivée strictement positive indique une pente montante.
2. Le théorème de variation permet donc de conclure que f est strictement croissante sur $[1; 4]$.

Vérifier. Par exemple $x - 100$ est croissante sur cet intervalle tout en ayant des valeurs négatives : le signe de f reste inconnu.

Conclure. f est strictement croissante sur $[1; 4]$.

Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On cherche la plus grande valeur de B sur tout l'intervalle fermé $[0; 10]$.

Construire la réponse.

1. $B'(x) = -2x + 10 = -2(x - 5)$. Elle s'annule en 5.
2. Elle est positive pour $x < 5$ et négative pour $x > 5$: B croît puis décroît.
3. $B(5) = -25 + 50 = 25$. Les bornes donnent $B(0) = 0$ et $B(10) = -100 + 100 = 0$.

Vérifier. La forme $B(x) = 25 - (x - 5)^2$ confirme que B ne peut dépasser 25 et l'atteint en 5.

Conclure. Le maximum est 25, atteint pour $x = 5$.

Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les deux comparaisons se font séparément sur les deux branches.

Construire la réponse.

1. Comme $3 < 8$ et que les nombres sont positifs, $1/3 > 1/8$.
2. Comme $-8 < -3$ et que l'inverse décroît sur les négatifs, $-1/8 > -1/3$.
3. Numériquement, $-0,125 > -0,333 \dots$

Vérifier. On peut aussi multiplier chaque comparaison par les dénominateurs positifs 24, puis lire $8 > 3$ et $-3 > -8$.

Conclure. $1/3 > 1/8$ et $1/(-8) > 1/(-3)$.

Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le signe du coefficient devant l'inverse modifie le sens de variation.

Construire la réponse.

1. $g'(x) = (-4)(-1/x^2) + 0 = 4/x^2$.
2. Pour $x > 0$, $x^2 > 0$, donc $g'(x) > 0$.

Vérifier. Par exemple $g(1) = -1$ et $g(2) = 1$: cet échantillon est cohérent avec la croissance démontrée par le signe de la dérivée.

Conclure. g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On cherche la fonction dérivée, puis une valeur de cette fonction.

Construire la réponse.

1. La dérivée de $-x^3$ est $-3x^2$ et celle de $6x$ est 6.
2. On obtient $g'(x) = -3x^2 + 6$.
3. En 2, $g'(2) = -3 \times 4 + 6 = -6$.

Vérifier. La dérivée négative donne une pente descendante en 2. L'image $g(2) = -8 + 12 = 4$ est une autre grandeur.

Conclure. $g'(x) = -3x^2 + 6$ et la pente en 2 vaut -6.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On cherche les variations et les valeurs extrêmes sur l'intervalle fermé donné.

Construire la réponse.

1. $f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$. Elle est négative pour $x < 3$ et positive pour $x > 3$.
2. f décroît sur $[0; 3]$ puis croît sur $[3; 5]$.
3. $f(0) = 5$, $f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$ et $f(5) = 25 - 30 + 5 = 0$.
4. La plus petite valeur est -4 ; la plus grande des valeurs aux deux bornes est 5.

Vérifier. La forme $(x - 3)^2 - 4$ confirme le minimum -4 atteint en 3.

Conclure. Le minimum global est -4 en 3 et le maximum global 5 en 0.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le domaine a changé : seuls les choix entre 0 et 3 sont autorisés.

Construire la réponse.

1. Le zéro 5 de la dérivée est hors de $[0; 3]$.
2. Sur cet intervalle, $-2x + 10 \geq -2 \times 3 + 10 = 4 > 0$. B est donc croissante.
3. Le maximum est à la borne droite 3 et vaut $B(3) = -9 + 30 = 21$.

Vérifier. La forme du modèle ne change pas, mais la contrainte exclut 5. La valeur 21 dépasse bien $B(0) = 0$.

Conclure. Le maximum autorisé est 21, obtenu en 3.

Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On cherche un nombre entier positif de personnes pour une part inférieure ou égale à 12.

Construire la réponse.

1. Le modèle donne $180/n \leq 12$ avec $n > 0$.
2. Multiplier par n conserve le sens : $180 \leq 12n$.
3. Diviser par 12 donne $n \geq 15$.

Vérifier. Pour 15 personnes, la part est exactement 12 euros ; pour 14, elle vaut environ 12,86 euros et dépasse le plafond.

Conclure. Il faut au minimum 15 personnes.

Corrigé 12

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Une tangente demande la valeur de c et sa pente en 10.

Construire la réponse.

1. $c(10) = 100/10 + 2 = 12$.
2. $c'(x) = -100/x^2$, donc $c'(10) = -100/100 = -1$.
3. La tangente est $y = -1(x - 10) + 12 = -x + 22$.

Vérifier. À $x = 10$, cette droite donne 12 ; sa pente est bien -1.

Conclure. La tangente a pour équation $y = -x + 22$.

Corrigé 13

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le coefficient a reste constant pendant la dérivation.

Construire la réponse.

1. $h'(x) = 3ax^2 + 2$.
2. La condition en 1 donne $3a \times 1^2 + 2 = 14$.
3. On soustrait 2 puis divise par 3 : $3a = 12$, donc $a = 4$.

Vérifier. Avec cette valeur, $h'(1) = 12 \times 1^2 + 2 = 14$, comme demandé.

Conclure. Le coefficient recherché est $a = 4$.

Corrigé 14

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Il faut examiner ce qui se passe de part et d'autre du point où la dérivée s'annule.

Construire la réponse.

1. $3x^2 > 0$ pour $x \neq 0$ et vaut zéro seulement en 0.
2. Le signe reste positif à gauche comme à droite : la fonction continue de croître.

3. Pour tout $h > 0$, $f(-h) = -h^3 < 0 = f(0) < h^3 = f(h)$.

Vérifier. Des valeurs plus petites et plus grandes que $f(0)$ existent aussi près de zéro que l'on veut : cela exclut un extremum local.

Conclure. En 0, la tangente est horizontale mais il n'y a ni maximum ni minimum.

Corrigé 15

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La variable n doit être entière : le sommet du modèle continu ne suffit pas.

Construire la réponse.

1. Pour le modèle réel, $B'(x) = -2x + 9$ s'annule en $x = 4,5$. B croît avant puis décroît après.
2. Les entiers voisins admissibles sont 4 et 5.
3. $B(4) = -16 + 36 = 20$ et $B(5) = -25 + 45 = 20$.
4. Par les variations, les entiers inférieurs à 4 ou supérieurs à 5 donnent une valeur plus petite.

Vérifier. La symétrie autour de 4,5 explique l'égalité. La valeur continue 20,25 serait inaccessible avec une production entière.

Conclure. Les productions 4 et 5 sont toutes deux optimales et donnent un bénéfice modélisé de 20.

9 Corrigé du problème

1. **Comprendre la question.** La division par x représente une répartition de coût et exige une quantité non nulle.

Construire la réponse.

- (a) En zéro, le terme $144/x$ n'est pas défini. Le domaine professionnel retenu $[2;24]$ évite cette valeur.
- (b) $C(6) = 6 + 144/6 = 6 + 24 = 30$ euros par unité.
- (c) $C(12) = 12 + 144/12 = 12 + 12 = 24$ euros par unité.
- (d) $C(24) = 24 + 144/24 = 24 + 6 = 30$ euros par unité.

Vérifier. Le coût moyen baisse entre 6 et 12, puis remonte entre 12 et 24. Ces valeurs suggèrent un minimum, à démontrer par les variations.

Conclure. Les trois coûts moyens sont 30, 24 et 30 euros par unité.

2. **Comprendre la question.** On dérive le terme linéaire et le terme inverse séparément.

Construire la réponse.

- (a) La dérivée de x est 1 ; celle de $144/x$ est $-144/x^2$.
- (b) Ainsi $C'(x) = 1 - 144/x^2$.
- (c) Pour mettre au même dénominateur, on écrit $1 = x^2/x^2$, d'où $C'(x) = (x^2 - 144)/x^2$.

Vérifier. Le domaine exclut zéro, donc la mise au même dénominateur est permise. La factorisation du numérateur est $(x - 12)(x + 12)$.

Conclure. $C'(x) = (x - 12)(x + 12)/x^2$.

3. **Comprendre la question.** Sur le domaine positif, deux facteurs ont un signe connu.

Construire la réponse.

- (a) Pour $2 \leq x \leq 24$, $x^2 > 0$ et $x + 12 > 0$. Le signe de la dérivée est donc celui de $x - 12$.
- (b) C décroît sur $[2;12]$, puis croît sur $[12;24]$.
- (c) Le minimum vaut $C(12) = 24$. Les bornes donnent $C(2) = 74$ et $C(24) = 30$, plus grandes.

Vérifier. On peut contrôler par $C(x) - 24 = (x - 12)^2/x \geq 0$ sur le domaine positif, avec égalité en 12 seulement.

Conclure. Le coût moyen minimal est 24 euros par unité, obtenu pour une quantité x égale à 12.

4. **Comprendre la question.** La tangente demande le coût au point choisi et sa pente.

Construire la réponse.

- (a) On connaît $C(6) = 30$.
- (b) La pente vaut $C'(6) = 1 - 144/36 = 1 - 4 = -3$.
- (c) L'équation est $y = -3(x - 6) + 30 = 48 - 3x$.

Vérifier. En x égal à 6, la droite donne $48 - 18 = 30$; son coefficient directeur est bien -3.

Conclure. La tangente en 6 est $y = 48 - 3x$.

5. **Comprendre la question.** Le coût total multiplie le coût par unité par le nombre d'unités.

Construire la réponse.

- (a) $T(x) = xC(x) = x(x + 144/x) = x^2 + 144$, sur le domaine où x est non nul.
- (b) La dérivée du coût total est $T'(x) = 2x > 0$ sur $[2;24]$: T augmente.
- (c) Le coût moyen diminue d'abord car le coût fixe de 144 est réparti sur davantage d'unités. Le total peut pourtant augmenter puisqu'on fabrique plus d'unités.

Vérifier. Par exemple $T(6) = 180$ euros et $T(12) = 288$ euros, tandis que les coûts moyens passent de 30 à 24 euros.

Conclure. Minimiser un coût par unité et minimiser une dépense totale ne sont pas le même objectif. Il faut préciser la quantité souhaitée ou la contrainte de production.

10 Variante autonome et bilan

Étudie $D(x) = 2x + 200/x$ sur $[2;20]$.

À toi d'essayer : Vérifie ta démarche

Résous la variante, puis explique pourquoi ta méthode s'applique.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 25](#) [Explication, p. 26](#)

- Je peux expliquer : comprendre la fonction inverse.
- Je peux expliquer : dériver l'inverse et ses applications.
- Je peux expliquer : dériver les polynômes de degré au plus trois.
- Je peux expliquer : du signe de la dérivée aux variations.
- Je peux expliquer : optimiser une grandeur avec la dérivée.

11 Fiche-mémoire

Comprendre la fonction inverse.

1. Annonce le domaine et les contraintes du contexte.
2. Pour calculer une image, remplace x par la valeur non nulle donnée.
3. Pour comparer, identifie d'abord la branche positive ou négative.
4. Avant de multiplier une inégalité par x , détermine son signe.
5. Dans un problème de personnes ou d'objets, conclus avec un entier admissible.

Dériver l'inverse et ses applications.

1. Identifie le coefficient a de l'inverse et la constante b .
2. Écris $f'(x) = -a/x^2$ sur le domaine autorisé.
3. Utilise $x^2 > 0$ pour étudier le signe.
4. Pour une tangente, calcule aussi l'image du point.
5. Interprète les variations et les unités dans le contexte.

Dériver les polynômes de degré au plus trois.

1. Repère la variable de dérivation et les coefficients constants.
2. Dérive chaque terme avec son signe.
3. Réunis les termes pour obtenir la fonction dérivée.
4. Remplace ensuite la variable par l'abscisse demandée.
5. Pour un paramètre, traduit la pente imposée en équation et vérifie la valeur trouvée.

Du signe de la dérivée aux variations.

1. Annonce l'intervalle étudié et calcule la dérivée.
2. Cherche ses zéros et étudie son signe sur chaque morceau.
3. Traduis les signes en flèches de variation.
4. Calcule les images des bornes et des points critiques.
5. Compare ces valeurs pour identifier les extrema demandés.

Optimiser une grandeur avec la dérivée.

1. Définis la variable, la grandeur à optimiser et le domaine autorisé.
2. Calcule la dérivée et ses zéros dans ce domaine.
3. Étudie son signe pour établir les variations.
4. Compare les valeurs aux points critiques et aux bornes.
5. Si la variable est entière, compare les candidats entiers puis formule la décision.

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

La formule contient une division par x .

Indice 2 — Un pas de plus.

Une division par zéro n'a pas de sens : quelle abscisse faut-il exclure ?

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Conserve le coefficient 5 devant la fonction inverse.

Indice 2 — Un pas de plus.

La dérivée de $1/x$ est $-1/x^2$ pour x non nul.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Le coefficient 3 reste devant lorsque tu dérites.

Indice 2 — Un pas de plus.

La dérivée du carré est $2x$; multiplie-la par le coefficient initial.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Traduis chacun des deux signes de la dérivée en sens de variation.

Indice 2 — Un pas de plus.

Une dérivée positive fait croître la fonction ; une dérivée négative la fait décroître.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve**Indice 1 — Une piste.**

Une solution doit respecter les contraintes du problème.

Indice 2 — Un pas de plus.

Repère les quantités possibles : longueurs positives, capacité maximale, valeurs entières éventuelles.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche**Indice 1 — Une piste.**

Repère les données utiles et l'inconnue. Reviens à la méthode correspondante dans la boîte à outils.

Indice 2 — Un pas de plus.

Contrôle les unités, les bornes et la plausibilité du résultat avant de lire la correction.

[Revenir à la recherche, p. 23](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

La fonction inverse est définie pour $x \neq 0$, sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. Les nombres négatifs sont autorisés ; seule la valeur zéro annulerait le dénominateur.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

La dérivée de $5/x$ vaut $5(-1/x^2) = -5/x^2$. Le signe moins est devant la fraction et le carré du dénominateur reste positif pour x non nul.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

La dérivée de $3x^2$ est $3 \times 2x = 6x$. L'exposant diminue d'une unité et multiplie le coefficient ; le nombre 3 ne disparaît pas.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

La fonction croît puis décroît : elle présente un maximum local au changement de signe. Cela ne suffit pas à conclure qu'il s'agit du maximum global sans examiner le reste du domaine.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Il faut d'abord définir le domaine admissible. Un zéro de la dérivée situé hors de ce domaine ne peut pas être retenu, et les bornes autorisées peuvent elles-mêmes donner l'optimum.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche

Comprendre la question. La variante met en concurrence un terme croissant et un terme inverse décroissant sur $[2;20]$.

Construire la réponse.

1. La dérivée est $D'(x) = 2 - 200/x^2 = (2x^2 - 200)/x^2 = 2(x - 10)(x + 10)/x^2$.
2. Sur le domaine, $x + 10$ et x^2 sont positifs. Le signe est donc celui de $x - 10$.
3. D décroît sur $[2;10]$, puis croît sur $[10;20]$.
4. $D(10) = 20 + 20 = 40$. Aux bornes, $D(2) = 4 + 100 = 104$ et $D(20) = 40 + 10 = 50$.

Vérifier. Le contrôle $D(x) - 40 = 2(x - 10)^2/x \geq 0$ confirme le minimum sur le domaine positif.

Conclure. Le minimum est 40, atteint pour x égal à 10.

[Revenir à la recherche, p. 23](#)