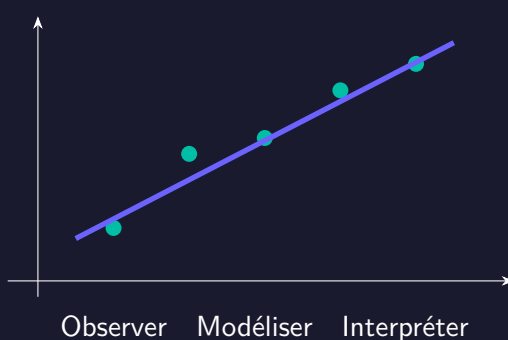


Ajustements et prévisions

Statistiques ■ Comprendre et s'entraîner



Terminale STMG et STI2D — commun
Année scolaire 2026–2027

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	Pourquoi ce chapitre ?	3
2	L'idée avant la formule	3
3	Le cours formel	3
3.1	Représenter deux variables par un nuage	3
3.2	Construire un ajustement affine	4
3.3	Interpolation et extrapolation	6
3.4	Reconnaître un modèle non linéaire	7
3.5	Linéariser un modèle exponentiel	8
4	Boîte à outils	9
5	Exercices progressifs	11
6	Problème — Pour aller plus loin	13
7	Indices des exercices	14
8	Corrigés détaillés	16
9	Corrigé du problème	22
10	Variante autonome et bilan	24
11	Fiche-mémoire	24
12	Indices des pauses et des preuves	25
13	Explications des pauses et des preuves	27

1 Pourquoi ce chapitre ?

Le modèle affine n'est pas toujours adapté. Comparer les écarts et les rapports aide à choisir une courbe qui décrit mieux les données. **Ton parcours.** Enseignement commun de mathématiques pour les séries STMG et STI2D. Les situations de gestion et les situations techniques mobilisent ici les mêmes notions du programme.

- Représenter deux variables par un nuage.
- Construire un ajustement affine.
- Interpolation et extrapolation.
- Reconnaître un modèle non linéaire.
- Linéariser un modèle exponentiel.

2 L'idée avant la formule

Des différences constantes évoquent une droite ; des rapports constants évoquent une exponentielle. Un bon ajustement doit aussi rester plausible dans son contexte.

3 Le cours formel

3.1 Représenter deux variables par un nuage

Intuition | Construire la notion pas à pas

Conserver l'association entre deux mesures. Une série à deux variables relève deux informations sur chaque individu : par exemple sa durée de travail et sa production. Le couple $(x_i; y_i)$ doit rester associé. Trier les deux colonnes séparément créerait des couples qui n'ont jamais été observés.

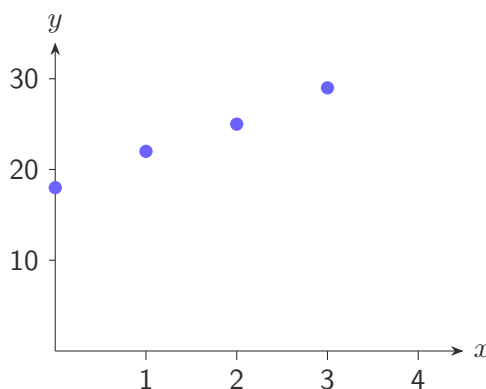
Lire un point dans son contexte. La première coordonnée se lit sur l'axe horizontal et la seconde sur l'axe vertical. On indique le nom et l'unité de chaque variable. Le point $(3; 42)$ peut ainsi signifier « après 3 heures, 42 pièces », ce qui est différent de 42 heures et 3 pièces.

Observer avant de calculer. Le nuage montre une tendance générale, une éventuelle courbure, des regroupements ou des observations atypiques. Une tendance croissante n'exige pas que tous les points montent un à un : les mesures peuvent fluctuer autour de cette tendance.

Évaluer une droite avec les bons écarts. Pour des pas égaux en x , un alignement affine exact exige des différences égales en y . Si les pas en x changent, on compare les quotients $\Delta y / \Delta x$. Une apparence graphique dépend aussi des échelles ; on complète donc l'observation par quelques calculs.

Définition | Comprendre la notion

Une série à deux variables quantitatives contient des couples $(x_i; y_i)$ observés sur les mêmes individus. Un nuage de points place chaque couple dans un repère. Annonce les variables, leurs unités et l'échelle des axes. Invertir les colonnes modifie la question étudiée : prédire y à partir de x n'est pas la même opération que prédire x à partir de y . Le nuage permet d'observer une tendance, une courbure, des groupes ou des valeurs atypiques. Une tendance croissante ne signifie pas que chaque point est au-dessus du précédent ni qu'une relation de cause à effet est démontrée.



💡 Exemple | Exemple commenté

On relève les couples durée/température $(0; 18)$, $(1; 22)$, $(2; 25)$, $(3; 29)$. Le temps en minutes est placé horizontalement et la température en degrés Celsius verticalement. Le point $(2; 25)$ signifie qu'au bout de deux minutes, la température mesurée est 25 degrés.

Pour les trois pas d'une minute, les températures augmentent de 4, puis 3, puis 4 degrés. La tendance est croissante et proche d'une augmentation régulière, mais les quatre points ne sont pas exactement alignés puisque ces accroissements diffèrent.

Une droite pourrait fournir une approximation à examiner. Elle ne doit pas effacer la distinction entre valeurs mesurées et valeurs prévues. Le graphique seul ne prouve pas non plus ce qui cause l'évolution : cette interprétation dépend du protocole et du contexte.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Une observation atypique peut être vraie. Avant d'utiliser le mot « erreur », distingue une erreur de saisie vérifiée d'une mesure inhabituelle mais réelle.

À toi d'essayer : Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Un nuage à deux variables conserve...

1. Les valeurs de x triées indépendamment de y
2. Les couples d'observations associés
3. Seulement les deux moyennes

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 25](#) [Explication, p. 27](#)

3.2 Construire un ajustement affine

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Remplacer un nuage par une tendance. Un ajustement affine utilise une droite $\hat{y} = ax + b$ pour prévoir y à partir de x . Le symbole $\hat{y}$ désigne une valeur prévue, tandis que y désigne une observation. Les deux ne coïncident pas nécessairement.

Mesurer ce que la droite manque. Le résidu est $e_i = y_i - \hat{y}_i$. Il est positif lorsque l'observation se situe au-dessus de la droite et négatif lorsqu'elle se situe en dessous. Additionner les résidus signés peut masquer des erreurs par compensation ; les carrés évitent cette compensation.

Distinguer les méthodes. La méthode de Mayer relie les points moyens de deux groupes de points ordonnés. La méthode des moindres carrés cherche la droite qui minimise la somme des carrés des résidus verticaux. Ces critères ne donnent pas nécessairement la même droite.

Évaluer le résultat au-delà de la formule. On observe le nuage avant l'ajustement et les résidus après. Une courbure régulière des résidus suggère qu'une droite est mal adaptée. Une petite erreur sur les observations ne garantit pas une bonne prévision loin de la zone étudiée.

Définition | Comprendre la notion

Un ajustement remplace un nuage imparfaitement aligné par une relation approchée $y = ax + b$. Une droite au jugé, une droite de Mayer ou une régression peuvent donner des ajustements différents. La méthode de Mayer partage les points ordonnés en deux groupes et relie leurs points moyens. La méthode des moindres carrés choisit a, b pour minimiser la somme des carrés des écarts verticaux $\sum (y_i - (ax_i + b))^2$; on utilise un outil numérique pour la déterminer. L'écart $y_i - \hat{y}_i$ s'appelle un résidu. Un nuage courbé ou des résidus organisés signalent qu'une droite peut être inadéquate. Arrondis les coefficients seulement à la précision utile.

Exemple | Exemple commenté

Pour les points $(0; 1)$, $(1; 3)$, $(2; 4)$, une régression affine donne $\hat{y} = 1,5x + 7/6$. Les prévisions sont $7/6$, $8/3$ et $25/6$. Les résidus observation moins prévision sont donc $-1/6$, $1/3$ et $-1/6$. Leur somme est nulle, mais les erreurs ne sont pas toutes nulles. La somme des carrés vaut $1/36 + 1/9 + 1/36 = 1/6$. Ce calcul rend visible une dispersion que la somme signée annulerait. Le point moyen est $G(1; 8/3)$. La droite passe bien par lui puisque $1,5 + 7/6 = 8/3$. Pour un affichage, on peut arrondir la constante à $1,1667$; pour contrôler les résidus, garder $7/6$ évite les petites erreurs d'arrondi.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Un résidu négatif n'est pas une erreur « plus petite que zéro » à annuler. Il indique le côté de la droite où se trouve l'observation; son carré contribue positivement au critère d'ajustement.

À toi d'essayer : Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Les moindres carrés minimisent. . .

1. Le nombre de points du nuage
2. La somme des abscisses
3. La somme des carrés des résidus verticaux

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 25](#) [Explication, p. 27](#)

3.3 Interpolation et extrapolation** Intuition | Construire la notion pas à pas**

Situer la demande par rapport aux observations. Une interpolation utilise le modèle à l'intérieur de l'intervalle des abscisses observées. Une extrapolation le prolonge à l'extérieur. Dans les deux cas, le résultat reste une estimation ; l'extrapolation ajoute l'hypothèse que la tendance continue hors de la zone connue.

Décoder les dates et les unités. Le rang x peut être le nombre d'années après une date de référence, et non l'année du calendrier. Si 2022 porte le rang zéro, 2026 porte le rang 4. Remplacer x par 2026 produirait une erreur de sens, même si le calcul était arithmétiquement exact.

Savoir quelle variable on cherche. Pour prévoir y à partir d'une valeur de x , on remplace x dans la formule. Pour trouver quand un objectif y sera atteint, on résout une équation en x , puis on reconvertit le rang en date si nécessaire.

Appliquer les limites du phénomène. Un effectif ne peut pas être négatif, une proportion reste entre zéro et un, une capacité peut plafonner. Une prévision qui viole ces limites signale que le modèle ne peut pas être prolongé jusque-là. Une valeur admissible ne suffit toutefois pas à garantir sa fiabilité.

** Définition | Comprendre la notion**

Une interpolation estime une valeur pour une abscisse à l'intérieur de l'intervalle observé. Une extrapolation utilise le modèle en dehors de cet intervalle ; elle demande davantage de prudence. Pour prévoir y , remplace x dans le modèle. Pour chercher la valeur de x correspondant à un objectif, résous l'équation du modèle. Si x est une date codée, reviens ensuite à la date réelle. Même à l'intérieur de l'intervalle, une prévision n'est pas une certitude individuelle. Vérifie son ordre de grandeur, son unité et la pertinence du modèle ; évite les extrapolations incompatibles avec une limite physique ou un marché saturé.

** Exemple | Exemple commenté**

Les années 2020 à 2024 sont codées de x égal à 0 à x égal à 4, avec le modèle $y = 12x + 80$. Pour 2023, le rang est $2023 - 2020 = 3$; la prévision vaut $12 \times 3 + 80 = 116$. Comme 3 appartient à $[0; 4]$, il s'agit d'une interpolation.

Pour 2027, le rang est 7 et la prévision vaut $12 \times 7 + 80 = 164$. Le rang 7 est hors de l'intervalle observé : c'est une extrapolation. Le calcul utilise la même formule, mais la justification est plus fragile puisque l'on suppose la poursuite de la tendance trois ans après la dernière observation.

Pour un objectif de 140, l'équation $12x + 80 = 140$ donne $x = 5$, donc l'année 2025 selon le modèle. Ce résultat constitue lui aussi une extrapolation.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Une formule peut fournir un nombre sans que ce nombre ait un sens dans le contexte. Vérifier le domaine observé et les limites physiques fait partie de la réponse, pas seulement du commentaire final.

À toi d'essayer : Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Prédire hors de l'intervalle observé est...

1. Une interpolation
2. Une mesure exacte
3. Une extrapolation

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 25](#) [Explication, p. 27](#)

3.4 Reconnaître un modèle non linéaire**🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas**

Observer la forme avant de choisir une famille. Une droite représente une variation constante de y par unité de x . Si le nuage se courbe régulièrement, ce taux varie et un modèle non linéaire peut être plus pertinent. Il faut examiner tout le nuage, pas seulement deux points.

Comparer différences et rapports. Pour des abscisses régulièrement espacées, des différences constantes suggèrent un modèle affine. Pour des ordonnées positives, des rapports constants suggèrent un modèle exponentiel. Ces tests supposent des pas d'abscisse identiques ; sans cela, leur lecture directe serait trompeuse.

Utiliser les résidus pour voir une structure oubliée. Un résidu positif signifie que le modèle sous-estime l'observation, un résidu négatif qu'il la surestime. Si ces signes s'organisent selon une courbe, les erreurs ne ressemblent pas à de petites fluctuations sans structure : la famille choisie manque peut-être une partie du phénomène.

Ne pas confondre souplesse et pertinence. Un modèle compliqué peut traverser beaucoup de points mais se comporter mal entre eux ou au-delà. On examine sa cohérence avec le contexte, ses domaines de définition et des observations supplémentaires avant de lui faire confiance.

📖 Définition | Comprendre la notion

Une droite ne convient pas à tous les nuages. Une courbure régulière peut inviter à examiner un modèle polynomial, exponentiel ou puissance à l'aide d'un outil numérique. À pas d'abscisse constant, des différences approximativement constantes suggèrent un modèle affine ; des rapports approximativement constants pour des ordonnées positives suggèrent un modèle exponentiel. Le choix ne repose pas seulement sur un coefficient : examine les résidus, les unités, le domaine de définition et la cohérence du phénomène. Un modèle plus compliqué peut épouser les données sans mieux prédire.

 Exemple | Exemple commenté

Aux abscisses 0, 1, 2, 3, les valeurs sont 100, 80, 64, 51,2. Les différences sont -20, -16 et -12,8 : une même augmentation de x ne produit pas une même variation de y . Une droite ne décrit donc pas exactement ces quatre points.

Les rapports valent en revanche $80/100 = 0,8$, $64/80 = 0,8$ et $51,2/64 = 0,8$. Le modèle $y = 100 \times 0,8^x$ retrouve tous les relevés. À x égal à 4, il prévoit $51,2 \times 0,8 = 40,96$.

Cette dernière valeur reste une extrapolation si les observations s'arrêtent à 3. La constance des rapports sur les données justifie un modèle compatible, mais ne prouve pas que le taux de baisse restera constant.

 Attention | Comprendre une erreur fréquente

Des rapports constants ne se lisent directement comme un facteur par unité de x que si les pas d'abscisse sont constants et connus. Un doublement après un jour n'est pas le même rythme qu'un doublement après trois jours.

À toi d'essayer : Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Des ordonnées positives multipliées à chaque pas par 1,2 suggèrent. . .

1. Une constante
2. Un modèle affine exact
3. Un modèle exponentiel

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 25 [Explication](#), p. 27

3.5 Linéariser un modèle exponentiel

 Intuition | Construire la notion pas à pas

Transformer une multiplication en addition. Pour un modèle exponentiel $y = Aq^x$, avec $A > 0$ et $q > 0$, les règles du logarithme décimal donnent $\log(y) = \log(A) + x \log(q)$. La variable transformée $z = \log(y)$ dépend alors de x par une relation affine.

Comprendre le changement d'échelle. Les valeurs de y doivent être strictement positives pour que leur logarithme réel existe. L'axe transformé ne mesure plus directement la quantité initiale : il mesure son logarithme. Une droite dans cette nouvelle échelle correspond à une courbe exponentielle dans l'échelle d'origine.

Revenir aux coefficients d'origine. Si l'ajustement donne $z = ax + b$, alors $y = 10^{ax+b} = 10^b(10^a)^x$. Le coefficient initial est donc $A = 10^b$ et le facteur par unité d'abscisse $q = 10^a$. Les coefficients a et b ne sont pas directement q et A .

Contrôler dans les deux échelles. Les moindres carrés appliqués à z minimisent les erreurs sur les logarithmes, pas les erreurs absolues sur y . On reconstruit donc les prévisions dans l'unité initiale et on les compare aux mesures avant d'interpréter la qualité du modèle.

Définition | Comprendre la notion

Pour des ordonnées strictement positives, un modèle $y = Aq^x$ avec $A > 0$, $q > 0$ devient

$$\log(y) = \log(A) + x \log(q).$$

Poser $z = \log(y)$ permet donc de chercher un ajustement affine $z = ax + b$. On retrouve ensuite $A = 10^b$ et $q = 10^a$. La transformation n'est pas définie pour $y \leq 0$. L'ajustement minimise les erreurs sur les logarithmes, pas directement sur les ordonnées originales : il faut contrôler le modèle reconstruit dans l'échelle initiale.

Exemple | Exemple commenté

Une droite ajustée dans l'échelle logarithmique donne $\log(y) = 0,1x + 2$. On applique la puissance de 10 à toute l'égalité : $y = 10^{0,1x+2}$. La propriété $10^{a+b} = 10^a 10^b$ donne $y = 10^2 \times 10^{0,1x} = 100(10^{0,1})^x$.

Le modèle possède donc une valeur initiale 100 et un facteur $q = 10^{0,1} \approx 1,258925$. Le taux par unité de x vaut $q - 1 \approx 0,258925$, soit environ 25,89 pour cent.

Au rang zéro, $y = 100$ et $\log(100) = 2$, ce qui retrouve l'ordonnée à l'origine transformée. Au rang 1, y vaut environ 125,89, dont le logarithme est environ 2,1. Ces contrôles vérifient la conversion.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

On a $10^{a+b} = 10^a \times 10^b$, et non $10^a + 10^b$. De même, le coefficient 0,3 d'une droite logarithmique n'est pas le facteur de croissance : ce facteur est $10^{0,3}$.

À toi d'essayer : Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

$\log(y) = 2 + 0,2x$ correspond à...

1. $y = 2 \times 0,2^x$
2. $y = 100(10^{0,2})^x$
3. $y = 10^2 + 10^{0,2x}$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 26](#) [Explication, p. 27](#)

4 Boîte à outils

Méthode | Représenter deux variables par un nuage

1. Identifie les deux variables et garde chaque paire de mesures associée.
2. Place x horizontalement et y verticalement, avec des axes nommés et gradués.
3. Décris la tendance, la courbure, les groupes et les points atypiques.
4. Compare des taux de variation si tu recherches un alignement exact.
5. Vérifie les données atypiques sans les supprimer uniquement pour améliorer l'apparence.

 Méthode | Construire un ajustement affine

1. Observe le nuage et précise la méthode d'ajustement utilisée.
2. Calcule ou relève les coefficients a et b avec une précision suffisante.
3. Calcule les prévisions $\hat{y}_i$, puis les résidus $y_i - \hat{y}_i$.
4. Compare les carrés des résidus et leur organisation, pas seulement leur somme signée.
5. Présente les valeurs obtenues comme des prévisions dépendant du modèle.

 Méthode | Interpolation et extrapolation

1. Relève l'intervalle observé, le codage de x et les unités.
2. Convertis la demande en abscisse et distingue interpolation et extrapolation.
3. Calcule une image ou résous l'équation correspondant à l'objectif.
4. Reconvertis le résultat en date ou en quantité et arrondis avec une précision justifiée.
5. Contrôle les limites physiques et indique la dépendance au modèle.

 Méthode | Reconnaître un modèle non linéaire

1. Vérifie l'espacement des abscisses et observe la forme générale du nuage.
2. Calcule différences et, pour des valeurs non nulles adaptées au modèle, rapports successifs.
3. Propose une famille cohérente avec ces observations et le contexte.
4. Teste la formule sur tous les points puis examine les résidus.
5. Présente les valeurs futures comme conditionnelles au maintien de la règle.

 Méthode | Linéariser un modèle exponentiel

1. Vérifie que toutes les ordonnées sont strictement positives et précise la base du logarithme.
2. Calcule $z = \log(y)$ et ajuste z en fonction de x .
3. Pour $z = ax + b$, reconstruis $y = 10^b(10^a)^x$.
4. Conserve les puissances exactes jusqu'aux calculs finaux et interprète le facteur q .
5. Contrôle les prévisions et les erreurs dans l'échelle initiale de y .

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases ; 6 à 10 demandent plusieurs étapes ; 11 à 15 t'invitent à choisir, justifier et contrôler. Cherche avant de consulter les indices.

Exercice 1 — Placer un couple ★☆☆

Un relevé indique 3 heures et 42 pièces produites. Quel point représente-t-il si le temps est en abscisse ?

Exercice 2 — Utiliser une droite fournie ★☆☆

Un ajustement donne $y = 2,5x + 8$. Quelle valeur prévoit-il pour $x = 6$?

Exercice 3 — Identifier la zone ★☆☆

On observe des durées entre 2 et 12 min. Prédire à 8 min est-il une interpolation ? Et à 20 min ?

Exercice 4 — Des rapports constants ★☆☆

Pour les rangs 0, 1, 2, les valeurs sont 5, 15, 45. Propose un modèle exponentiel.

Exercice 5 — Revenir à y ★☆☆

On a $\log(y) = 3$. Trouve y .

Exercice 6 — Identifier une tendance ★★☆☆

Les couples sont $(1; 9)$, $(2; 7)$, $(3; 6)$, $(4; 3)$. Décris la tendance et explique pourquoi une droite exacte n'est pas évidente.

Exercice 7 — Un ajustement de Mayer ★★★

Les deux sous-groupes ont pour points moyens $G_1(2; 7)$ et $G_2(6; 15)$. Détermine la droite de Mayer.

Exercice 8 — Une date codée ★★★

Le rang 0 correspond à 2022 et le modèle est $y = 6x + 50$. Quelle prévision donne-t-il pour 2026 ?

Exercice 9 — Une courbure quadratique ★★★

Les valeurs aux abscisses 0, 1, 2, 3 sont 1, 2, 5, 10. Vérifie le modèle $y = x^2 + 1$ et prévois à 4.

Exercice 10 — Identifier le modèle ★★★

Un ajustement donne $\log(y) = 0,3x + 1$. Écris le modèle de y sans arrondir les coefficients.

Exercice 11 — Un point atypique ★★★

Une série donne $(1; 12)$, $(2; 14)$, $(3; 16)$, $(4; 50)$, $(5; 20)$. Peut-on supprimer le quatrième point parce qu'il gêne l'alignement ?

Exercice 12 — Comparer des résidus ★★★

Pour $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 5)$, compare les sommes des carrés des résidus des modèles A : $y = 2x$ et B : $y = 2x + 1$.

Exercice 13 — Un modèle qui devient impossible ★★ ★

Un ajustement $p(x) = 110 - 5x$ donne un pourcentage. Peut-on l'utiliser pour toute valeur positive de x ?

Exercice 14 — Un résidu organisé ★★ ★

Une droite donne des résidus positifs au début et à la fin, négatifs au milieu. Que suggère cette organisation ?

Exercice 15 — Une transformation impossible ★★ ★

Une série contient $y = 0$ et $y = -2$. Peut-on appliquer directement $z = \log(y)$ à toutes les observations ?

6 Problème — Pour aller plus loin

Comparer deux prévisions de fréquentation

On observe, aux temps $x = 0, 1, 2, 3$, les valeurs $y = 10, 20, 40, 80$.

1. Calcule les différences puis les rapports successifs.
2. Écris un modèle exponentiel qui reproduit les valeurs.
3. Détermine la droite passant par les points extrêmes et compare sa prévision en $x = 1$ à l'observation.
4. Prévois y en $x = 4$ avec les deux modèles.
5. Explique comment examiner la qualité d'un modèle et le risque d'extrapolation.

7 Indices des exercices

Exercice 1

Indice 1. La première coordonnée correspond à l'axe horizontal.

Indice 2. Le temps est placé en abscisse.

Exercice 2

Indice 1. Remplace l'abscisse dans l'équation.

Indice 2. Distingue valeur prédite et valeur mesurée.

Exercice 3

Indice 1. Compare l'abscisse à l'intervalle observé.

Indice 2. À l'intérieur : interpolation ; à l'extérieur : extrapolation.

Exercice 4

Indice 1. Compare les quotients des valeurs successives.

Indice 2. La valeur initiale donne le coefficient devant la puissance.

Exercice 5

Indice 1. La puissance de 10 annule le logarithme décimal.

Indice 2. Cherche le nombre dont le logarithme vaut 3.

Exercice 6

Indice 1. Compare les variations de y pour les mêmes pas de x .

Indice 2. Des points exactement alignés ont un taux de variation constant.

Exercice 7

Indice 1. La droite passe par les deux points moyens.

Indice 2. Calcule pente puis ordonnée à l'origine.

Exercice 8

Indice 1. Calcule l'écart à l'année de référence.

Indice 2. 2022 porte le rang 0.

Exercice 9

Indice 1. Teste toutes les abscisses.

Indice 2. Pour prévoir, remplace x par 4.

Exercice 10

Indice 1. Applique la fonction puissance de 10.

Indice 2. Utilise $10^{a+b} = 10^a 10^b$.

Exercice 11

Indice 1. Un point atypique n'est pas automatiquement faux.

Indice 2. Cherche une justification dans les données ou la mesure.

Exercice 12

Indice 1. Calcule observation moins prévision pour chaque point.

Indice 2. Élève les résidus au carré avant de les additionner.

Exercice 13

Indice 1. Un pourcentage a des bornes naturelles.

Indice 2. Résous séparément $p(x) \geq 0$ et $p(x) \leq 100$.

Exercice 14

Indice 1. Des résidus sans structure attendue ne devraient pas dessiner une courbure.

Indice 2. Un résidu positif signifie observation au-dessus du modèle.

Exercice 15

Indice 1. Rappelle le domaine du logarithme.

Indice 2. Une transformation mathématique doit respecter le sens des données.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le temps doit être la première coordonnée puisque l'énoncé le place en abscisse.

Construire la réponse.

1. La durée est 3 heures : on place 3 sur l'axe horizontal.
2. La production associée est 42 pièces : on place 42 sur l'axe vertical.
3. Le point qui réunit ces deux informations est (3; 42).

Vérifier. Lire le point dans l'autre sens donnerait 42 heures et 3 pièces, ce qui ne correspond pas au relevé. Les unités permettent de repérer cette inversion.

Conclure. Le relevé est représenté par le point (3; 42).

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La droite est fournie ; on cherche la valeur qu'elle prévoit pour une abscisse précise.

Construire la réponse.

1. On remplace x par 6 : $\hat{y} = 2,5 \times 6 + 8$.
2. La multiplication donne 15 ; l'addition donne $15 + 8 = 23$.

Vérifier. La droite part de 8 à x égal à zéro et gagne 2,5 par unité d'abscisse. Six unités ajoutent 15, ce qui confirme 23.

Conclure. Le modèle prévoit 23 pour x égal à 6 ; ce n'est pas nécessairement une valeur mesurée.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le critère est la position de l'abscisse demandée par rapport à l'intervalle observé.

Construire la réponse.

1. Les observations couvrent $[2; 12]$ minutes.
2. Comme $2 \leq 8 \leq 12$, 8 minutes est à l'intérieur : on interpole.
3. Comme $20 > 12$, 20 minutes est à l'extérieur : on extrapole.

Vérifier. Le type de prévision dépend de la durée demandée, pas de la valeur de y que donnera le modèle.

Conclure. À 8 minutes, c'est une interpolation ; à 20 minutes, une extrapolation.

Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On recherche un modèle exponentiel aux rangs entiers 0, 1 et 2.

Construire la réponse.

1. Les rapports successifs sont $15/5 = 3$ et $45/15 = 3$. On retient donc le facteur $q = 3$.
2. Au rang 0, $Aq^0 = A$; la valeur initiale 5 impose $A = 5$.
3. Le modèle est $y = 5 \times 3^x$. Il prévoit au rang 3 : $5 \times 3^3 = 5 \times 27 = 135$.

Vérifier. Aux rangs 0, 1 et 2, le modèle donne 5, 15 et 45, exactement les observations. La prévision 135 suppose que le même facteur se poursuit.

Conclure. Un modèle compatible est $y = 5 \times 3^x$; il prévoit 135 au rang 3.

Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le logarithme utilisé est décimal : il répond à la question « quelle puissance de 10 donne y ? ».

Construire la réponse.

1. L'égalité $\log(y) = 3$ signifie que y est la troisième puissance de 10.
2. On obtient $y = 10^3 = 1\,000$.

Vérifier. Le résultat est strictement positif et $\log(1\,000) = 3$. On ne multiplie pas 3 par 10 : on élève 10 à la puissance 3.

Conclure. $y = 1\,000$.

Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On décrit le sens général de l'évolution et l'on teste si les points sont exactement alignés.

Construire la réponse.

1. Quand x passe de 1 à 4, les ordonnées passent de 9 à 3 : elles diminuent à chaque étape.
2. Les pas d'abscisse valent tous 1. Les variations d'ordonnée sont $7 - 9 = -2$, $6 - 7 = -1$ et $3 - 6 = -3$.
3. Une droite affine imposerait le même quotient $\Delta y / \Delta x$ à chaque pas ; ici ces quotients valent -2, -1 et -3.

Vérifier. Les différences négatives confirment la tendance décroissante, mais leur inégalité exclut un alignement exact des quatre points.

Conclure. Le nuage est décroissant ; une droite peut éventuellement l'ajuster, mais ne passe pas exactement par tous les points.

Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La droite de Mayer doit passer par les deux points moyens fournis.

Construire la réponse.

1. La pente est la variation verticale divisée par la variation horizontale : $a = (15 - 7)/(6 - 2) = 8/4 = 2$.
2. On écrit alors $y = 2x + b$. Au point $G_1(2; 7)$, $7 = 4 + b$, donc $b = 3$.
3. L'équation obtenue est $y = 2x + 3$.

Vérifier. Pour le second point, $2 \times 6 + 3 = 15$. Les deux points moyens satisfont donc l'équation, comme l'exige la méthode.

Conclure. La droite de Mayer est $y = 2x + 3$.

Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. x compte les années écoulées depuis 2022 ; il ne représente pas directement l'année.

Construire la réponse.

1. Le rang de 2026 est $x = 2026 - 2022 = 4$.
2. On remplace ce rang : $\hat{y} = 6 \times 4 + 50 = 24 + 50 = 74$.

Vérifier. Au rang zéro, la formule donne 50 pour 2022. Quatre hausses annuelles de 6 ajoutent 24, ce qui retrouve 74. L'intervalle observé n'étant pas précisé ici, on ne peut pas classer cette prévision en interpolation ou extrapolation.

Conclure. Le modèle prévoit 74 pour 2026.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On vérifie le modèle proposé sur chacune des quatre observations avant de l'utiliser.

Construire la réponse.

1. À x égal à 0, $x^2 + 1 = 1$; à x égal à 1, la valeur est 2.
2. À x égal à 2, $2^2 + 1 = 5$; à x égal à 3, $3^2 + 1 = 10$. Les quatre données sont retrouvées.
3. À x égal à 4, la prévision est $4^2 + 1 = 16 + 1 = 17$.

Vérifier. Les différences observées sont 1, 3 et 5 : elles augmentent, ce qui est cohérent avec une courbure quadratique et non avec une droite exacte. Cela ne démontre pas à lui seul la règle au-delà de 3.

Conclure. Le modèle correspond aux quatre points et prévoit 17 à x égal à 4, sous réserve de sa validité hors des observations.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Il faut annuler le logarithme de toute l'expression puis retrouver la forme exponentielle.

Construire la réponse.

1. On applique la puissance de 10 : $y = 10^{0,3x+1}$.
2. On sépare la somme dans l'exposant en un produit : $10^{0,3x+1} = 10^1 \times 10^{0,3x}$.
3. On écrit $10^{0,3x} = (10^{0,3})^x$. Ainsi $y = 10(10^{0,3})^x$.

Vérifier. Au rang zéro, y vaut 10 et son logarithme vaut 1. Si x augmente d'une unité, le logarithme augmente de 0,3 et y est multiplié par $10^{0,3}$, comme annoncé.

Conclure. Le modèle exact est $y = 10(10^{0,3})^x$, avec $A = 10$ et $q = 10^{0,3}$.

Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Le quatrième point s'écarte d'une tendance visible ; cela justifie une enquête sur la donnée, pas sa suppression automatique.

Construire la réponse.

1. Les points de rangs 1, 2, 3 et 5 suivent $y = 2x + 10$: les images sont 12, 14, 16 et 20.
2. À x égal à 4, cette tendance donnerait 18, alors que l'observation vaut 50. L'écart est $50 - 18 = 32$.
3. On vérifie la saisie, l'unité, l'appareil et les circonstances de mesure. Une erreur documentée pourrait justifier une correction.
4. Si la mesure est valide, elle doit être conservée et expliquée : elle peut révéler un événement particulier ou une limite du modèle.

Vérifier. Supprimer le point seulement parce qu'il gêne l'alignement sélectionnerait les données en fonction du résultat souhaité et pourrait masquer un phénomène réel.

Conclure. Le point (4;50) est atypique, mais on ne le supprime pas sans justification liée aux données.

Corrigé 12

 Démonstration / Solution expliquée

Comprendre la question. On compare les deux modèles avec le même critère sur les mêmes trois observations.

Construire la réponse.

1. A prévoit 0, 2, 4. Les résidus sont $1 - 0 = 1$, $2 - 2 = 0$, $5 - 4 = 1$. Leur somme des carrés vaut $1^2 + 0^2 + 1^2 = 2$.
2. B prévoit 1, 3, 5. Les résidus sont $1 - 1 = 0$, $2 - 3 = -1$, $5 - 5 = 0$. Leur somme des carrés vaut $0^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1$.
3. Comme $1 < 2$, B a la plus faible erreur quadratique parmi ces deux modèles sur cette série.

Vérifier. Le carré de -1 vaut 1, pas -1. B n'est pas pour autant déclaré meilleur que toute droite possible, ni garanti pour des prévisions hors des observations.

Conclure. Selon la somme des carrés des résidus, B ajuste mieux ces données que A.

Corrigé 13

 Démonstration / Solution expliquée

Comprendre la question. Le résultat représente une proportion exprimée en pourcentage ; il doit être compris entre 0 et 100.

Construire la réponse.

1. La condition $110 - 5x \geq 0$ donne $-5x \geq -110$, puis $x \leq 22$ après division par -5 et inversion du sens.
2. La condition $110 - 5x \leq 100$ donne $-5x \leq -10$, puis $x \geq 2$.
3. Il faut satisfaire les deux conditions : $2 \leq x \leq 22$.

Vérifier. À x égal à 2, le modèle donne 100 ; à x égal à 22, il donne 0. Avant 2, il dépasse 100, et après 22 il devient négatif. Même dans l'intervalle admissible, la validité statistique dépend des observations ayant servi à l'ajustement.

Conclure. On ne peut pas utiliser ce modèle pour toute valeur positive de x ; son interprétation comme proportion impose au moins $x \in [2; 22]$.

Corrigé 14

 Démonstration / Solution expliquée

Comprendre la question. On traduit les signes des résidus en position de la droite par rapport aux observations.

Construire la réponse.

1. Au début et à la fin, un résidu positif signifie $y > \hat{y}$: la droite passe sous les observations.
2. Au milieu, un résidu négatif signifie $y < \hat{y}$: la droite passe au-dessus.
3. Cette organisation en forme de creux suggère une courbure que la droite ne reproduit pas.
4. On examine alors une famille non linéaire justifiée par le phénomène et l'on compare ses résidus sur les mêmes données.

Vérifier. Une structure visible ne désigne pas automatiquement une fonction précise. Plusieurs modèles peuvent être courbés ; le contexte et les données doivent permettre de les départager.

Conclure. Les résidus suggèrent que l'ajustement affine est inadapté et qu'un modèle non linéaire mérite d'être étudié.

Corrigé 15 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La transformation doit être définie pour chacune des observations.

Construire la réponse.

1. Le logarithme réel est défini uniquement lorsque son argument est strictement positif.
2. Pour y égal à zéro ou à -2 , $\log(y)$ n'existe donc pas dans les réels.
3. Supprimer ces points ou ajouter arbitrairement une constante à toutes les valeurs changerait l'étude. Une autre transformation doit être justifiée par la signification des données.

Vérifier. La condition n'est pas seulement « y différent de zéro » : les nombres négatifs sont également exclus. Une méthode fondée sur $\log(y)$ ne peut pas être appliquée directement à cette série complète.

Conclure. Non : il faut une méthode adaptée ou une transformation justifiée, sans modifier arbitrairement les observations.

9 Corrigé du problème

1. **Comprendre la question.** Des écarts constants suggèrent un modèle affine ; des rapports constants suggèrent un modèle exponentiel.

Construire la réponse.

- (a) Les différences successives valent $20-10=10$, $40-20=20$ et $80-40=40$. Elles ne sont pas constantes.
- (b) Les rapports valent $20/10 = 2$, $40/20 = 2$ et $80/40 = 2$.

Vérifier. Les abscisses sont régulièrement espacées d'une unité, ce qui permet cette comparaison directe des évolutions.

Conclure. Les données indiquent un doublement à chaque unité de temps, compatible avec un modèle exponentiel.

2. **Comprendre la question.** La valeur au temps zéro fixe le coefficient initial et le doublement fixe la base.

Construire la réponse.

- (a) On propose $y = 10 \times 2^x$.
- (b) Aux temps 0, 1, 2 et 3, les puissances valent 1, 2, 4 et 8 : les valeurs sont bien 10, 20, 40 et 80.
- (c) Comme les ordonnées sont positives, on peut aussi écrire $\log y = \log 10 + x \log 2$: les données transformées sont alignées.

Vérifier. Le modèle retrouve tous les points, mais cette concordance ne prouve pas que la même loi restera vraie après le dernier temps observé.

Conclure. Le modèle exponentiel proposé est $y = 10 \times 2^x$.

3. **Comprendre la question.** La droite relie les deux extrémités, mais il faut tester sa concordance avec les points intermédiaires.

Construire la réponse.

- (a) La pente est $(80 - 10)/(3 - 0) = 70/3$.
- (b) Le point d'abscisse zéro fixe l'ordonnée à l'origine à 10, donc $y = (70/3)x + 10$.
- (c) En x égal à 1, la droite prédit $70/3 + 10 = 100/3$ au lieu de 20.
- (d) La prévision dépasse l'observation de $100/3 - 20 = 40/3$.

Vérifier. Passer exactement par les points extrêmes ne garantit pas de passer par les autres observations.

Conclure. Le modèle affine reproduit les extrémités mais surestime sensiblement l'observation en x égal à 1.

4. **Comprendre la question.** On évalue les deux modèles au même temps situé au-delà des données.

Construire la réponse.

- (a) L'exponentielle donne $10 \times 2^4 = 160$.
- (b) La droite donne $(70/3) \times 4 + 10 = 310/3$.

Vérifier. L'exponentielle conserve un rapport constant et la droite un accroissement constant ; leurs extrapolations doivent donc diverger.

Conclure. Les prévisions en 4 sont 160 pour l'exponentielle et $310/3$ pour la droite.

5. **Comprendre la question.** La qualité d'un modèle se juge sur les observations et sur son usage prévu.

Construire la réponse.

- (a) On calcule les résidus observation moins prévision pour chaque point, puis on regarde leur taille et leur organisation.

- (b) Des écarts systématiques, comme une courbure ignorée par une droite, peuvent indiquer un modèle inadapté.
- (c) On examine aussi si le mécanisme supposé est plausible : une quantité ne double pas forcément indéfiniment.
- (d) Le temps 4 est hors de la plage observée $[0;3]$: il faut confronter la prévision à de nouvelles mesures.

Vérifier. Un ajustement exact sur quatre données n'apporte pas de garantie universelle sur toutes les données futures.

Conclure. L'exponentielle décrit mieux ces observations ; son extrapolation reste une hypothèse à vérifier.

10 Variante autonome et bilan

Les valeurs 12, 18, 27 sont observées aux rangs 0, 1, 2. Propose un modèle et une prévision au rang 3.

À toi d'essayer : Vérifie ta démarche

Résous la variante, puis explique pourquoi ta méthode s'applique.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 26](#) [Explication, p. 27](#)

- Je peux expliquer : représenter deux variables par un nuage.
- Je peux expliquer : construire un ajustement affine.
- Je peux expliquer : interpolation et extrapolation.
- Je peux expliquer : reconnaître un modèle non linéaire.
- Je peux expliquer : linéariser un modèle exponentiel.

11 Fiche-mémoire

Représenter deux variables par un nuage.

1. Identifie les deux variables et garde chaque paire de mesures associée.
2. Place x horizontalement et y verticalement, avec des axes nommés et gradués.
3. Décris la tendance, la courbure, les groupes et les points atypiques.
4. Compare des taux de variation si tu recherches un alignement exact.
5. Vérifie les données atypiques sans les supprimer uniquement pour améliorer l'apparence.

Construire un ajustement affine.

1. Observe le nuage et précise la méthode d'ajustement utilisée.
2. Calcule ou relève les coefficients a et b avec une précision suffisante.
3. Calcule les prévisions $\hat{y}_i$, puis les résidus $y_i - \hat{y}_i$.
4. Compare les carrés des résidus et leur organisation, pas seulement leur somme signée.
5. Présente les valeurs obtenues comme des prévisions dépendant du modèle.

Interpolation et extrapolation.

1. Relève l'intervalle observé, le codage de x et les unités.
2. Convertis la demande en abscisse et distingue interpolation et extrapolation.
3. Calcule une image ou résous l'équation correspondant à l'objectif.
4. Reconvertis le résultat en date ou en quantité et arrondis avec une précision justifiée.
5. Contrôle les limites physiques et indique la dépendance au modèle.

Reconnaître un modèle non linéaire.

1. Vérifie l'espacement des abscisses et observe la forme générale du nuage.
2. Calcule différences et, pour des valeurs non nulles adaptées au modèle, rapports successifs.
3. Propose une famille cohérente avec ces observations et le contexte.
4. Teste la formule sur tous les points puis examine les résidus.
5. Présente les valeurs futures comme conditionnelles au maintien de la règle.

Linéariser un modèle exponentiel.

1. Vérifie que toutes les ordonnées sont strictement positives et précise la base du logarithme.
2. Calcule $z = \log(y)$ et ajuste z en fonction de x.
3. Pour $z = ax + b$, reconstruis $y = 10^b(10^a)^x$.
4. Conserve les puissances exactes jusqu'aux calculs finaux et interprète le facteur q.
5. Contrôle les prévisions et les erreurs dans l'échelle initiale de y.

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Chaque ligne correspond à un même individu ou à une même situation.

Indice 2 — Un pas de plus.

Séparer ou trier indépendamment les colonnes détruirait cette association.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Les écarts sont mesurés verticalement entre observation et prévision.

Indice 2 — Un pas de plus.

On les élève au carré pour éviter les compensations entre signes.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Compare l'abscisse demandée avec les bornes des données disponibles.

Indice 2 — Un pas de plus.

À l'extérieur, on prolonge la tendance au-delà des observations.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Une multiplication répétée par le même facteur conduit à une puissance.

Indice 2 — Un pas de plus.

Après n pas, le facteur cumulé est $1,2^n$.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve**Indice 1 — Une piste.**

Applique la puissance de 10 à toute l'expression $2 + 0,2x$.

Indice 2 — Un pas de plus.

Sépare la somme de l'exposant en un produit de puissances.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche**Indice 1 — Une piste.**

Repère les données utiles et l'inconnue. Reviens à la méthode correspondante dans la boîte à outils.

Indice 2 — Un pas de plus.

Contrôle les unités, les bornes et la plausibilité du résultat avant de lire la correction.

[Revenir à la recherche, p. 24](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Un nuage conserve les couples d'observations associés ; il ne se réduit pas aux moyennes des deux colonnes.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Les moindres carrés minimisent la somme des carrés des résidus verticaux.

[Revenir à la recherche, p. 6](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Il s'agit d'une extrapolation, dont la validité dépend de la poursuite du modèle hors de la zone observée.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Ces données suggèrent un modèle exponentiel de la forme $A \times 1,2^x$ pour des pas unitaires en x .

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

$$y = 10^{2+0,2x} = 100(10^{0,2})^x.$$

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche

Comprendre la question. Les trois observations sont positives et données à des rangs consécutifs.

Construire la réponse.

1. Les rapports sont $18/12 = 1,5$ et $27/18 = 1,5$, tandis que les différences 6 et 9 ne sont pas constantes.
2. Le modèle proposé est donc $y = 12 \times 1,5^x$, qui redonne 12 au rang zéro.
3. Au rang 3, il prévoit $12 \times 1,5^3 = 12 \times 3,375 = 40,5$.

Vérifier. On peut également prolonger une fois la dernière valeur : $27 \times 1,5 = 40,5$.

Conclure. La prévision est 40,5 au rang 3 ; c'est une extrapolation à contrôler par une nouvelle observation.

[Revenir à la recherche, p. 24](#)