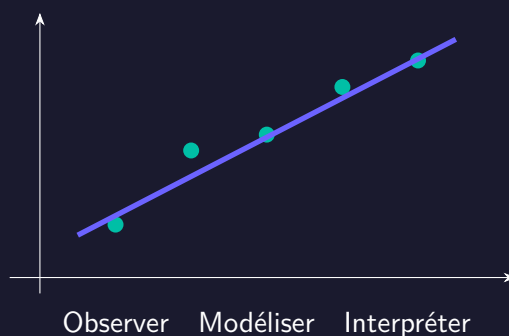


Loi binomiale et échantillonnage

Probabilités ■ Comprendre et s'entraîner



Terminale STMG et STI2D — commun
Année scolaire 2026–2027

 Cours

 15 exercices

 Problème guidé

 Corrigés

Table des matières

1	Pourquoi ce chapitre ?	3
2	L'idée avant la formule	3
3	Le cours formel	3
3.1	Reconnaître une loi binomiale	3
3.2	Calculer une probabilité binomiale	4
3.3	Au plus, au moins et entre deux valeurs	5
3.4	Interpréter le nombre moyen de succès	7
3.5	Relier loi théorique et fréquences simulées	8
4	Boîte à outils	9
5	Exercices progressifs	11
6	Problème — Pour aller plus loin	13
7	Indices des exercices	14
8	Corrigés détaillés	16
9	Corrigé du problème	21
10	Variante autonome et bilan	23
11	Fiche-mémoire	23
12	Indices des pauses et des preuves	24
13	Explications des pauses et des preuves	26

1 Pourquoi ce chapitre ?

Un contrôle sur plusieurs pièces demande de compter les défauts possibles, de distinguer un événement exact d'un événement cumulé et d'interpréter une moyenne. **Ton parcours.** Enseignement commun de mathématiques pour les séries STMG et STI2D. Les situations de gestion et les situations techniques mobilisent ici les mêmes notions du programme.

- Reconnaître une loi binomiale.
- Calculer une probabilité binomiale.
- Au plus, au moins et entre deux valeurs.
- Interpréter le nombre moyen de succès.
- Relier loi théorique et fréquences simulées.

2 L'idée avant la formule

Un défaut est ici appelé succès au sens de Bernoulli : le mot désigne simplement l'événement compté. La loi binomiale exige des essais indépendants de même probabilité.

3 Le cours formel

3.1 Reconnaître une loi binomiale

Intuition | Construire la notion pas à pas

Identifier ce que compte X. Une loi binomiale décrit le nombre de succès dans un nombre fixé n d'épreuves. Elle ne décrit pas le rang du premier succès, car dans cette autre question le nombre d'essais effectués peut varier.

Vérifier trois conditions. Le nombre n doit être fixé avant l'expérience, les épreuves doivent partager la même probabilité p de succès et elles doivent être indépendantes. Chaque épreuve ne distingue que succès et échec selon la définition choisie.

Lire les paramètres dans le bon ordre. Dans $\mathcal{B}(n, p)$, n est un entier positif ou nul qui compte les essais ; p est une probabilité entre 0 et 1. La variable X peut alors prendre les valeurs entières de 0 à n . Un « succès » peut être un défaut si l'on compte les défauts.

Repérer un modèle inexact. Sans remise dans un petit lot, la composition restante dépend du résultat précédent. Les probabilités conditionnelles changent et l'indépendance n'est pas vérifiée. Une approximation éventuelle doit être annoncée et justifiée, jamais présentée comme une loi exacte par simple habitude.

Définition | Comprendre la notion

On répète n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de même probabilité de succès p . Le nombre X de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. X prend les valeurs entières de 0 à n . Le paramètre n compte les essais ; p est une probabilité, pas un effectif. Vérifie les trois conditions : nombre fixé d'essais, même paramètre, indépendance. Un prélèvement sans remise dans un petit lot ne vérifie généralement pas l'indépendance ni la constance du paramètre. Un modèle binomial peut parfois être une approximation, mais cela doit être annoncé et justifié.

💡 Exemple | Exemple commenté

On contrôle 20 produits dans un modèle où chaque produit est défectueux avec probabilité 0,03, indépendamment des autres. On définit le succès comme « trouver un défaut » et X comme le nombre de défauts.

Chaque contrôle est une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,03. Le nombre de contrôles est fixé à 20 et l'indépendance est explicitement donnée. Les trois conditions sont donc réunies : $X \sim \mathcal{B}(20; 0,03)$. X prend les valeurs 0 à 20. La valeur 0,03 n'est pas le nombre de défauts attendu ; elle est la probabilité d'un défaut sur un contrôle. Si l'on comptait les produits conformes à la place, le paramètre deviendrait 0,97 et la variable serait différente.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Le seul fait de répéter un contrôle ne suffit pas. Vérifie si la probabilité reste la même après chaque résultat et si le nombre d'essais a été fixé.

À toi d'essayer : Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Une loi binomiale compte...

1. Une durée quelconque
2. Les succès dans un nombre fixé d'essais Bernoulli indépendants identiques
3. Le rang du premier succès

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 26](#)

3.2 Calculer une probabilité binomiale

🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas

Commencer par un chemin. Pour n essais indépendants de probabilité de succès p , un chemin contenant k succès et $n - k$ échecs a le poids $p^k(1 - p)^{n-k}$. Les exposants comptent combien de fois chaque facteur apparaît.

Compter les placements. L'événement « exactement k succès » réunit plusieurs chemins : les succès peuvent occuper différentes positions. Le coefficient $\binom{n}{k}$ compte ces placements. La probabilité totale est donc $\binom{n}{k}p^k(1 - p)^{n-k}$.

Comprendre le triangle de Pascal. Pour placer k succès parmi n essais, on distingue les chemins terminés par un succès et ceux terminés par un échec. Les premiers ont $k-1$ succès parmi les $n-1$ premières positions ; les seconds en ont k . Leurs nombres s'additionnent : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Contrôler les cas extrêmes. Zéro succès ne possède qu'un chemin, tous échecs : $(1 - p)^n$. Tous les succès ne possèdent aussi qu'un chemin : p^n . Un outil numérique peut calculer les autres coefficients, mais il faut toujours identifier n , p et k avant la saisie.

Définition | Comprendre la notion

Pour $X \sim \mathcal{B}(n, p)$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Le coefficient $\binom{n}{k}$ compte les chemins de n essais contenant k succès. Le triangle de Pascal commence par 1 ; les bords valent 1 et chaque case intérieure est la somme des deux cases au-dessus. Cette règle exprime $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. La ligne $n=4$ est 1, 4, 6, 4, 1. Pour zéro succès, $P(X = 0) = (1-p)^n$; pour tous les succès, $P(X = n) = p^n$. On peut utiliser une calculatrice pour les autres valeurs.

Exemple | Exemple commenté

Pour $X \sim \mathcal{B}(4; 0,3)$, cherchons exactement deux succès. Les placements sont SSEE, SESE, SEES, ESSE, ESES, EESS : il y en a six.

Chaque chemin contient deux facteurs 0,3 et deux facteurs 0,7. Son poids est $0,3^2 \times 0,7^2 = 0,09 \times 0,49 = 0,0441$. Les chemins étant disjoints, on additionne six fois ce poids : $P(X = 2) = 6 \times 0,0441 = 0,2646$.

Le coefficient 6 ne représente pas six essais ; il compte les façons de placer deux succès parmi quatre essais. Oublier ce coefficient reviendrait à calculer un seul ordre, par exemple SSEE, au lieu de tout l'événement.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

La puissance $p^k(1-p)^{n-k}$ donne un chemin, pas tous les chemins à k succès. Le coefficient binomial est nécessaire sauf lorsque le placement est unique.

À toi d'essayer : Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

$\binom{4}{2}$ vaut...

1. 4
2. 6
3. 2

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 26](#)

3.3 Au plus, au moins et entre deux valeurs

Intuition | Construire la notion pas à pas

Traduire la phrase avant la calculatrice. « Exactly k » sélectionne une seule valeur, « au plus k » toutes les valeurs jusqu'à k inclus, et « au moins k » toutes celles à partir de k inclus. Ces événements ont généralement des probabilités différentes.

Utiliser le fait que X est entière. Le contraire de $X \geq k$ est $X < k$. Pour une variable entière, cela revient à $X \leq k - 1$. On a donc $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$; le décalage d'une unité est essentiel.

Extraire un intervalle d'un cumul. Le cumul jusqu'à b contient aussi toutes les valeurs en dessous de a . Pour conserver $a \leq X \leq b$, on retire le cumul jusqu'à $a - 1$. Retirer le cumul jusqu'à a supprimerait aussi la borne a que l'on veut garder.

Identifier la commande de l'outil. Certaines commandes calculent $P(X = k)$ et d'autres $P(X \leq k)$. Le nom et l'ordre des paramètres varient selon l'outil ; vérifie l'événement calculé plutôt que de te fier au seul nombre affiché.

Définition | Comprendre la notion

Pour une variable entière X , « au plus k » signifie $X \leq k$ et « au moins k » signifie $X \geq k$. Une probabilité cumulée additionne les probabilités des valeurs acceptées. Son contraire fournit $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$. Pour $a \leq b$, $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a - 1)$. Le décalage d'une unité est essentiel. Sur une calculatrice, distingue la fonction qui calcule exactement k succès de celle qui cumule jusqu'à k . Contrôle toujours le sens de l'événement avant d'utiliser le résultat.

Exemple | Exemple commenté

Pour $X \sim \mathcal{B}(3; 0,5)$, les probabilités des valeurs 0, 1, 2, 3 sont respectivement $1/8$, $3/8$, $3/8$, $1/8$. Au moins un succès signifie X égal à 1, 2 ou 3. Le complément est X égal à zéro : $P(X \geq 1) = 1 - 1/8 = 7/8$. Pour au moins deux succès, on garde seulement 2 et 3 : $P(X \geq 2) = 3/8 + 1/8 = 1/2$. Le calcul complémentaire retire les cas 0 et 1 : $1 - (1/8 + 3/8) = 1/2$. Retirer le cumul jusqu'à 2 aurait éliminé le cas X égal à 2 et calculé seulement $P(X \geq 3)$.

Attention | Comprendre une erreur fréquente

Pour une variable entière, le contraire de $X \geq 4$ est $X \leq 3$, pas $X \leq 4$. Dessiner les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5 aide à voir de quel côté se trouve la borne.

À toi d'essayer : Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

$P(X \geq 4)$ vaut. . .

1. $1 - P(X \leq 3)$
2. $1 - P(X \leq 4)$
3. $P(X = 4)$

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices](#), p. 24 [Explication](#), p. 26

3.4 Interpréter le nombre moyen de succès**Intuition | Construire la notion pas à pas**

Additionner les contributions moyennes. Un nombre de succès X peut s'écrire comme la somme de n indicatrices, chacune égale à 1 pour un succès et 0 sinon. Chaque indicatrice a pour moyenne p . Les contributions moyennes s'additionnent, d'où $E(X) = np$.

Ne pas exiger un entier de la moyenne. X prend une valeur entière dans chaque série, mais une moyenne de nombres entiers peut être décimale. Une espérance de 2,1 succès n'annonce donc pas une réalisation de 2,1 ; elle résume la loi.

Distinguer nombre et fréquence. L'espérance du nombre de succès vaut np , tandis que celle de la fréquence X/n vaut p lorsque $n > 0$. Une campagne plus grande peut produire davantage de succès tout en ayant un taux inférieur.

Donner une interprétation proportionnée. L'espérance décrit le centre théorique de nombreuses répétitions du protocole. Elle ne fournit pas à elle seule la probabilité de dépasser une capacité, la dispersion ou le résultat le plus probable. Ces questions nécessitent d'autres calculs sur la loi.

Définition | Comprendre la notion

Pour $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, l'espérance vaut $E(X) = np$. Ce résultat est admis dans l'enseignement commun technologique. On peut le comprendre en décomposant X en n indicatrices de succès, chacune de moyenne p : les contributions moyennes s'additionnent. Le nombre moyen de succès n'est pas nécessairement entier et ne prédit pas un résultat exact. La fréquence moyenne X/n a pour espérance p . Lorsque l'on compare deux campagnes, distingue le nombre moyen de succès et le taux de succès.

Exemple | Exemple commenté

On contrôle 150 produits indépendants avec une probabilité de défaut de 0,02 par produit. Le nombre X de défauts suit $\mathcal{B}(150; 0,02)$. Son espérance vaut $150 \times 0,02 = 3$ défauts.

Sur de nombreuses séries comparables de 150 contrôles, le nombre moyen observé se compare donc à 3. Une série isolée peut pourtant donner 0, 2, 5 ou d'autres valeurs. L'espérance n'impose pas un quota de trois défauts dans chaque lot.

La fréquence moyenne théorique est $3/150 = 0,02$. Si la taille du contrôle doublait à 300 sans changer le modèle, le nombre moyen doublerait à 6, mais le taux resterait 2 pour cent. Cette distinction explique pourquoi volume et qualité relative doivent être comparés séparément.

⚠ Attention | Comprendre une erreur fréquente

Une espérance de trois défauts ne permet pas de garantir qu'une capacité de trois réparations suffira. Pour cette décision, il faut notamment calculer la probabilité d'obtenir plus de trois défauts.

À toi d'essayer : Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Pour $B(20; 0,4)$, l'espérance vaut...

1. 0,4
2. 20,4
3. 8

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 24](#) [Explication, p. 26](#)

3.5 Relier loi théorique et fréquences simulées**🧠 Intuition | Construire la notion pas à pas**

Simuler une série, puis plusieurs séries. Un appel au simulateur réalise n épreuves et renvoie leur nombre de succès X . Pour observer la loi, on répète cet appel N fois. On obtient alors N valeurs entières de X , et non une seule série de N essais.

Distinguer trois sorties possibles. Le nombre de succès d'une série est X . Sa fréquence est X/n lorsque $n > 0$. La moyenne de plusieurs nombres de succès est une troisième quantité, que l'on compare à np . Une fonction doit annoncer clairement laquelle de ces quantités elle renvoie.

Comparer expérience simulée et loi. En comptant combien de fois chaque valeur de 0 à n apparaît, on construit un diagramme de fréquences. Il se compare aux probabilités binomiales, avec des fluctuations aléatoires. Une moyenne empirique différente de np n'est pas automatiquement un défaut du programme.

Comprendre l'effet de la taille sur les fréquences. À p fixé, la dispersion des fréquences est de l'ordre de $1/\sqrt{n}$. Pour la réduire d'un facteur c , il faut donc multiplier n par c^2 . Cette règle concerne la dispersion de X/n , pas celle du nombre brut X , et ne garantit pas chaque résultat isolé.

📖 Définition | Comprendre la notion

Pour simuler une variable binomiale, répète n tirages de Bernoulli indépendants et compte les succès. Pour étudier sa loi, recommence N fois et compte les fréquences des valeurs 0 à n . Le diagramme des fréquences ressemble progressivement à celui de la loi, avec des écarts aléatoires. La moyenne des nombres de succès peut être comparée à np ; les fréquences X/n peuvent être étudiées pour observer leur dispersion. En première technologique, la simulation sert aussi à comparer la dispersion des fréquences pour différentes tailles : elle est de l'ordre de $1/\sqrt{n}$ à paramètre fixé. Diviser cette dispersion par deux demande donc approximativement de multiplier n par quatre; ce constat ne constitue pas une garantie sur chaque échantillon.

 Exemple | Exemple commenté

Le programme suivant renvoie un nombre de succès :

```
1 from random import random
2
3 def binomiale(n, p):
4     s = 0
5     for k in range(n):
6         if random() < p:
7             s += 1
8     return s
```

On suppose n entier positif ou nul et $0 \leq p \leq 1$. Le compteur est remis à zéro au début de chaque série, puis conserve les succès de ses n essais. Pour $n = 10$ et $p = 0,3$, un appel renvoie un entier de 0 à 10.

Si quatre appels donnent 2, 4, 3, 1, leur moyenne est 2,5. On la compare à $np = 3$, sans exiger l'égalité sur quatre séries seulement. Diviser chaque sortie par 10 donnerait les fréquences 0,2 ; 0,4 ; 0,3 ; 0,1, dont la moyenne 0,25 se compare au paramètre 0,3.

 Attention | Comprendre une erreur fréquente

Augmenter n peut augmenter le nombre moyen de succès alors que la dispersion des fréquences diminue. Les unités et la normalisation par n expliquent cette différence.

À toi d'essayer : Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Un simulateur binomial renvoie...

1. Toujours p
2. Un nombre entier de succès
3. Toujours np

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

[Indices, p. 25](#) [Explication, p. 26](#)

4 Boîte à outils

 Méthode | Reconnaître une loi binomiale

1. Définis le succès et la variable X comme nombre de succès.
2. Vérifie que le nombre n d'essais est fixé.
3. Justifie l'identité du paramètre p et l'indépendance.
4. Écris $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et les valeurs possibles.
5. Compare ces valeurs avec les contraintes du contexte pour détecter un modèle incompatible.

 Méthode | Calculer une probabilité binomiale

1. Vérifie le modèle binomial et relève n , p et le nombre exact k de succès.
2. Calcule le nombre de placements $\binom{n}{k}$.
3. Écris le poids d'un chemin : k facteurs p et $n-k$ facteurs $1 - p$.
4. Multiplie le poids par le nombre de placements et conserve les parenthèses.
5. Contrôle les cas extrêmes et la cohérence avec une probabilité comprise entre 0 et 1.

 Méthode | Au plus, au moins et entre deux valeurs

1. Écris l'événement avec un signe exact, large ou strict.
2. Liste les entiers acceptés pour vérifier les bornes.
3. Choisis une somme directe ou un complément selon le nombre de termes.
4. Pour un intervalle inclusif, utilise les cumuls jusqu'à b et jusqu'à $a-1$.
5. Contrôle le mode de calcul de l'outil et compare avec un cas simple si possible.

 Méthode | Interpréter le nombre moyen de succès

1. Identifie n et p après avoir vérifié le modèle et le succès choisi.
2. Calcule $E(X) = np$ avec p sous forme décimale.
3. Annonce le résultat comme un nombre moyen de succès par série de n essais.
4. Pour comparer des campagnes, distingue le nombre moyen np et le taux p .
5. Ne déduis pas une garantie ou une probabilité de seuil du seul calcul de l'espérance.

 Méthode | Relier loi théorique et fréquences simulées

1. Vérifie le paramètre p , le nombre n d'essais et le codage du succès.
2. Initialise le compteur à chaque nouvelle série, puis accumule ses n succès.
3. Répète la série N fois pour observer la loi ou une moyenne empirique.
4. Distingue nombres de succès et fréquences avant de comparer les dispersions.
5. Interprète les écarts comme des résultats à examiner, sans imposer l'égalité exacte à la théorie.

5 Exercices progressifs

Les exercices 1 à 5 consolident les bases ; 6 à 10 demandent plusieurs étapes ; 11 à 15 t'invitent à choisir, justifier et contrôler. Cherche avant de consulter les indices.

Exercice 1 — Identifier n et p ★★☆☆

On lance 12 fois une pièce équilibrée indépendamment et X compte les piles. Donne la loi.

Exercice 2 — Aucun succès ★★☆☆

$X \sim \mathcal{B}(3; 0,2)$. Calcule $P(X = 0)$.

Exercice 3 — Au moins un ★★☆☆

$X \sim \mathcal{B}(4; 0,5)$. Calcule $P(X \geq 1)$.

Exercice 4 — Un nombre moyen ★★☆☆

$X \sim \mathcal{B}(40; 0,15)$. Calcule son espérance.

Exercice 5 — Interpréter une sortie ★★☆☆

Un appel à un simulateur de $\mathcal{B}(10; 0,3)$ renvoie 5. Que représente 5 ? Est-ce contradictoire avec une espérance de 3 ?

Exercice 6 — Le succès choisi ★★☆☆

Un produit a 98 % de chances d'être conforme. Sur 50 contrôles indépendants, X compte les défauts. Identifie la loi.

Exercice 7 — Un coefficient de Pascal ★★☆☆

La ligne $n=4$ est 1, 4, 6, 4, 1. Construis la ligne $n=5$ et donne $\binom{5}{2}$.

Exercice 8 — Au plus un ★★☆☆

$X \sim \mathcal{B}(3; 0,2)$. Calcule $P(X \leq 1)$.

Exercice 9 — Une espérance non entière ★★☆☆

Une loi binomiale a $n = 7$ et $p = 0,3$. Son espérance 2,1 est-elle possible alors que X est entière ?

Exercice 10 — Moyenne empirique ★★☆☆

Quatre simulations renvoient 2, 4, 3 et 1 succès. Calcule leur moyenne et compare-la à une espérance théorique de 3.

Exercice 11 — Une hypothèse qui manque ★★☆☆

On tire 5 produits sans remise dans un lot de 10 contenant 2 défauts. X , nombre de défauts, suit-il exactement $\mathcal{B}(5; 0,2)$?

Exercice 12 — Exactement deux défauts ★★☆☆

$X \sim \mathcal{B}(5; 0,1)$. Calcule $P(X = 2)$.

Exercice 13 — Utiliser des valeurs cumulées ★★ ★

Un outil donne $P(X \leq 2) = 0,31$ et $P(X \leq 5) = 0,88$. Calcule $P(3 \leq X \leq 5)$.

Exercice 14 — Comparer volume et taux ★★ ★

A réalise 100 essais à $p = 0,8$; B en réalise 200 à $p = 0,5$. Compare les nombres moyens de succès et les taux.

Exercice 15 — Changer la taille des échantillons ★★ ★

On veut approximativement diviser par trois la dispersion des fréquences, à p fixé. Par quel facteur faut-il multiplier n selon l'ordre $1/\sqrt{n}$?

6 Problème — Pour aller plus loin

Contrôler un lot avec une loi binomiale

Un modèle suppose cinq contrôles indépendants, chaque pièce ayant une probabilité 0,1 de défaut. X compte les pièces défectueuses.

1. Justifie la loi de X et donne ses valeurs possibles.
2. Calcule $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.
3. Calcule la probabilité d'au moins un défaut et celle d'au plus un défaut.
4. Calcule $E(X)$. Une moyenne non entière pose-t-elle problème ?
5. Décris une simulation de 1 000 lots et les comparaisons utiles avec la loi.

7 Indices des exercices

Exercice 1

Indice 1. Le nombre de succès n'est pas fixé, le nombre d'essais l'est.

Indice 2. Le paramètre d'un pile vaut $1/2$.

Exercice 2

Indice 1. Zéro succès signifie n échecs.

Indice 2. Utilise $(1 - p)^n$.

Exercice 3

Indice 1. Il est plus court de compter aucun succès.

Indice 2. Le contraire de « au moins un » est « zéro ».

Exercice 4

Indice 1. Utilise le produit des deux paramètres.

Indice 2. Le résultat est un nombre de succès, pas un pourcentage.

Exercice 5

Indice 1. Un appel réalise une seule série.

Indice 2. La moyenne théorique n'interdit pas des valeurs différentes.

Exercice 6

Indice 1. X compte les défauts, pas les conformes.

Indice 2. Prends le complément de 0,98.

Exercice 7

Indice 1. Additionne les voisins de la ligne précédente.

Indice 2. La première case correspond à $k = 0$.

Exercice 8

Indice 1. Les valeurs acceptées sont 0 et 1.

Indice 2. Pour un succès, il existe trois positions.

Exercice 9

Indice 1. Distingue valeur de X et moyenne de X.

Indice 2. Une moyenne de nombres entiers n'est pas forcément entière.

Exercice 10

Indice 1. Additionne les sorties puis divise par le nombre de séries.

Indice 2. Une courte simulation reste variable.

Exercice 11

Indice 1. Observe ce qu'il reste après un premier tirage.

Indice 2. Compare aussi les valeurs possibles de X .

Exercice 12

Indice 1. Il faut compter les positions des deux défauts.

Indice 2. Multiplie la probabilité d'un chemin par 10.

Exercice 13

Indice 1. Retire seulement les valeurs strictement inférieures à 3.

Indice 2. Le dernier entier à retirer est 2.

Exercice 14

Indice 1. Calcule les deux produits np .

Indice 2. Le volume d'essais est différent.

Exercice 15

Indice 1. La taille intervient sous une racine carrée.

Indice 2. Élève le facteur souhaité au carré.

8 Corrigés détaillés

Corrigé 1

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. X compte les piles dans douze lancers indépendants d'une même pièce équilibrée.

Construire la réponse.

1. Chaque lancer est une Bernoulli dont le succès est pile et dont le paramètre vaut $1/2$.
2. Le nombre d'essais est fixé à 12 et les lancers sont indépendants.
3. Les conditions de la loi binomiale sont donc satisfaites.

Vérifier. X peut prendre tous les entiers de 0 à 12, ce qui correspond aux nombres possibles de piles.

Conclure. $X \sim \mathcal{B}(12; 1/2)$.

Corrigé 2

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Zéro succès signifie que les trois essais sont des échecs.

Construire la réponse.

1. La probabilité d'un échec vaut $1 - 0,2 = 0,8$.
2. Le seul chemin accepté est EEE, donc $P(X = 0) = 0,8^3$.
3. On calcule $0,8^2 = 0,64$, puis $0,64 \times 0,8 = 0,512$.

Vérifier. La formule générale donne $\binom{3}{0}(0,2)^0(0,8)^3 = 1 \times 1 \times 0,512$, le même résultat.

Conclure. $P(X = 0) = 0,512$.

Corrigé 3

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Au moins un succès est le contraire d'aucun succès.

Construire la réponse.

1. Pour quatre essais de paramètre 0,5, $P(X = 0) = (1 - 0,5)^4 = 0,5^4 = 1/16$.
2. On complète à 1 : $P(X \geq 1) = 1 - 1/16 = 15/16 = 0,9375$.

Vérifier. Il existe seize chemins équiprobables ; seul EEEE est exclu. Les quinze autres comportent au moins un succès.

Conclure. $P(X \geq 1) = 0,9375$.

Corrigé 4

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. X compte les succès d'une loi binomiale de paramètres 40 et 0,15.

Construire la réponse.

1. On applique $E(X) = np$.
2. Le calcul donne $40 \times 0,15 = 6$.

Vérifier. Une fréquence de 15 pour cent sur 40 essais correspond à $6/40 = 0,15$. Le nombre 6 est une moyenne, pas une valeur imposée.

Conclure. On attend six succès en moyenne par série de quarante essais selon le modèle.

Corrigé 5

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Une sortie du simulateur représente un résultat aléatoire d'une série complète.

Construire la réponse.

1. La valeur 5 signifie que cinq succès ont été obtenus parmi les dix essais simulés.
2. L'espérance théorique vaut $10 \times 0,3 = 3$, mais elle décrit une moyenne de la loi.
3. Le nombre 5 appartient bien aux valeurs possibles de la binomiale, de 0 à 10.

Vérifier. Sa probabilité théorique est $\binom{10}{5} 0,3^5 0,7^5$, strictement positive. Il n'y a donc aucune contradiction avec le modèle.

Conclure. 5 représente cinq succès sur dix essais ; l'espérance 3 n'interdit pas ce résultat.

Corrigé 6

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. La probabilité donnée concerne la conformité, alors que X compte les défauts.

Construire la réponse.

1. Le paramètre du succès choisi est $p = 1 - 0,98 = 0,02$.
2. On effectue 50 contrôles indépendants avec le même paramètre.
3. X compte leurs succès au sens de ce codage : il suit une loi binomiale de paramètres 50 et 0,02.

Vérifier. Utiliser 0,98 décrirait le nombre de produits conformes. Les deux variables se complètent pour totaliser 50, mais ne sont pas identiques.

Conclure. $X \sim \mathcal{B}(50; 0,02)$.

Corrigé 7

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Chaque case intérieure de la nouvelle ligne est la somme des deux cases voisines de la ligne précédente.

Construire la réponse.

1. Les deux bords valent 1, car il existe un seul placement de zéro succès ou de cinq succès.
2. Les cases intérieures sont $1 + 4 = 5$, $4 + 6 = 10$, $6 + 4 = 10$ et $4 + 1 = 5$.
3. La ligne n égale à 5 est donc 1, 5, 10, 10, 5, 1.
4. Les indices k commencent à zéro : k égal à 2 correspond à la troisième valeur, 10.

Vérifier. La ligne est symétrique et sa somme vaut $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$, le nombre total de chemins de cinq essais.

Conclure. La ligne est 1, 5, 10, 10, 5, 1 et $\binom{5}{2} = 10$.

Corrigé 8

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Au plus un succès inclut zéro succès et un succès.

Construire la réponse.

1. $P(X = 0) = 0,8^3 = 0,512$.
2. $P(X = 1) = \binom{3}{1}(0,2)(0,8)^2 = 3 \times 0,2 \times 0,64 = 0,384$.
3. Ces deux événements sont disjoints, donc $P(X \leq 1) = 0,512 + 0,384 = 0,896$.

Vérifier. Les cas restants ont pour probabilités $P(X = 2) = 3 \times 0,04 \times 0,8 = 0,096$ et $P(X = 3) = 0,008$. Leur somme 0,104 complète 0,896 pour donner 1.

Conclure. $P(X \leq 1) = 0,896$.

Corrigé 9

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Il faut distinguer les valeurs observables de X et la moyenne de sa loi.

Construire la réponse.

1. Chaque série de sept essais donne un nombre entier de succès compris entre 0 et 7.
2. L'espérance est $7 \times 0,3 = 2,1$. Une moyenne pondérée de ces entiers n'a pas à être entière.
3. Par exemple, dix séries peuvent totaliser 21 succès, ce qui donnerait une moyenne de 2,1 succès par série, sans aucune série à 2,1 succès.

Vérifier. La valeur 2,1 se situe bien entre 0 et 7, les limites de X. Elle est une moyenne possible, mais pas une réalisation possible de X.

Conclure. Il n'y a aucune contradiction : l'espérance vaut 2,1 même si X est entière.

Corrigé 10

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On calcule la moyenne des quatre nombres de succès, puis on la distingue de la moyenne théorique.

Construire la réponse.

1. La somme des sorties est $2 + 4 + 3 + 1 = 10$.
2. Le nombre de séries est 4, donc la moyenne empirique vaut $10/4 = 2,5$.
3. L'écart à l'espérance 3 vaut $2,5 - 3 = -0,5$.

Vérifier. Quatre séries constituent un petit ensemble de réalisations ; une moyenne différente de 3 peut résulter de la fluctuation. Pour diagnostiquer une erreur, on doit aussi vérifier le code, les paramètres et davantage de simulations.

Conclure. La moyenne observée est 2,5 ; cet écart à 3 ne prouve pas à lui seul une erreur.

Corrigé 11

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On doit vérifier le protocole sans remise avant d'adopter la loi proposée.
Construire la réponse.

1. Au premier tirage, la probabilité d'un défaut vaut $2/10 = 0,2$.
2. Après un défaut, il reste un défaut sur neuf produits : la probabilité suivante devient $1/9$. Après un conforme, elle serait $2/9$.
3. Le résultat précédent influence donc le suivant : les essais ne sont pas indépendants avec un paramètre constant.
4. En outre, le lot ne contient que deux défauts, donc X ne peut dépasser 2 ; une loi $\mathcal{B}(5; 0,2)$ attribuerait pourtant une probabilité positive à 3, 4 ou 5.

Vérifier. Les changements de composition et l'ensemble des valeurs possibles donnent deux raisons concordantes de rejeter l'égalité exacte des lois.

Conclure. Non : X ne suit pas exactement $\mathcal{B}(5; 0,2)$ dans ce tirage sans remise.

Corrigé 12

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On veut exactement deux succès et donc trois échecs dans cinq essais.
Construire la réponse.

1. Le nombre de placements est $\binom{5}{2} = 10$.
2. Le poids d'un chemin est $0,1^2 \times 0,9^3 = 0,01 \times 0,729 = 0,00729$.
3. On multiplie par les dix placements : $P(X = 2) = 10 \times 0,00729 = 0,0729$.

Vérifier. Les exposants totalisent $2 + 3 = 5$, le nombre d'essais. Le résultat représente l'ensemble des dix chemins, et non seulement un ordre particulier.

Conclure. $P(X = 2) = 0,0729$, soit 7,29 pour cent.

Corrigé 13

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On veut conserver les valeurs 3, 4 et 5 du cumul jusqu'à 5.
Construire la réponse.

1. $P(X \leq 5) = 0,88$ contient toutes les valeurs jusqu'à 5 inclus.
2. $P(X \leq 2) = 0,31$ contient exactement la partie qu'il faut retirer pour commencer à 3.
3. La différence donne $P(3 \leq X \leq 5) = 0,88 - 0,31 = 0,57$.

Vérifier. La borne 3 reste incluse. Retirer un cumul jusqu'à 3 aurait calculé seulement les valeurs 4 et 5, et ne répondrait pas à la question.

Conclure. La probabilité demandée vaut 0,57.

Corrigé 14

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. Les deux campagnes ont des volumes et des taux différents ; on compare les deux indicateurs.

Construire la réponse.

1. Pour A, le nombre moyen vaut $100 \times 0,8 = 80$ succès.
2. Pour B, il vaut $200 \times 0,5 = 100$ succès.
3. B a donc le plus grand nombre attendu, mais son taux 0,5 est inférieur au taux 0,8 de A.

Vérifier. Rapporter les nombres moyens à leurs tailles retrouve $80/100 = 0,8$ et $100/200 = 0,5$. Comparer seulement 100 à 80 masquerait la différence de volume.

Conclure. B prévoit plus de succès en nombre ; A possède le meilleur taux, 80 pour cent contre 50 pour cent.

Corrigé 15

 *Démonstration / Solution expliquée*

Comprendre la question. On cherche le changement de taille qui réduit la dispersion des fréquences d'un facteur trois.

Construire la réponse.

1. À paramètre fixé, on compare $1/\sqrt{n_{\text{nouveau}}}$ à $1/\sqrt{n}$.
2. Pour obtenir un tiers, il faut $\sqrt{n_{\text{nouveau}}} = 3\sqrt{n}$.
3. En élevant au carré, on obtient $n_{\text{nouveau}} = 9n$.

Vérifier. $\sqrt{9n} = 3\sqrt{n}$, donc l'inverse est bien divisé par trois. Multiplier n seulement par trois diviserait la dispersion par $\sqrt{3}$, pas par trois.

Conclure. Il faut multiplier la taille n par 9 pour cette réduction d'ordre de grandeur de la dispersion des fréquences.

9 Corrigé du problème

1. **Comprendre la question.** La loi binomiale décrit un nombre de succès parmi des essais identiques et indépendants.

Construire la réponse.

- (a) Chaque contrôle a deux issues : défaut ou absence de défaut. Le « succès » mathématique est ici le défaut compté.
- (b) Le nombre d'essais est fixé à 5, leur probabilité de défaut est constante à 0,1, et l'indépendance est supposée par le modèle.
- (c) On a donc $X \sim \mathcal{B}(5; 0,1)$. Les valeurs possibles sont 0, 1, 2, 3, 4 et 5.

Vérifier. Si les contrôles étaient dépendants ou avaient des probabilités différentes, cette loi ne serait pas automatiquement adaptée.

Conclure. X suit une loi binomiale de paramètres 5 et 0,1.

2. **Comprendre la question.** La formule combine la probabilité d'un chemin et le nombre de positions possibles des défauts.

Construire la réponse.

- (a) Pour zéro défaut, il n'existe qu'un chemin, cinq pièces conformes : $P(X = 0) = 0,9^5 = 0,59049$.
- (b) Pour un défaut, il y a 5 positions possibles. Chaque chemin vaut $0,1 \times 0,9^4$, donc $P(X = 1) = 5 \times 0,1 \times 0,9^4 = 0,32805$.
- (c) Pour deux défauts, on choisit deux positions parmi cinq, soit $\binom{5}{2} = 10$ possibilités. Ainsi $P(X = 2) = 10 \times 0,1^2 \times 0,9^3 = 0,0729$.

Vérifier. La somme de ces trois valeurs est 0,99144, inférieure à 1 : le reste correspond aux cas de trois, quatre ou cinq défauts.

Conclure. Les probabilités demandées sont 0,59049 ; 0,32805 ; 0,0729.

3. **Comprendre la question.** « Au moins un » et « au plus un » ne sélectionnent pas les mêmes valeurs.

Construire la réponse.

- (a) Au moins un signifie $X \geq 1$. Son contraire est $X = 0$, donc la probabilité est $1 - 0,59049 = 0,40951$.
- (b) Au plus un signifie $X \leq 1$. On additionne les cas disjoints 0 et 1 : $0,59049 + 0,32805 = 0,91854$.

Vérifier. Les deux événements ne sont pas complémentaires : ils ont en commun le cas d'un seul défaut. Leurs probabilités n'ont donc pas à totaliser 1.

Conclure. Les probabilités sont 0,40951 pour au moins un défaut et 0,91854 pour au plus un défaut.

4. **Comprendre la question.** L'espérance est une moyenne théorique, pas un résultat nécessairement observable dans un lot.

Construire la réponse.

- (a) Pour une loi binomiale, $E(X) = np = 5 \times 0,1 = 0,5$.
- (b) Un lot particulier contient un nombre entier de défauts, mais une moyenne calculée sur plusieurs lots peut être décimale.
- (c) Sur 1000 lots, l'espérance du nombre total de défauts est 500 ; cela ne signifie pas que chaque simulation en contiendra exactement 500.

Vérifier. La moyenne 0,5 est entre 0 et 5, les bornes possibles de X .

Conclure. Le nombre moyen théorique de défauts est 0,5 par lot ; cette valeur non entière ne pose aucun problème.

5. **Comprendre la question.** La simulation doit reproduire cinq essais par lot, puis recommencer pour 1000 lots.

Construire la réponse.

(a)

```
1 from random import random
2
3 def simuler_lots():
4     lots = []
5     for _ in range(1000):
6         defaults = 0
7         for _ in range(5):
8             if random() < 0.1:
9                 defaults += 1
10        lots.append(defaults)
11    return lots
```

- (b) On compte ensuite les lots ayant 0, 1 ou 2 défauts et on divise chaque effectif par 1000 pour obtenir les fréquences.
- (c) On calcule aussi la somme des défauts divisée par 1000, à comparer à l'espérance 0,5.
- (d) Les écarts entre fréquences et probabilités théoriques relèvent de la fluctuation à taille finie ; une simulation unique ne les annule pas.

Vérifier. La liste doit contenir exactement 1000 entiers entre 0 et 5. La somme des effectifs des six valeurs possibles doit être 1000.

Conclure. Les comparaisons utiles portent sur les fréquences des événements et sur la moyenne, en conservant leur caractère aléatoire.

10 Variante autonome et bilan

Avec quatre contrôles indépendants et $p = 0,2$, calcule la probabilité d'au moins un défaut et le nombre moyen de défauts.

À toi d'essayer : Vérifie ta démarche

Résous la variante, puis explique pourquoi ta méthode s'applique.

Tu peux chercher, prendre un indice ou lire l'explication, à ton rythme.

Indices, p. 25 Explication, p. 26

- Je peux expliquer : reconnaître une loi binomiale.
- Je peux expliquer : calculer une probabilité binomiale.
- Je peux expliquer : au plus, au moins et entre deux valeurs.
- Je peux expliquer : interpréter le nombre moyen de succès.
- Je peux expliquer : relier loi théorique et fréquences simulées.

11 Fiche-mémoire

Reconnaître une loi binomiale.

1. Définis le succès et la variable X comme nombre de succès.
2. Vérifie que le nombre n d'essais est fixé.
3. Justifie l'identité du paramètre p et l'indépendance.
4. Écris $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et les valeurs possibles.
5. Compare ces valeurs avec les contraintes du contexte pour détecter un modèle incompatible.

Calculer une probabilité binomiale.

1. Vérifie le modèle binomial et relève n , p et le nombre exact k de succès.
2. Calcule le nombre de placements $\binom{n}{k}$.
3. Écris le poids d'un chemin : k facteurs p et $n-k$ facteurs $1 - p$.
4. Multiplie le poids par le nombre de placements et conserve les parenthèses.
5. Contrôle les cas extrêmes et la cohérence avec une probabilité comprise entre 0 et 1.

Au plus, au moins et entre deux valeurs.

1. Écris l'événement avec un signe exact, large ou strict.
2. Liste les entiers acceptés pour vérifier les bornes.
3. Choisis une somme directe ou un complément selon le nombre de termes.
4. Pour un intervalle inclusif, utilise les cumuls jusqu'à b et jusqu'à $a-1$.
5. Contrôle le mode de calcul de l'outil et compare avec un cas simple si possible.

Interpréter le nombre moyen de succès.

1. Identifie n et p après avoir vérifié le modèle et le succès choisi.
2. Calcule $E(X) = np$ avec p sous forme décimale.
3. Annonce le résultat comme un nombre moyen de succès par série de n essais.
4. Pour comparer des campagnes, distingue le nombre moyen np et le taux p .
5. Ne déduis pas une garantie ou une probabilité de seuil du seul calcul de l'espérance.

Relier loi théorique et fréquences simulées.

1. Vérifie le paramètre p , le nombre n d'essais et le codage du succès.
2. Initialise le compteur à chaque nouvelle série, puis accumule ses n succès.
3. Répète la série N fois pour observer la loi ou une moyenne empirique.
4. Distingue nombres de succès et fréquences avant de comparer les dispersions.
5. Interprète les écarts comme des résultats à examiner, sans imposer l'égalité exacte à la théorie.

12 Indices des pauses et des preuves

Chercher avec un indice fait partie du travail. Tu peux revenir à l'énoncé avec le lien sous chaque aide.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Le nombre n d'épreuves est fixé à l'avance.

Indice 2 — Un pas de plus.

X additionne les indicatrices de succès de ces épreuves.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Il faut compter les placements de deux succès parmi quatre positions.

Indice 2 — Un pas de plus.

La ligne de Pascal n égale à 4 est 1, 4, 6, 4, 1 et k commence à zéro.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

Le contraire est $X < 4$.

Indice 2 — Un pas de plus.

Comme X est entière, les valeurs exclues vont seulement jusqu'à 3.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

Indice 1 — Une piste.

La formule est le nombre d'essais multiplié par la probabilité de succès.

Indice 2 — Un pas de plus.

Utilise n égal à 20 et p égal à 0,4.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve**Indice 1 — Une piste.**

Le compteur s'augmente d'une unité à chaque succès.

Indice 2 — Un pas de plus.

Après n essais, il est compris entre zéro et n .

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche**Indice 1 — Une piste.**

Repère les données utiles et l'inconnue. Reviens à la méthode correspondante dans la boîte à outils.

Indice 2 — Un pas de plus.

Contrôle les unités, les bornes et la plausibilité du résultat avant de lire la correction.

[Revenir à la recherche, p. 23](#)

13 Explications des pauses et des preuves

Lis une étape, puis essaie de poursuivre avant de lire la suivante. Les calculs ci-dessous complètent le cours.

Pause 1 — Mets la notion à l'épreuve

La loi binomiale compte les succès dans des essais de Bernoulli indépendants et identiques.

[Revenir à la recherche, p. 4](#)

Pause 2 — Mets la notion à l'épreuve

$\binom{4}{2} = 6$, troisième valeur de la ligne.

[Revenir à la recherche, p. 5](#)

Pause 3 — Mets la notion à l'épreuve

$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3)$.

[Revenir à la recherche, p. 7](#)

Pause 4 — Mets la notion à l'épreuve

$E(X) = 20 \times 0,4 = 8$ succès en moyenne.

[Revenir à la recherche, p. 8](#)

Pause 5 — Mets la notion à l'épreuve

Le simulateur renvoie un nombre entier de succès, pas systématiquement l'espérance np ni la probabilité p .

[Revenir à la recherche, p. 9](#)

Vérifie ta démarche

Comprendre la question. On adapte le complément et l'espérance à quatre essais de probabilité 0,2.

Construire la réponse.

1. La variable suit $\mathcal{B}(4; 0,2)$ sous les hypothèses d'indépendance et de probabilité constante.
2. Aucun défaut a probabilité $(1 - 0,2)^4 = 0,8^4 = 0,4096$.
3. Au moins un défaut a probabilité $1 - 0,4096 = 0,5904$.
4. L'espérance vaut $4 \times 0,2 = 0,8$ défaut par lot.

Vérifier. 0,5904 est une probabilité entre 0 et 1 ; 0,8 est un nombre moyen de défauts entre 0 et 4. Ces grandeurs ne répondent pas à la même question.

Conclure. La probabilité d'au moins un défaut est 59,04 % et le nombre moyen de défauts est 0,8.

[Revenir à la recherche, p. 23](#)