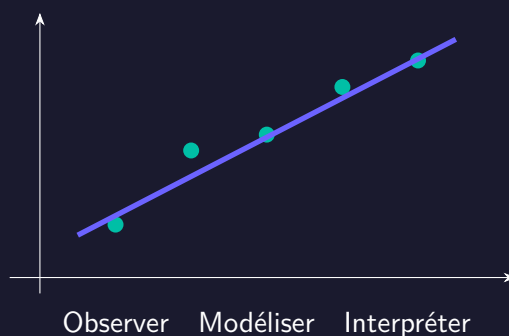


Arbres, probabilités totales et indépendance

Probabilités ■ Comprendre et s'entraîner



Terminale STMG et STI2D — commun
Année scolaire 2026–2027

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	Pourquoi ce chapitre ?	3
2	L'idée avant la formule	3
3	Le cours formel	3
3.1	Changer de population avec une probabilité conditionnelle	3
3.2	Construire et lire un arbre pondéré	4
3.3	Rassembler des cas avec les probabilités totales	5
3.4	Reconnaître l'indépendance	7
3.5	Retrouver une origine après observation	8
4	Boîte à outils	9
5	Exercices progressifs	11
6	Problème — Pour aller plus loin	13
7	Indices des exercices	14
8	Corrigés détaillés	16
9	Corrigé du problème	21
10	Variante autonome et bilan	22
11	Fiche-mémoire	22
12	Indices des pauses et des preuves	23
13	Explications des pauses et des preuves	25

1 Pourquoi ce chapitre ?

Un résultat global peut venir de groupes différents. Un arbre permet de suivre les chemins, puis de retrouver l'origine probable d'un résultat observé. **Ton parcours.** Enseignement commun de mathématiques pour les séries STMG et STI2D. Les situations de gestion et les situations techniques mobilisent ici les mêmes notions du programme.

- Changer de population avec une probabilité conditionnelle.
- Construire et lire un arbre pondéré.
- Rassembler des cas avec les probabilités totales.
- Reconnaître l'indépendance.
- Retrouver une origine après observation.

2 L'idée avant la formule

Imagine des situations classées par groupe puis par résultat. Multiplier calcule un chemin ; additionner rassemble les chemins disjoints qui aboutissent au même événement.

3 Le cours formel

3.1 Changer de population avec une probabilité conditionnelle

Intuition | Construire la notion pas à pas

Comprendre le mot « sachant ». Une information connue réduit la population de référence. Pour la probabilité de B sachant A, on ne regarde plus toutes les issues : on se place seulement parmi celles où A est réalisé.

Construire le quotient. Dans ce groupe A, les issues qui satisfont aussi B sont celles de l'intersection $A \cap B$. Leur part vaut $P_A(B) = P(A \cap B)/P(A)$, à condition que $P(A) > 0$. Avec des effectifs, on divise l'effectif des deux propriétés par l'effectif de A.

Revenir à la population entière. Multiplier la proportion de A par la proportion de B parmi A donne la proportion de A et B dans l'ensemble : $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$. Ce produit correspond à un chemin d'arbre.

Ne pas inverser la condition. $P_A(B)$ et $P_B(A)$ ont le même numérateur, mais des dénominateurs différents. « Parmi les abonnés, qui achète ? » et « Parmi les acheteurs, qui est abonné ? » sont donc deux questions distinctes.

Définition | Comprendre la notion

Pour $P(A) > 0$, la probabilité de B sachant A est

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

On restreint l'univers aux issues où A est réalisé. Dans un tableau d'effectifs, on divise l'effectif de l'intersection par celui de A. La formule donne aussi $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$. Attention : $P_A(B)$ et $P_B(A)$ ne sont généralement pas égales. Lis la condition après « sachant » ou « parmi » ; elle fournit le dénominateur.

💡 Exemple | Exemple commenté

Sur 100 produits, 40 proviennent de la machine A. Parmi ces 40, huit sont défectueux D. La probabilité d'un défaut sachant A est $P_A(D) = 8/40 = 0,20$. La probabilité de venir de A et d'être défectueux dans tout le lot est $P(A \cap D) = 8/100 = 0,08$.

Supposons maintenant qu'il existe dix produits défectueux au total. Parmi ces dix, huit proviennent de A, donc $P_D(A) = 8/10 = 0,80$. Les valeurs 0,20 et 0,80 ne se contredisent pas : elles répondent à des questions portant sur deux populations de référence différentes.

Le contrôle $P(A)P_A(D) = 0,40 \times 0,20 = 0,08$ retrouve la part commune dans le lot complet.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

« B sachant A » ne signifie pas « A sachant B ». Souligne la condition dans la phrase avant d'écrire le dénominateur ; cela évite l'inversion la plus fréquente.

À toi d'essayer : Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

$P(A) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,1$. Alors $P_A(B) =$

1. 0,05
2. 0,2
3. 0,6

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.2 Construire et lire un arbre pondéré

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Lire l'arbre comme une succession d'informations. Le premier niveau décrit une première séparation de la population. Le niveau suivant décrit ce qui arrive dans chacun des groupes déjà atteints. Une branche du deuxième niveau se lit donc avec une condition.

Pourquoi multiplier sur un chemin. Si A représente 60 pour cent de la population et que B concerne 20 pour cent des A, la part totale qui est à la fois A et B vaut 20 pour cent de 60 pour cent, soit $0,6 \times 0,2 = 0,12$.

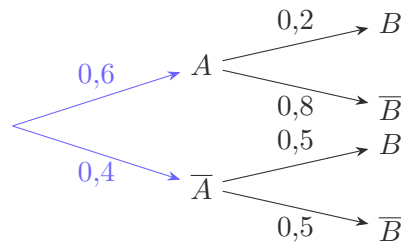
Pourquoi additionner plusieurs chemins. Deux chemins complets distincts décrivent des situations incompatibles. Pour un événement qui peut se produire par plusieurs de ces chemins, on additionne leurs probabilités. On multiplie donc le long d'un chemin et on additionne entre chemins disjoints.

Compléter chaque nœud séparément. Les branches qui partent d'un même nœud couvrent toutes les possibilités dans ce groupe : leur somme vaut 1. Les probabilités issues de nœuds différents n'ont pas à totaliser 1 entre elles et ne sont pas automatiquement identiques.

📖 Définition | Comprendre la notion

Un arbre décrit des choix ou des informations successives. Les probabilités issues d'un même nœud totalisent 1. Au deuxième niveau, les probabilités sont conditionnelles au chemin déjà suivi. Pour

la probabilité d'un chemin complet, multiplie les probabilités de ses branches. Pour réunir plusieurs chemins disjoints, additionne leurs probabilités. L'arbre doit couvrir toutes les possibilités. Écris clairement les événements et leurs contraires ; ne recopie pas automatiquement les mêmes probabilités au second niveau si les étapes ne sont pas indépendantes.



💡 Exemple | Exemple commenté

On connaît $P(A) = 0,6$, $P_A(B) = 0,2$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,5$. Les compléments sont $P(\bar{A}) = 0,4$, $P_A(\bar{B}) = 0,8$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,5$.

Les quatre chemins valent respectivement $0,6 \times 0,2 = 0,12$, $0,6 \times 0,8 = 0,48$, $0,4 \times 0,5 = 0,20$ et $0,4 \times 0,5 = 0,20$. Leur somme vaut 1.

Pour B, on réunit les chemins A puis B et non-A puis B : $P(B) = 0,12 + 0,20 = 0,32$. La valeur 0,2 de la branche issue de A ne représente donc pas la probabilité globale de B ; elle décrit B seulement parmi A.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Une branche de deuxième niveau est conditionnelle. Ne la recopie pas dans l'autre groupe sans information d'indépendance : les compositions des groupes peuvent être différentes.

À toi d'essayer : Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Le long d'un chemin d'arbre, les probabilités se...

1. Additionnent systématiquement
2. Soustraient
3. Multiplient

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.3 Rassembler des cas avec les probabilités totales

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Rassembler des origines différentes. Un résultat B peut provenir de plusieurs groupes. Si A et non-A partagent tout l'univers, B est la réunion de « A et B » et de « non-A et B ». Ces deux cas sont incompatibles, donc on additionne leurs probabilités.

Pondérer chaque taux par la taille de son groupe. Dans le premier groupe, la contribution est $P(A)P_A(B)$; dans le second, $P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$. Additionner seulement les taux conditionnels oublierait combien chaque groupe pèse dans l'ensemble.

Comprendre la moyenne pondérée. Le taux global doit se situer entre les taux des groupes. Si l'un des groupes est majoritaire, son taux influence davantage le résultat. La moyenne simple des deux taux convient seulement lorsque les deux groupes ont le même poids.

Étendre ou inverser le calcul. Avec trois fournisseurs, on ajoute trois contributions, à condition que les groupes soient disjoints et couvrent toute la production. Si un taux est inconnu mais le taux global connu, la même formule devient une équation permettant de retrouver cette inconnue.

Définition | Comprendre la notion

Si A et son contraire partagent l'univers, B peut survenir par deux chemins disjoints :

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B).$$

Cette formule est une moyenne pondérée des probabilités dans les deux groupes. La moyenne simple n'est valable que si les groupes ont le même poids. La formule s'étend à trois groupes ou davantage, à condition qu'ils soient disjoints et couvrent tout l'univers. Chaque terme associe la proportion d'un groupe à la probabilité de B dans ce groupe.

Exemple | Exemple commenté

Une usine confie 70 pour cent de la production à une machine dont le taux de défaut est 2 pour cent, et 30 pour cent à une autre dont le taux est 5 pour cent. Le taux global vaut $0,7 \times 0,02 + 0,3 \times 0,05 = 0,014 + 0,015 = 0,029$.

Sur une population de référence de 1 000 pièces suivant exactement ces proportions, cela correspondrait à 700 pièces avec 14 défauts et 300 pièces avec 15 défauts : 29 défauts sur 1 000, soit 2,9 pour cent.

La moyenne simple 3,5 pour cent donnerait à tort le même poids aux deux machines. Le résultat 2,9 pour cent est plus proche de 2 pour cent, ce qui est cohérent avec le poids plus élevé du premier groupe.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Un taux global n'est pas la somme ni, en général, la demi-somme des taux locaux. Chaque taux doit être multiplié par la part du groupe auquel il s'applique.

À toi d'essayer : Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Avec deux groupes de poids différents, le taux global est. . .

1. Toujours leur demi-somme
2. Une moyenne pondérée des taux
3. Le taux du plus grand groupe

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.4 Reconnaître l'indépendance

Intuition | Construire la notion pas à pas

Interpréter l'absence d'effet d'une information. A et B sont indépendants si apprendre que A est réalisé ne change pas la probabilité de B. Lorsque $P(A) > 0$, cela s'écrit $P_A(B) = P(B)$.

Utiliser un critère sans quotient. La définition générale est $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Pour tester l'indépendance, on calcule le produit et on le compare à l'intersection connue. On ne commence pas par supposer cette égalité pour calculer l'intersection si l'indépendance est justement à établir.

Ne pas confondre succession et indépendance. Deux expériences faites l'une après l'autre ne sont pas automatiquement indépendantes. Un tirage sans remise modifie le contenu disponible au second tirage ; la connaissance du premier résultat peut donc modifier la probabilité du second.

Distinguer indépendance et incompatibilité. Des événements incompatibles ne se réalisent jamais ensemble. S'ils ont chacun une probabilité positive, savoir que l'un est arrivé rend l'autre impossible : l'information change sa probabilité. Ils ne sont donc pas indépendants.

Définition | Comprendre la notion

Deux événements A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Si $P(A) > 0$, cela équivaut à $P_A(B) = P(B)$: apprendre A ne change pas la probabilité de B. L'indépendance est symétrique. Elle peut être une hypothèse de modélisation ou une propriété à vérifier ; elle ne se déduit pas du simple fait que deux étapes sont successives. Des événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont pas indépendants : leur intersection a une probabilité nulle alors que leur produit est positif. L'indépendance permet de multiplier des probabilités non conditionnelles.

Exemple | Exemple commenté

On connaît $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,3$ et $P(A \cap B) = 0,12$. Le produit des probabilités simples vaut $0,4 \times 0,3 = 0,12$. Il est égal à la probabilité de l'intersection : A et B sont indépendants.

Le contrôle conditionnel donne $P_A(B) = 0,12/0,4 = 0,3 = P(B)$. Dans l'autre sens, $P_B(A) = 0,12/0,3 = 0,4 = P(A)$. L'indépendance est donc symétrique.

Si l'intersection avait valu 0,10, le produit serait resté 0,12 mais l'égalité aurait échoué. Un résultat proche ne constitue pas une égalité exacte ; pour des données empiriques arrondies, on doit préciser la portée approximative de la comparaison.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Multiplier $P(A)$ par $P(B)$ pour calculer l'intersection suppose l'indépendance. Pour la prouver, il faut une information indépendante sur l'intersection ou sur une probabilité conditionnelle.

À toi d'essayer : Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Pour des événements indépendants, $P(A \cap B)$ vaut...

1. $P(A)P(B)$
2. $P(A) + P(B)$
3. 0 nécessairement

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 23](#) [Explication, p. 25](#)

3.5 Retrouver une origine après observation

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Reconnaître le sens de la question. Un arbre décrit souvent un résultat à partir d'une origine : le taux de défaut de chaque machine, par exemple. Après avoir observé un défaut, on peut vouloir retrouver son origine. Ce changement de sens impose de changer la population de référence.

Identifier le nouveau dénominateur. Pour la probabilité de A sachant B, on se place parmi tous les B. La part qui vient aussi de A est donc $P_B(A) = P(A \cap B)/P(B)$, avec $P(B) > 0$. Le numérateur compte la bonne origine et le résultat ; le dénominateur compte toutes les origines donnant ce résultat.

Faire les calculs dans le bon ordre. On calcule d'abord le chemin A puis B, puis tous les chemins aboutissant à B. On les additionne pour obtenir le dénominateur. La division finale exprime ensuite la part de l'origine recherchée parmi les résultats observés.

Tenir compte de la fréquence initiale. Un petit groupe peut avoir un taux de défaut élevé sans fournir la majorité des défauts, car un grand groupe à faible taux peut en produire davantage. Les taux conditionnels et les tailles des groupes interviennent ensemble.

📖 Définition | Comprendre la notion

Un arbre donne souvent la probabilité d'un résultat selon son origine. Après avoir observé le résultat B, la question peut demander l'origine A :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Calcule d'abord l'intersection par le chemin A puis B ; calcule ensuite $P(B)$ avec tous les chemins qui donnent B. Cette démarche suffit, sans mémoriser une nouvelle formule. La fréquence initiale des origines compte beaucoup : même un résultat fréquent dans un petit groupe peut provenir surtout d'un groupe beaucoup plus grand.

 Exemple | Exemple commenté

A fournit 20 pour cent des pièces avec un taux de défaut de 10 pour cent ; le reste fournit 80 pour cent avec un taux de 2 pour cent. Les contributions aux défauts sont $0,2 \times 0,1 = 0,02$ et $0,8 \times 0,02 = 0,016$.

Le taux global vaut 0,036. Parmi les défauts, la proportion provenant de A est donc $0,02/0,036 = 5/9 \approx 0,556$, soit environ 55,6 pour cent.

Une population de référence de 1 000 pièces aide à lire ce résultat : 200 viendraient de A avec 20 défauts, et 800 de l'autre groupe avec 16 défauts. Parmi les 36 défauts, 20 viendraient de A. Le quotient $20/36$ retrouve le calcul et distingue clairement 10 pour cent de défauts chez A de 55,6 pour cent de A parmi les défauts.

 Attention | Comprendre une erreur fréquente

Un détecteur qui signale 90 pour cent des défauts ne rend pas automatiquement 90 pour cent de ses alertes vraies. La seconde question dépend aussi de la rareté des défauts et des fausses alertes.

À toi d'essayer : Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Pour calculer $P(A \text{ sachant } B)$, le dénominateur est...

1. $P(A \cap B)$
2. $P(A)$
3. $P(B)$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 25](#)

4 Boîte à outils

 Méthode | Changer de population avec une probabilité conditionnelle

1. Repère le groupe qui suit « sachant » ou « parmi » : il fournit le dénominateur.
2. Identifie l'intersection entre ce groupe et la propriété recherchée.
3. Divise la probabilité ou l'effectif de l'intersection par celui du groupe connu.
4. Pour retrouver une intersection, multiplie la part du groupe par la probabilité conditionnelle.
5. Contrôle le sens de la condition en reformulant la réponse avec une phrase.

 Méthode | Construire et lire un arbre pondéré

1. Nomme les événements et construis tous les chemins possibles.
2. Écris les probabilités conditionnelles au bon nœud.
3. Complète les branches d'un même nœud pour obtenir une somme de 1.
4. Multiplie les branches d'un chemin complet pour obtenir son intersection.
5. Additionne les chemins disjoints utiles et vérifie que tous les chemins totalisent 1.

 Méthode | Rassembler des cas avec les probabilités totales

1. Découpe l'univers en groupes disjoints qui couvrent tous les cas.
2. Note la proportion de chaque groupe et le taux de l'événement dans ce groupe.
3. Multiplie ces deux quantités pour obtenir chaque contribution à l'univers.
4. Additionne les contributions ; si un taux est inconnu, résous l'équation correspondante.
5. Contrôle que les poids totalisent 1 et que le taux global est entre les taux des groupes.

 Méthode | Reconnaître l'indépendance

1. Distingue une indépendance donnée comme hypothèse d'une indépendance à vérifier.
2. Calcule $P(A)P(B)$ et compare avec $P(A \cap B)$.
3. Ou, lorsque la condition a une probabilité positive, compare $P_A(B)$ à $P(B)$.
4. Conserve les valeurs exactes pour ne pas transformer un arrondi en preuve.
5. Explique la conclusion en termes d'effet de l'information, sans confondre avec l'incompatibilité.

 Méthode | Retrouver une origine après observation

1. Reformule la question « parmi les B, quelle part est A ? ».
2. Calcule $P(A \cap B)$ par le chemin correspondant.
3. Calcule $P(B)$ en additionnant tous les chemins qui aboutissent à B.
4. Divise l'intersection par la probabilité du résultat observé.
5. Contrôle le sens avec un tableau ou une population de référence et arrondis à la fin.

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases ; 6 à 10 demandent plusieurs étapes ; 11 à 15 t'invitent à choisir, justifier et contrôler. Cherche avant de consulter les indices.

Exercice 1 — Parmi un sous-groupe ★☆☆

Parmi 60 adhérents, 15 pratiquent la natation. Calcule la probabilité de pratiquer la natation sachant que la personne choisie est adhérente.

Exercice 2 — Compléter un nœud ★☆☆

Une branche issue d'un nœud a pour probabilité 0,35. Il n'y a que deux branches. Quelle est l'autre ?

Exercice 3 — Deux groupes ★☆☆

$P(A) = 0,6$, $P_A(B) = 0,1$, $P_{\bar{A}}(B) = 0,4$. Calcule $P(B)$.

Exercice 4 — Vérifier un produit ★☆☆

$P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,5$, $P(A \cap B) = 0,1$. Sont-ils indépendants ?

Exercice 5 — Une inversion simple ★☆☆

$P(A \cap B) = 0,12$ et $P(B) = 0,3$. Calcule $P_B(A)$.

Exercice 6 — Retrouver une intersection ★★☆☆

$P(A) = 0,3$ et $P_A(B) = 0,4$. Calcule $P(A \cap B)$.

Exercice 7 — La probabilité d'un chemin ★★☆☆

$P(A) = 0,7$ et $P_A(B) = 0,3$. Calcule le chemin A puis non-B.

Exercice 8 — Trois provenances ★★☆☆

Trois fournisseurs représentent 50 %, 30 %, 20 % des produits, avec des taux de défaut 1 %, 2 %, 4 %. Calcule le taux global.

Exercice 9 — Une influence visible ★★☆☆

$P(B) = 0,6$ et $P_A(B) = 0,8$, avec $P(A) > 0$. Peut-on conclure à l'indépendance ?

Exercice 10 — Deux machines ★★☆☆

A produit 60 % des pièces avec 5 % de défauts ; B le reste avec 10 % de défauts. Une pièce est défectueuse. Quelle probabilité vient-elle de A ?

Exercice 11 — Deux sens différents ★★☆☆

Sur 100 personnes, 40 ont A, 30 ont B et 12 ont les deux. Calcule $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

Exercice 12 — Vérifier tout l'arbre ★★☆☆

$P(A) = 0,4$, $P_A(B) = 0,25$, $P_{\bar{A}}(B) = 0,5$. Calcule les quatre chemins et vérifie leur somme.

Exercice 13 — Retrouver un taux inconnu ★★ ★

Un groupe A représente 40 % d'une population et a un taux de réussite de 80 %. Le taux global est 68 %. Quel est le taux dans le groupe non-A ?

Exercice 14 — Incompatibles ne veut pas dire indépendants ★★ ★

Au lancer d'un dé équilibré, $A = \ll \text{obtenir } 1 \gg$ et $B = \ll \text{obtenir } 2 \gg$. Sont-ils indépendants ?

Exercice 15 — Une alerte et une rareté ★★ ★

Un défaut concerne 1 % des pièces. Une alerte apparaît sur 90 % des pièces défectueuses et 5 % des autres. Parmi les alertes, quelle proportion correspond à un défaut ?

6 Problème — Pour aller plus loin

Interpréter un contrôle

Deux lignes produisent des pièces ; S désigne une pièce conforme. A désigne le premier groupe et S le succès. $P(A) = 0,4$, $P_A(S) = 0,9$ et $P_{\bar{A}}(S) = 0,7$.

1. Construis l'arbre complet, y compris les probabilités des contraires.
2. Calcule $P(A \cap S)$ et $P(\bar{A} \cap S)$.
3. Calcule $P(S)$ puis la probabilité d'échec.
4. Sachant le succès, calcule la probabilité de provenir de A.
5. A et S sont-ils indépendants ? Justifie.

7 Indices des exercices

Exercice 1

Indice 1. Le groupe donné par la condition est celui des adhérents.

Indice 2. Le dénominateur est 60.

Exercice 2

Indice 1. La somme au nœud vaut 1.

Indice 2. Prends le complément.

Exercice 3

Indice 1. B peut arriver sous A ou sous non-A.

Indice 2. Les deux chemins sont disjoints.

Exercice 4

Indice 1. Calcule le produit des probabilités marginales.

Indice 2. Compare-le à l'intersection donnée.

Exercice 5

Indice 1. Le dénominateur est l'événement observé B.

Indice 2. Applique la définition du conditionnement.

Exercice 6

Indice 1. Isole l'intersection dans la définition.

Indice 2. Multiplie la probabilité de la condition par la probabilité conditionnelle.

Exercice 7

Indice 1. Complète la branche sous A.

Indice 2. Le chemin demandé termine par non-B.

Exercice 8

Indice 1. Associe chaque fournisseur à son poids.

Indice 2. Additionne trois produits, pas les trois taux seuls.

Exercice 9

Indice 1. Compare la probabilité avant et après conditionnement.

Indice 2. L'égalité, pas la proximité, caractérise ici l'indépendance.

Exercice 10

Indice 1. Calcule d'abord tous les défauts.

Indice 2. Le taux de défaut de A n'est pas la probabilité demandée.

Exercice 11

Indice 1. Le dénominateur est la condition.

Indice 2. Écris une fraction distincte pour chaque sens.

Exercice 12

Indice 1. Il y a deux chemins sous chaque première branche.

Indice 2. Chaque probabilité complète est un produit.

Exercice 13

Indice 1. Écris les probabilités totales avec une inconnue.

Indice 2. Soustrais la contribution connue avant de diviser par le poids restant.

Exercice 14

Indice 1. On ne peut obtenir 1 et 2 sur le même lancer.

Indice 2. Compare intersection nulle et produit positif.

Exercice 15

Indice 1. Il existe deux façons d'obtenir une alerte.

Indice 2. La grande population sans défaut contribue aussi au dénominateur.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. L'information connue est l'adhésion ; le groupe de référence contient donc 60 personnes.

Construire la réponse.

1. Parmi les 60 adhérents, 15 pratiquent la natation.
2. La proportion cherchée est $15/60 = 1/4 = 0,25$.

Vérifier. Les 45 adhérents non nageurs représentent $45/60 = 0,75$; les deux parts du groupe adhérent totalisent 1.

Conclure. La probabilité de pratiquer la natation sachant que la personne est adhérente vaut 0,25.

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les deux branches annoncées couvrent toutes les possibilités à ce nœud.

Construire la réponse.

1. Si p est l'autre probabilité, on a $0,35 + p = 1$.
2. On soustrait 0,35 : $p = 0,65$.

Vérifier. $0,35 + 0,65 = 1$ et chacune des deux valeurs appartient à $[0; 1]$. La conclusion utilise bien le fait qu'il n'y a que deux branches exhaustives.

Conclure. L'autre branche porte la probabilité 0,65.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. B peut se produire dans A ou dans son contraire ; il faut additionner les deux chemins.

Construire la réponse.

1. $P(\overline{A}) = 1 - 0,6 = 0,4$.
2. La contribution du groupe A est $0,6 \times 0,1 = 0,06$.
3. Celle du groupe non-A est $0,4 \times 0,4 = 0,16$.
4. Le total vaut $P(B) = 0,06 + 0,16 = 0,22$.

Vérifier. Le taux global 0,22 est entre 0,1 et 0,4. Les poids 0,6 et 0,4 totalisent 1 ; tous les cas sont pris en compte.

Conclure. $P(B) = 0,22$.

Corrigé 4 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. L'indépendance est à tester avec les trois probabilités fournies.

Construire la réponse.

1. Le produit vaut $P(A)P(B) = 0,2 \times 0,5 = 0,1$.
2. La probabilité de l'intersection donnée vaut elle aussi 0,1.
3. L'égalité caractéristique est donc satisfaite.

Vérifier. $P_A(B) = 0,1/0,2 = 0,5 = P(B)$: savoir A ne change pas la probabilité de B.

Conclure. A et B sont indépendants.

Corrigé 5 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. B est connu ; il constitue donc le groupe de référence du quotient.

Construire la réponse.

1. La part commune à A et B vaut 0,12 et la part totale de B vaut 0,3.
2. On calcule $P_B(A) = P(A \cap B)/P(B) = 0,12/0,3 = 0,4$.

Vérifier. Le numérateur ne dépasse pas le dénominateur, donc le quotient reste dans $[0; 1]$. Le produit $0,3 \times 0,4 = 0,12$ retrouve l'intersection.

Conclure. Parmi les B, la probabilité de A vaut 0,4.

Corrigé 6 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On veut la part qui satisfait A et B dans la population entière, à partir d'une proportion à l'intérieur de A.

Construire la réponse.

1. Le groupe A représente 0,3 de l'univers.
2. À l'intérieur de ce groupe, B représente 0,4.
3. La part commune vaut donc $P(A \cap B) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$.

Vérifier. L'intersection ne peut pas être plus grande que A ; $0,12 \leq 0,3$. En divisant 0,12 par 0,3, on retrouve la probabilité conditionnelle 0,4.

Conclure. $P(A \cap B) = 0,12$, soit 12 pour cent de la population initiale.

Corrigé 7 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On veut A puis non-B ; il faut donc prendre le complément de B à l'intérieur du groupe A.

Construire la réponse.

1. $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0,3 = 0,7$.
2. La probabilité du chemin est $P(A \cap \overline{B}) = P(A)P_A(\overline{B})$.

3. On obtient $0,7 \times 0,7 = 0,49$.

Vérifier. Le chemin A puis B vaut $0,7 \times 0,3 = 0,21$. Les deux chemins issus de A totalisent $0,49 + 0,21 = 0,70 = P(A)$.

Conclure. La probabilité de A puis non-B est 0,49.

Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les trois fournisseurs contribuent selon leur part de production et leur propre taux de défaut.

Construire la réponse.

1. Les poids sont 0,5, 0,3 et 0,2 ; ils totalisent 1.
2. Leurs contributions aux défauts dans toute la production sont $0,5 \times 0,01 = 0,005$, $0,3 \times 0,02 = 0,006$ et $0,2 \times 0,04 = 0,008$.
3. On additionne : $0,005 + 0,006 + 0,008 = 0,019$.

Vérifier. Sur 1 000 produits aux proportions annoncées, les contributions correspondraient à 5, 6 et 8 défauts, soit 19 au total. Le taux 1,9 pour cent est entre 1 et 4 pour cent.

Conclure. Le taux global de défaut est 1,9 pour cent.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La probabilité conditionnelle et la probabilité globale de B sont directement comparables.

Construire la réponse.

1. Avant l'information A, la probabilité de B vaut 0,6.
2. Sachant A, elle vaut 0,8. Ces deux nombres ne sont pas égaux.
3. Comme $P(A) > 0$, l'égalité $P_A(B) = P(B)$ est une caractérisation applicable de l'indépendance ; elle échoue ici.

Vérifier. L'information A augmente la probabilité de B de 0,2, soit vingt points de pourcentage. Il existe donc une dépendance probabiliste dans les données fournies.

Conclure. A et B ne sont pas indépendants.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La pièce est déjà connue comme défectueuse ; on recherche son origine parmi tous les défauts.

Construire la réponse.

1. A fournit 60 pour cent de la production : $P(A \cap D) = 0,6 \times 0,05 = 0,03$.
2. L'autre origine fournit 40 pour cent : $P(B \cap D) = 0,4 \times 0,10 = 0,04$.
3. Le taux global de défaut est $P(D) = 0,03 + 0,04 = 0,07$.
4. La probabilité cherchée est $P_D(A) = 0,03/0,07 = 3/7 \approx 0,429$.

Vérifier. Sur une base de 1 000 pièces aux proportions annoncées, 30 défauts viennent de A et 40 de B. La part 30 sur 70 retrouve $3/7$.

Conclure. La probabilité que la pièce défectueuse vienne de A est $3/7$, soit environ 42,9 pour cent.

Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les deux questions utilisent la même intersection de 12 personnes, mais pas le même groupe de référence.

Construire la réponse.

1. Pour B sachant A, on se place parmi les 40 personnes A : $P_A(B) = 12/40 = 0,3$.
2. Pour A sachant B, on se place parmi les 30 personnes B : $P_B(A) = 12/30 = 0,4$.

Vérifier. Dans la population entière, la part commune est 0,12. On retrouve $0,4 \times 0,3 = 0,12$ en passant par A et $0,3 \times 0,4 = 0,12$ en passant par B.

Conclure. $P_A(B) = 0,3$ et $P_B(A) = 0,4$; l'inversion du conditionnement change le résultat.

Corrigé 12

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On complète l'arbre, puis on calcule chacune des quatre intersections.

Construire la réponse.

1. Le premier complément est $P(\bar{A}) = 0,6$. Dans A, le complément de 0,25 est 0,75 ; dans non-A, le complément de 0,5 est 0,5.
2. $P(A \cap B) = 0,4 \times 0,25 = 0,10$ et $P(A \cap \bar{B}) = 0,4 \times 0,75 = 0,30$.
3. $P(\bar{A} \cap B) = 0,6 \times 0,5 = 0,30$ et $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,6 \times 0,5 = 0,30$.
4. La somme vaut $0,10 + 0,30 + 0,30 + 0,30 = 1$.

Vérifier. Les deux chemins issus de A totalisent 0,4 ; ceux issus de non-A totalisent 0,6. Ces marges retrouvent les probabilités du premier niveau.

Conclure. Les quatre chemins valent 0,10, 0,30, 0,30 et 0,30 ; ils couvrent bien l'univers.

Corrigé 13

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On connaît le taux global et celui de A ; on cherche le taux p du groupe complémentaire.

Construire la réponse.

1. Le poids de non-A vaut $1 - 0,4 = 0,6$.
2. La formule totale donne $0,68 = 0,4 \times 0,8 + 0,6p = 0,32 + 0,6p$.
3. On soustrait $0,32 : 0,36 = 0,6p$. Puis on divise par 0,6 : $p = 0,6$.

Vérifier. Le résultat appartient à $[0; 1]$. La substitution donne $0,32 + 0,6 \times 0,6 = 0,32 + 0,36 = 0,68$, qui retrouve le taux global.

Conclure. Le taux de réussite dans le groupe non-A est 60 pour cent.

Corrigé 14

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Un même lancer ne peut pas donner simultanément 1 et 2 ; il faut distinguer cette incompatibilité de l'indépendance.

Construire la réponse.

1. Les événements A et B ont chacun la probabilité $1/6$.
2. Leur intersection est impossible, donc $P(A \cap B) = 0$.
3. Le produit vaut pourtant $(1/6)(1/6) = 1/36 > 0$. Les deux valeurs diffèrent.

Vérifier. Sachant que le dé a donné 1, la probabilité qu'il ait donné 2 est zéro, alors qu'elle était $1/6$ avant l'information.

Conclure. A et B sont incompatibles et ne sont pas indépendants.

Corrigé 15

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On recherche les vrais défauts parmi les alertes ; le taux de détection 90 pour cent ne répond pas directement à cette question.

Construire la réponse.

1. La probabilité d'un défaut accompagné d'une alerte est $0,01 \times 0,90 = 0,009$.
2. La probabilité d'une alerte sans défaut est $0,99 \times 0,05 = 0,0495$.
3. Toutes les alertes représentent donc $0,009 + 0,0495 = 0,0585$.
4. La proportion de défauts parmi les alertes vaut $0,009/0,0585 = 2/13 \approx 0,153846$.

Vérifier. Sur une base de 10 000 pièces, les proportions donnent 90 vraies alertes et 495 fausses, soit 585 alertes. Le quotient $90/585 = 2/13$ confirme le résultat. La grande taille du groupe sans défaut explique le nombre de fausses alertes.

Conclure. Environ 15,4 pour cent des alertes correspondent à un défaut dans ce modèle.

9 Corrigé du problème

1. **Comprendre la question.** L'arbre classe d'abord par groupe, puis par succès ou échec à l'intérieur de chaque groupe.

Construire la réponse.

- (a) La première bifurcation porte $P(A) = 0,4$ et $P(\bar{A}) = 1 - 0,4 = 0,6$.
- (b) Sous A, les probabilités sont 0,9 pour S et $1 - 0,9 = 0,1$ pour son contraire.
- (c) Sous $\bar{A}$, elles sont 0,7 pour S et $1 - 0,7 = 0,3$ pour son contraire.

Vérifier. À chaque nœud, les deux branches totalisent 1. Les probabilités du deuxième niveau sont conditionnelles : elles concernent le groupe déjà choisi.

Conclure. L'arbre complet possède quatre chemins, un pour chaque combinaison de groupe et de résultat.

2. **Comprendre la question.** Chaque intersection correspond à un chemin complet de l'arbre.

Construire la réponse.

- (a) Pour A puis S, on multiplie : $P(A \cap S) = P(A)P_A(S) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$.
- (b) Pour $\bar{A}$ puis S, $P(\bar{A} \cap S) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$.

Vérifier. Chaque intersection est au plus égale à la probabilité du groupe de départ. Les résultats concernent la population entière, pas seulement leur groupe.

Conclure. Les deux probabilités sont 0,36 et 0,42.

3. **Comprendre la question.** Un succès provient soit de A, soit de son contraire : ces deux possibilités sont incompatibles et couvrent tous les succès.

Construire la réponse.

- (a) Par addition des chemins, $P(S) = 0,36 + 0,42 = 0,78$.
- (b) Le succès et l'échec sont complémentaires, donc $P(\bar{S}) = 1 - 0,78 = 0,22$.

Vérifier. Le taux global 0,78 se situe entre les taux des deux groupes 0,9 et 0,7, comme une moyenne pondérée.

Conclure. La probabilité de succès est 0,78, celle d'échec 0,22.

4. **Comprendre la question.** L'information connue est maintenant le succès : on change de population de référence.

Construire la réponse.

- (a) Parmi tous les succès, la part venant de A est $P_S(A) = P(A \cap S)/P(S)$.
- (b) On remplace par $0,36/0,78 \approx 0,4615$.

Vérifier. Le dénominateur doit compter tous les succès. Diviser par P(A) redonnerait la probabilité du succès sachant A, une autre question.

Conclure. Sachant le succès, la probabilité de provenir de A est d'environ 46,15 %.

5. **Comprendre la question.** L'indépendance signifierait que connaître le groupe ne change pas la probabilité du succès.

Construire la réponse.

- (a) Le taux conditionnel dans A vaut $P_A(S) = 0,9$.
- (b) Le taux global vaut $P(S) = 0,78$. Ces valeurs sont différentes.

Vérifier. On peut aussi comparer $P(A \cap S) = 0,36$ à $P(A)P(S) = 0,312$: les résultats diffèrent.

Conclure. A et S ne sont pas indépendants. Cette dépendance statistique ne prouve pas, à elle seule, un lien de causalité.

10 Variante autonome et bilan

Deux groupes de même poids ont des taux de succès de 80 % et 60 %. Calcule le taux global et la probabilité du premier groupe sachant le succès.

À toi d'essayer : Vérifie ta démarche

Résous la variante, puis explique pourquoi ta méthode s'applique.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 24 Explication, p. 25

- Je peux expliquer : changer de population avec une probabilité conditionnelle.
- Je peux expliquer : construire et lire un arbre pondéré.
- Je peux expliquer : rassembler des cas avec les probabilités totales.
- Je peux expliquer : reconnaître l'indépendance.
- Je peux expliquer : retrouver une origine après observation.

11 Fiche-mémoire

Changer de population avec une probabilité conditionnelle.

1. Repère le groupe qui suit « sachant » ou « parmi » : il fournit le dénominateur.
2. Identifie l'intersection entre ce groupe et la propriété recherchée.
3. Divise la probabilité ou l'effectif de l'intersection par celui du groupe connu.
4. Pour retrouver une intersection, multiplie la part du groupe par la probabilité conditionnelle.
5. Contrôle le sens de la condition en reformulant la réponse avec une phrase.

Construire et lire un arbre pondéré.

1. Nomme les événements et construis tous les chemins possibles.
2. Écris les probabilités conditionnelles au bon nœud.
3. Complète les branches d'un même nœud pour obtenir une somme de 1.
4. Multiplie les branches d'un chemin complet pour obtenir son intersection.
5. Additionne les chemins disjoints utiles et vérifie que tous les chemins totalisent 1.

Rassembler des cas avec les probabilités totales.

1. Découpe l'univers en groupes disjoints qui couvrent tous les cas.
2. Note la proportion de chaque groupe et le taux de l'événement dans ce groupe.
3. Multiplie ces deux quantités pour obtenir chaque contribution à l'univers.
4. Additionne les contributions ; si un taux est inconnu, résous l'équation correspondante.
5. Contrôle que les poids totalisent 1 et que le taux global est entre les taux des groupes.

Reconnaître l'indépendance.

1. Distingue une indépendance donnée comme hypothèse d'une indépendance à vérifier.
2. Calcule $P(A)P(B)$ et compare avec $P(A \cap B)$.
3. Ou, lorsque la condition a une probabilité positive, compare $P_A(B)$ à $P(B)$.
4. Conserve les valeurs exactes pour ne pas transformer un arrondi en preuve.
5. Explique la conclusion en termes d'effet de l'information, sans confondre avec l'incompatibilité.

Retrouver une origine après observation.

1. Reformule la question « parmi les B, quelle part est A ? ».
2. Calcule $P(A \cap B)$ par le chemin correspondant.
3. Calcule $P(B)$ en additionnant tous les chemins qui aboutissent à B.
4. Divise l'intersection par la probabilité du résultat observé.
5. Contrôle le sens avec un tableau ou une population de référence et arrondis à la fin.

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Le dénominateur est la probabilité du groupe connu A.

Indice 2 — Un pas de plus.

Utilise $P_A(B) = P(A \cap B)/P(A)$.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Un chemin cumule des conditions successives.

Indice 2 — Un pas de plus.

Une proportion à l'intérieur d'un groupe multiplie la proportion de ce groupe.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Un groupe deux fois plus grand doit peser deux fois plus dans le total.

Indice 2 — Un pas de plus.

Les coefficients sont les probabilités d'appartenir à chaque groupe.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

La définition de l'indépendance porte sur la probabilité de l'intersection.

Indice 2 — Un pas de plus.

Elle permet de remplacer une probabilité conditionnelle par la probabilité globale.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve**Indice 1 — Une piste.**

La condition est l'information déjà connue.

Indice 2 — Un pas de plus.

Dans « A sachant B », on se place parmi les B.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche**Indice 1 — Une piste.**

Repère les données utiles et l'inconnue. Reviens à la méthode correspondante dans la boîte à outils.

Indice 2 — Un pas de plus.

Contrôle les unités, les bornes et la plausibilité du résultat avant de lire la correction.

[Revenir à la recherche, p. 22](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

$$P_A(B) = 0,1/0,5 = 0,2.$$

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

On multiplie les probabilités le long d'un chemin ; on additionne ensuite des chemins disjoints si l'événement en réunit plusieurs.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Le taux global est une moyenne pondérée des taux des groupes.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Pour A et B indépendants, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Le dénominateur est $P(B)$; le numérateur est $P(A \cap B)$.

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche

Comprendre la question. Les groupes sont de même poids, mais les succès ne se répartissent pas également entre eux.

Construire la réponse.

1. Notons A le premier groupe. On a $P(A) = P(\overline{A}) = 0,5$, $P_A(S) = 0,8$ et $P_{\overline{A}}(S) = 0,6$.
2. Les intersections valent $0,5 \times 0,8 = 0,4$ et $0,5 \times 0,6 = 0,3$.
3. Le taux global est $P(S) = 0,4 + 0,3 = 0,7$.
4. Sachant le succès, $P_S(A) = 0,4/0,7 = 4/7 \approx 0,5714$.

Vérifier. Sur 100 cas théoriques, on attend 40 succès dans le premier groupe et 30 dans le second : 40 des 70 succès viennent donc du premier.

Conclure. Le taux global de succès est 70 % ; parmi les succès, environ 57,14 % proviennent du premier groupe.

[Revenir à la recherche, p. 22](#)