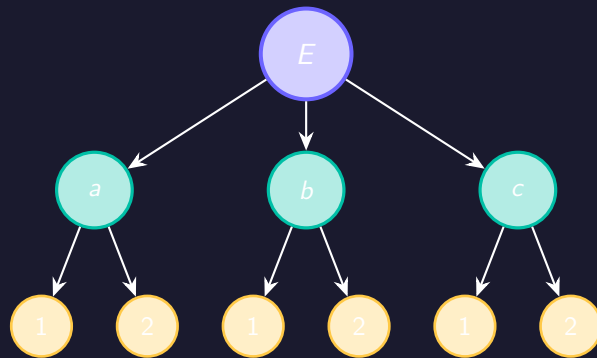


Dénombrement

Produit cartésien ▪ Listes ▪ Permutations ▪ Combinaisons



Terminale — Spécialité Mathématiques — Programme officiel



Table des matières

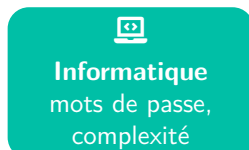
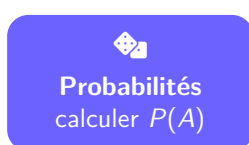
1	 Pourquoi étudier le dénombrement ?	3
1.1	Le problème fondamental	3
1.2	L'idée directrice	3
2	 L'idée avant la formule	5
2.1	Le principe fondamental : le principe multiplicatif	5
2.2	Avec ou sans répétition : la grande distinction	5
3	 Le cours formel	7
3.1	Cardinal d'un ensemble fini	7
3.2	Opérations ensemblistes et dénombrement	7
3.3	Produit cartésien	9
3.4	p -listes (ou p -uplets)	10
3.5	Permutations et factorielle	11
3.6	Arrangements (sans répétition)	13
3.7	Combinaisons	14
3.8	Propriétés fondamentales des combinaisons	16
3.9	Formule du binôme de Newton	17
4	 La boîte à outils — Réflexes pour le bac	19
5	 Exercices	21
6	 Problème — Les partitions d'un ensemble ★★ ★	23
7	 Corrigés détaillés	24

1 ? Pourquoi étudier le dénombrement ?

1.1 Le problème fondamental

Imagine la situation suivante : tu dois créer un mot de passe de 4 caractères parmi les 26 lettres de l'alphabet. Combien de mots de passe différents peux-tu créer ? La réponse n'est pas évidente, et pourtant c'est une question très concrète. Si on t'autorise à répéter les lettres, ce n'est pas le même problème que si on l'interdit. Et si l'ordre n'a pas d'importance — par exemple, quand on choisit un comité de 4 personnes parmi 26 — c'est encore un autre problème.

Dénombrer, c'est **compter le nombre d'éléments d'un ensemble fini**, sans avoir à les lister un par un. C'est un problème fondamental en mathématiques, et il apparaît dans énormément de domaines. Voyons lesquels :



En probabilités : quand on veut calculer la probabilité d'un événement A dans une situation d'équiprobabilité, on utilise la formule $P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$. Pour appliquer cette formule, il faut savoir compter les cas favorables et les cas possibles. Sans dénombrement, pas de probabilités !

En informatique : combien de mots de passe de 8 caractères peut-on former ? Si un pirate teste tous les mots de passe possibles (*attaque par force brute*), combien de temps cela prendrait-il ? La réponse dépend directement du nombre de mots de passe possibles, donc du dénombrement.

En biologie : une séquence d'ADN est formée de 4 bases (A, T, G, C). Combien de séquences différentes de longueur n peut-on former ? Pour $n = 20$, la réponse est $4^{20} \approx 10^{12}$, soit plus de mille milliards de possibilités. Cela explique la diversité génétique !

En physique statistique : le nombre de configurations microscopiques d'un système détermine son entropie, une grandeur fondamentale de la thermodynamique. Là encore, il faut savoir compter.

1.2 L'idée directrice

Bonne nouvelle : même si les applications sont variées, tout le chapitre repose sur **une seule question** fondamentale que tu dois te poser systématiquement face à chaque problème de dénombrement :

La question fondamentale :

Est-ce que **l'ordre compte** ? Est-ce qu'on peut **répéter** ?

Ces deux questions (oui ou non pour chacune) donnent **quatre cas possibles**, et à chaque cas correspond un outil mathématique précis. Voici le tableau récapitulatif — apprends-le par cœur, c'est la colonne vertébrale du chapitre :

	Avec répétition	Sans répétition
L'ordre compte	p -listes n^p	Arrangements $\frac{n!}{(n-p)!}$
L'ordre ne compte pas	(Hors programme)	Combinaisons $\binom{n}{p}$

Ne t'inquiète pas si tu ne comprends pas encore toutes les formules. On va les construire une par une, en partant à chaque fois de l'intuition. À la fin de cette fiche, tu sauras exactement dans quel cas tu te trouves et quelle formule appliquer.

2 🧠 L'idée avant la formule

Avant de plonger dans les définitions formelles, construisons l'intuition avec des exemples très concrets. L'objectif de cette section est que tu **comprendes le raisonnement** derrière chaque formule, avant même de la voir.

2.1 Le principe fondamental : le principe multiplicatif

Le principe multiplicatif est la **base absolue** de tout le chapitre. Si tu ne devais retenir qu'une seule chose, ce serait celle-ci.

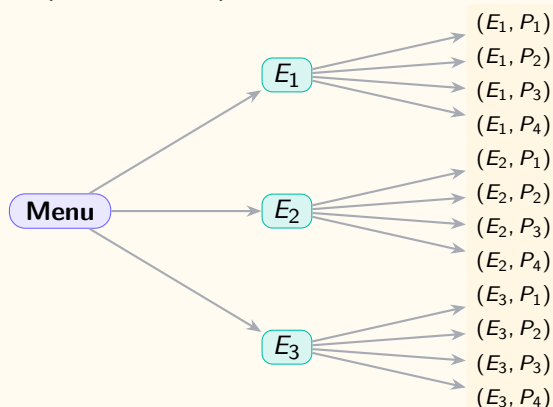
🧠 Intuition | Le menu du restaurant 🍴

Dans un restaurant, tu as le choix entre **3 entrées** (salade, soupe, terrine) et **4 plats** (poulet, poisson, pâtes, steak). Tu dois choisir une entrée *puis* un plat. Combien de menus différents (entrée + plat) peux-tu composer ?

Raisonnons étape par étape. Pour chaque entrée, tu as 4 choix de plat. Donc :

- Si tu choisis la salade, tu as 4 plats possibles $\Rightarrow$ 4 menus.
- Si tu choisis la soupe, tu as encore 4 plats possibles $\Rightarrow$ 4 menus.
- Si tu choisis la terrine, 4 plats $\Rightarrow$ 4 menus.

Au total : $3 \times 4 = 12$ menus possibles. On peut le visualiser avec un **arbre de choix** :



L'arbre a $3 \times 4 = 12$ feuilles (les nœuds tout à droite), une pour chaque menu. C'est le **principe multiplicatif** en action : quand on enchaîne des choix successifs et indépendants, on **multiplie** le nombre de possibilités à chaque étape.

Le principe multiplicatif se généralise naturellement : si on fait k choix successifs avec n_1 possibilités pour le premier, n_2 pour le deuxième, etc., le nombre total de résultats est $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$.

2.2 Avec ou sans répétition : la grande distinction

Maintenant, voyons comment les deux questions (ordre ? répétition ?) donnent des situations très différentes, à travers trois exemples.

🧠 Intuition | Le cadenas à 3 chiffres 🗝️

Un cadenas a 3 molettes, chacune affichant un chiffre de 0 à 9. Combien de codes différents existe-t-il ?

Analysons : Le code « 1-2-3 » n'est pas le même que « 3-2-1 », donc **l'ordre compte**. De plus, le code « 1-1-1 » est un code valide, donc **les répétitions sont autorisées**. On est dans le cas d'une *p*-liste.

On fait 3 choix successifs, avec 10 possibilités à chaque étape (les répétitions étant permises). Par le principe multiplicatif :

$$10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 1\,000 \text{ codes possibles.}$$

C'est pour ça qu'un cadenas à 3 chiffres n'est pas très sécurisé — il « suffit » de tester 1000 combinaisons !

Intuition | Le podium d'une course 🏆

8 coureurs participent à une course. De combien de façons peut-on attribuer les médailles d'or, d'argent et de bronze ?

Analysons : Donner l'or à Alice et l'argent à Bob n'est pas la même chose que l'or à Bob et l'argent à Alice. Donc **l'ordre compte**. Par contre, une même personne ne peut pas recevoir deux médailles : **pas de répétition**. On est dans le cas d'un **arrangement**.

Raisonnons étape par étape :

- Pour la médaille d'or : 8 coureurs possibles.
- Pour l'argent : il reste 7 coureurs (le médaillé d'or est pris).
- Pour le bronze : il reste 6 coureurs.

Total : $8 \times 7 \times 6 = 336$ podiums possibles.

Remarque : si on avait autorisé la répétition (ce qui n'a pas de sens ici, mais imaginons), on aurait $8^3 = 512$ possibilités. Le fait d'interdire la répétition donne bien un nombre plus petit ($336 < 512$).

Intuition | L'équipe de handball 👥

Dans une classe de 30 élèves, on veut former une équipe de 7 joueurs. Combien d'équipes possibles ?

Analysons : L'équipe {Alice, Bob, Charlie, ...} est **la même** que {Charlie, Alice, Bob, ...} — ce sont les mêmes personnes ! Donc **l'ordre ne compte pas**. Et bien sûr, on ne choisit pas deux fois le même élève : **pas de répétition**. On est dans le cas d'une **combinaison**.

La réponse est $\binom{30}{7}$. On verra plus loin comment calculer ce nombre. Pour l'instant, retiens juste que dès que l'on parle de *choisir un groupe* sans rôle particulier, c'est une combinaison.

Méthode | Règle d'or

Avant tout calcul, pose-toi **toujours** ces deux questions :

1. **L'ordre compte-t-il ?** (les éléments sont-ils interchangeables ?)
2. **Peut-on répéter un élément ?**

Tes réponses déterminent la formule à utiliser. Ne commence **jamais** un calcul de dénombrement sans avoir répondu à ces deux questions.

3 Le cours formel

On formalise maintenant rigoureusement tout ce qu'on a vu intuitivement. Chaque notion est définie, démontrée, et illustrée.

3.1 Cardinal d'un ensemble fini

Définition | Cardinal

Soit E un ensemble fini. Le **cardinal** de E , noté $\text{Card}(E)$ ou $|E|$ ou $\#E$, est le **nombre d'éléments** de E .

Quelques exemples fondamentaux :

- $E = \{a, b, c\}$: il y a 3 éléments, donc $\text{Card}(E) = 3$.
- $E = \emptyset$ (l'ensemble vide, qui ne contient aucun élément) : $\text{Card}(\emptyset) = 0$.
- $E = \{1, 2, 3, \dots, n\}$: $\text{Card}(E) = n$.
- $E = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ (les entiers pairs de 2 à 10) : $\text{Card}(E) = 5$.

Propriété | Cardinal d'un intervalle d'entiers

Pour tous entiers a et b tels que $a \leq b$:

$$\text{Card}(\{a, a+1, a+2, \dots, b\}) = b - a + 1$$

C'est une formule simple mais essentielle. Par exemple :

- $\text{Card}(\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}) = 8 - 3 + 1 = 6 \checkmark$
- $\text{Card}(\{0, 1, 2, \dots, 99\}) = 99 - 0 + 1 = 100 \checkmark$
- $\text{Card}(\{-5, -4, -3, \dots, 5\}) = 5 - (-5) + 1 = 11 \checkmark$

Attention | Le piège classique du +1

Attention à ne **jamais** oublier le +1 ! C'est une erreur extrêmement fréquente. Le nombre d'entiers de a à b **inclus** est $b - a + 1$, et non $b - a$.

Moyen mnémotechnique : les entiers de 1 à 10, il y en a clairement 10, et effectivement $10 - 1 + 1 = 10$ (et non $10 - 1 = 9$). Ça paraît évident ici, mais l'erreur surgit souvent quand les bornes sont moins « gentilles » (par exemple, combien d'entiers de 37 à 84 ? Réponse : $84 - 37 + 1 = 48$, pas 47).

3.2 Opérations ensemblistes et dénombrement

Quand on dénombre, on travaille souvent avec des réunions, intersections, et complémentaires d'ensembles. Voici les règles de calcul associées.

Théorème | Formule d'inclusion-exclusion

Soient A et B deux ensembles finis. Alors :

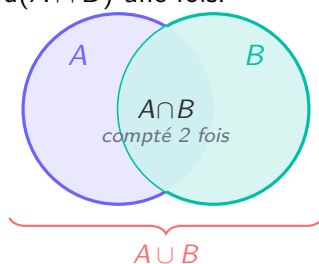
$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

Dans le cas particulier où A et B sont **disjoints** (c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$, ils n'ont aucun élément en commun), la formule se simplifie en :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$$

Démonstration / Idée de la preuve

L'idée est très visuelle. Quand on fait la somme $\text{Card}(A) + \text{Card}(B)$, les éléments qui se trouvent dans $A \cap B$ (c'est-à-dire dans les **deux** ensembles à la fois) sont comptés **deux fois** : une fois quand on compte les éléments de A , et une fois quand on compte ceux de B . Pour corriger ce double comptage, il suffit de retrancher $\text{Card}(A \cap B)$ une fois.



C'est ce qu'on appelle un diagramme de Venn. La zone hachurée (l'intersection) est la zone « problématique » qui serait comptée en double sans la correction.

✓ Propriété | Cardinal du complémentaire

Si A est une partie d'un ensemble fini E , le **complémentaire** de A dans E est $\bar{A} = E \setminus A$ (tous les éléments de E qui ne sont **pas** dans A). On a :

$$\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$$

En d'autres termes : le nombre d'éléments qui ne vérifient pas une propriété = total – ceux qui la vérifient.

Méthode | Compter par le complémentaire — une stratégie puissante

C'est l'une des techniques les plus utiles en dénombrement. L'idée : quand il est **difficile** de compter directement ce qu'on cherche, il est souvent **plus facile** de compter ce qu'on **ne** cherche **pas**, puis de soustraire du total.

Exemple détaillé : Combien de nombres à 3 chiffres (de 100 à 999) contiennent **au moins un** chiffre 7 ?

Approche directe (compliquée) : Il faudrait compter ceux avec un 7 en position des centaines, ceux avec un 7 en position des dizaines, ceux avec un 7 en position des unités, puis retrancher les doubles comptages (ceux avec deux 7, etc.). C'est faisable mais fastidieux.

Approche par le complémentaire (élégante) :

- **Total** de nombres à 3 chiffres : $999 - 100 + 1 = 900$.
- **Nombres à 3 chiffres sans aucun 7** :
 - Chiffre des centaines : 8 choix (parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 — on exclut 0 car c'est un nombre à 3 chiffres, et on exclut 7).
 - Chiffre des dizaines : 9 choix (parmi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 — on exclut 7 mais pas 0).

— Chiffre des unités : 9 choix (même raisonnement).

— Par le principe multiplicatif : $8 \times 9 \times 9 = 648$.

— **Réponse** : $900 - 648 = 252$ nombres contiennent au moins un 7.

Retiens cette stratégie : à chaque fois que tu vois « **au moins un** » dans un énoncé, pense immédiatement au complémentaire !

3.3 Produit cartésien

Définition | Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles. Le **produit cartésien** de E par F , noté $E \times F$, est l'ensemble de tous les **couples** (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$:

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Plus généralement, pour k ensembles $E_1, E_2, \dots, E_k$:

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \mid x_i \in E_i \text{ pour tout } i\}$$

Le terme « cartésien » vient de René Descartes, car c'est exactement ce qu'on fait quand on repère des points dans le plan par leurs coordonnées (x, y) : le plan est $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

★ Théorème | Cardinal d'un produit cartésien

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \dots \times \text{Card}(E_k)$$

C'est la traduction formelle du principe multiplicatif : le nombre de k -uplets possibles est le produit des nombres de choix à chaque position.

Exemple

On lance un dé à 6 faces et une pièce de monnaie. L'ensemble des résultats possibles est :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{P, F\}$$

où P = pile et F = face. On a $\text{Card}(\Omega) = 6 \times 2 = 12$ résultats possibles. Ce sont les 12 couples $(1, P), (1, F), (2, P), (2, F), \dots, (6, P), (6, F)$.

Attention | Couple $\neq$ ensemble à 2 éléments

C'est une distinction fondamentale en mathématiques :

— Un **couple** (a, b) est **ordonné** : le premier élément est a , le deuxième est b . En général, $(a, b) \neq (b, a)$ (sauf si $a = b$). On utilise des **parenthèses**.

— Un **ensemble** $\{a, b\}$ n'est **pas ordonné** : $\{a, b\} = \{b, a\}$ **toujours**. On utilise des **accolades**.

Moyen mnémotechnique : Parenthèses $()$ = il y a un **P**remier et un deuxième (ordre). Accolades $\{\}$ = juste un **A**mas d'éléments (pas d'ordre).

3.4 p -listes (ou p -uplets)

Définition | p -liste d'un ensemble

Soit E un ensemble à n éléments. Une p -liste de E (ou p -uplet d'éléments de E) est un élément du produit cartésien :

$$E^p = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{p \text{ fois}}$$

Concrètement, c'est un p -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ où chaque x_i appartient à E .

Deux caractéristiques fondamentales :

-  **L'ordre compte** : $(a, b, c) \neq (c, b, a)$.
-  **Les répétitions sont autorisées** : (a, a, b) est une 3-liste valide.

Théorème | Nombre de p -listes

Le nombre de p -listes d'un ensemble à n éléments est :

$$n^p$$

Démonstration

C'est une conséquence directe du cardinal du produit cartésien :

$$\text{Card}(E^p) = \underbrace{\text{Card}(E) \times \text{Card}(E) \times \cdots \times \text{Card}(E)}_{p \text{ fois}} = n^p$$

En termes de choix : on fait p choix successifs, et à chaque étape, on a n possibilités (puisque la répétition est autorisée, on a toujours les n éléments de E disponibles). Par le principe multiplicatif :

$$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_p = n^p.$$

Exemple | Les plaques d'immatriculation

En France, une plaque est de la forme AB-123-CD : 2 lettres, 3 chiffres, 2 lettres. Chaque lettre est choisie parmi 26, chaque chiffre parmi 10, et les répétitions sont permises (on peut avoir AA-111-AA).

Le nombre total de plaques est :

$$26^2 \times 10^3 \times 26^2 = 676 \times 1\,000 \times 676 = 456\,976\,000 \text{ plaques}$$

C'est un produit cartésien de 7 ensembles : $\{A, \dots, Z\}^2 \times \{0, \dots, 9\}^3 \times \{A, \dots, Z\}^2$.

Exemple | Séquences d'ADN

L'ADN est formé de 4 nucléotides, notés A (adénine), T (thymine), G (guanine), C (cytosine). Une séquence d'ADN de longueur n est une n -liste de l'ensemble $\{A, T, G, C\}$ (l'ordre des bases compte et les répétitions sont évidemment permises).

Le nombre de séquences possibles est 4^n . Pour $n = 20$: $4^{20} = 1\,099\,511\,627\,776 \approx 10^{12}$, soit plus de mille milliards de séquences possibles pour seulement 20 bases !

3.5 Permutations et factorielle

Définition | Factorielle

Pour tout entier $n \geq 1$, la **factorielle** de n , notée $n!$ (se lit « n factorielle »), est le produit de tous les entiers de 1 à n :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = \prod_{k=1}^n k$$

Par convention : $0! = 1$.

$0!$	$1!$	$2!$	$3!$	$4!$	$5!$	$6!$	$7!$	$8!$
1	1	2	6	24	120	720	5040	40320

Remarque comment la factorielle **explose** très vite : $10! = 3\,628\,800$ et $20! \approx 2,4 \times 10^{18}$.

Intuition | Pourquoi $0! = 1$? — Trois justifications

C'est une question qui revient souvent, et la réponse mérite d'être comprise en profondeur.

1. **Par récurrence descendante.** On a la relation $n! = n \times (n-1)!$, ce qui donne $(n-1)! = \frac{n!}{n}$. En posant $n = 1$: $0! = \frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1$.
2. **Par le sens combinatoire.** $n!$ représente le nombre de façons d'ordonner n objets. Combien de façons y a-t-il d'ordonner **zéro** objet ? Il y a exactement **une seule façon** : ne rien faire. C'est comme le « néant bien rangé ». Donc $0! = 1$.
3. **Par cohérence avec les combinaisons.** On voudra plus tard que $\binom{n}{0} = 1$ (il y a une seule façon de ne rien choisir). Or la formule des combinaisons donne $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!}$, qui ne vaut 1 que si $0! = 1$.

Définition | Permutation

Soit E un ensemble à n éléments. Une **permutation** de E est un arrangement ordonné de **tous** les éléments de E . Autrement dit, c'est une n -liste **sans répétition** de E , ou encore une bijection de E dans lui-même.

En termes simples : une permutation, c'est le résultat obtenu quand on **mélange** (réordonne) tous les éléments d'un ensemble.

★ Théorème | Nombre de permutations

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est :

$$n!$$

 Démonstration

On construit une permutation en plaçant les n éléments un par un dans n positions :

- Position 1 : on a n éléments disponibles, donc n choix.
- Position 2 : l'élément placé en position 1 n'est plus disponible, il reste $n - 1$ choix.
- Position 3 : il reste $n - 2$ choix.
- Et ainsi de suite. . .
- Position n : il ne reste qu'un seul élément, donc 1 seul choix.

Par le principe multiplicatif, le nombre total de permutations est :

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n! \quad \square$$

 Exemple | Anagrammes

Combien d'**anagrammes** (mots formés des mêmes lettres, même sans signification) peut-on écrire avec le mot « MATHS » ?

Le mot MATHS a 5 lettres **toutes distinctes** (M, A, T, H, S). Chaque anagramme correspond à une permutation de ces 5 lettres. Donc il y a $5! = 120$ anagrammes.

Et avec le mot « CLASSE » ? Il a 6 lettres, mais la lettre S apparaît **2 fois**. Les deux S sont **indistinguables** : si on échange les deux S, on obtient le même mot. Le nombre de permutations "brutes" est $6!$, mais chaque mot est compté $2!$ fois (car les 2 S peuvent être échangés sans changer le mot). On divise donc :

$$\frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360 \text{ anagrammes.}$$

 Propriété | Permutations avec répétitions — Coefficient multinomial

Si parmi n objets, il y a n_1 objets identiques d'un premier type, n_2 d'un deuxième type, . . . , n_k d'un dernier type (avec $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$), alors le nombre de permutations **distinguables** est :

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!}$$

L'idée est qu'on divise par le nombre de façons de permuter les éléments identiques entre eux (car ces permutations ne changent rien au résultat visible).

 Exemple | ABRACADABRA

Combien d'anagrammes distinguables du mot « ABRACADABRA » (11 lettres) ?

Décomptons les lettres : A apparaît **5 fois**, B **2 fois**, R **2 fois**, C **1 fois**, D **1 fois**. Vérification : $5 + 2 + 2 + 1 + 1 = 11$ ✓

$$\frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{39\,916\,800}{120 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1} = \frac{39\,916\,800}{480} = 83\,160 \text{ anagrammes.}$$

3.6 Arrangements (sans répétition)

Définition | Arrangement

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier avec $0 \leq p \leq n$. Un **arrangement** de p éléments de E est une p -liste **sans répétition** d'éléments de E .

Caractéristiques :

-  L'ordre **compte**.
-  **Pas de répétition** : chaque élément peut apparaître au plus une fois.

C'est le cas intermédiaire entre la p -liste (avec répétition) et la combinaison (sans ordre).

Théorème | Nombre d'arrangements

Le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1)}_{p \text{ facteurs consécutifs décroissants}}$$

Démonstration

Le raisonnement est le même que pour les permutations, sauf qu'on s'arrête après p choix (au lieu de n) :

- Choix 1 : n possibilités (tous les éléments sont disponibles).
- Choix 2 : $n - 1$ possibilités (l'élément déjà choisi n'est plus disponible).
- Choix 3 : $n - 2$ possibilités.
- ⋮
- Choix p : $n - p + 1$ possibilités.

Par le principe multiplicatif : $A_n^p = n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1)$.

Pour voir que c'est bien $\frac{n!}{(n-p)!}$, on complète :

$$n(n-1) \cdots (n-p+1) = \frac{n(n-1) \cdots (n-p+1) \times \overbrace{(n-p)(n-p-1) \cdots 1}^{=(n-p)!}}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \square$$

Exemple

Un club de 15 personnes élit un bureau composé d'un président, un trésorier et un secrétaire (3 postes **distincts**). Combien de bureaux possibles ?

Ici, l'ordre compte (président $\neq$ trésorier $\neq$ secrétaire) et il n'y a pas de répétition (une personne n'occupe qu'un poste). C'est un arrangement de 3 éléments parmi 15 :

$$A_{15}^3 = 15 \times 14 \times 13 = 2730 \text{ bureaux possibles.}$$

⚠ Attention | Ne pas confondre A_n^p et n^p

C'est une source d'erreur classique :

- n^p : avec répétition $\Rightarrow$ plus de possibilités.
- A_n^p : sans répétition $\Rightarrow$ moins de possibilités.

On a **toujours** $A_n^p \leq n^p$. L'égalité a lieu quand $p = 1$ (un seul choix, la question de la répétition ne se pose pas).

Cas particulier important : $A_n^n = n!$ (un arrangement de *tous* les éléments est une permutation).

3.7 Combinaisons

C'est **l'outil le plus important du chapitre**, et celui qui tombe le plus souvent au bac. Maîtrise-le parfaitement !

📖 Définition | Combinaison

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier avec $0 \leq p \leq n$. Une **combinaison** de p éléments de E est un **sous-ensemble** de E ayant exactement p éléments.

Le nombre de telles combinaisons se note $\binom{n}{p}$ (lu « p parmi n ») ou parfois C_n^p .

Caractéristiques :

- ⚡ L'ordre ne compte **pas** : $\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$ (même sous-ensemble).
- ⚡ **Pas de répétition** : un élément est soit dans le sous-ensemble, soit il n'y est pas.

💡 Intuition | D'où vient la formule ?

Voici le raisonnement-clé, qui relie arrangements et combinaisons. C'est la preuve la plus importante de la section.

On veut compter le nombre d'arrangements de p éléments parmi n (qu'on connaît déjà : c'est A_n^p) d'une **autre façon**, en deux étapes :

1. **Étape 1 : choisir les p éléments** (sans se soucier de l'ordre). C'est exactement une combinaison : il y a $\binom{n}{p}$ façons de le faire.
2. **Étape 2 : ordonner les p éléments choisis**. Il y a $p!$ façons de le faire (c'est une permutation de p éléments).

Par le principe multiplicatif, ces deux étapes donnent : $A_n^p = \binom{n}{p} \times p!$

On en déduit immédiatement :

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$$

En clair : la combinaison, c'est l'arrangement **dont on a effacé l'ordre**. On « désordonne » en divisant par le nombre de façons de réordonner les éléments choisis.

★ Théorème | Nombre de combinaisons

Pour $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

 Démonstration

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \square$$

💡 Exemple | Calculs de base — à savoir faire sans calculatrice

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = \frac{720}{6} = 120$$

$$\binom{100}{2} = \frac{100 \times 99}{2 \times 1} = 4\,950$$

Cas particuliers importants (vrais pour tout n) :

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{n} = 1$$

Interprétation : il y a 1 seule façon de ne rien choisir, n façons de choisir 1 élément, et 1 seule façon de tout choisir.

✂ Méthode | Astuce de calcul rapide

Pour calculer $\binom{n}{p}$ à la main, utilise la forme avec p facteurs au numérateur et $p!$ au dénominateur :

$$\binom{n}{p} = \frac{\overbrace{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}^{p \text{ termes consécutifs décroissants}}}{\underbrace{p \times (p-1) \times \cdots \times 1}_{=p!}}$$

Et grâce à la symétrie (voir plus bas), choisis toujours le plus petit entre p et $n-p$ pour minimiser les calculs.

Exemple : $\binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20 \times 19}{2} = 190$. Beaucoup plus rapide que de calculer $\frac{20!}{18! \cdot 2!}$ en entier !

3.8 Propriétés fondamentales des combinaisons

✓ Propriété | Symétrie

Pour $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Démonstration

Par le calcul :

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)! (n - (n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)! p!} = \binom{n}{p} \quad \square$$

Intuition

La preuve combinatoire est encore plus éclairante : choisir p éléments **à prendre** dans un ensemble de n , c'est exactement la même chose que choisir $n - p$ éléments **à laisser**. Les deux opérations sont en bijection parfaite, donc il y a le même nombre de façons de les réaliser.

✓ Propriété | Formule de Pascal

Pour $1 \leq p \leq n - 1$:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Démonstration | Preuve combinatoire — la plus belle

Soit E un ensemble à n éléments, et fixons un élément particulier $a \in E$. Les sous-ensembles de E à p éléments se répartissent en deux catégories **disjointes et exhaustives** :

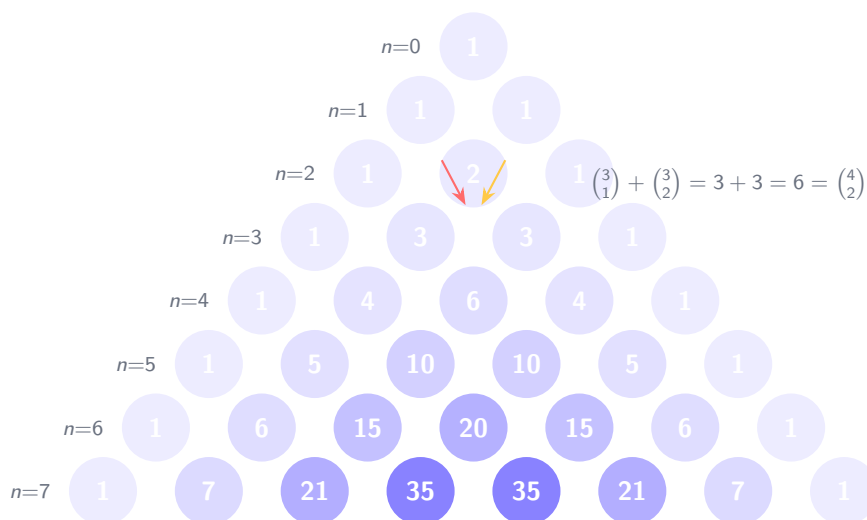
- **Ceux qui contiennent a** : L'élément a est déjà dans le sous-ensemble, donc il reste à choisir $p - 1$ éléments parmi les $n - 1$ éléments restants (tous sauf a). Il y a $\binom{n-1}{p-1}$ façons.
- **Ceux qui ne contiennent pas a** : On doit choisir p éléments parmi les $n - 1$ éléments restants (tous sauf a). Il y a $\binom{n-1}{p}$ façons.

Comme ces deux cas couvrent **toutes** les possibilités et sont **disjoints** (un sous-ensemble contient a ou ne le contient pas, jamais les deux), on additionne :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \quad \square$$

Cette preuve est particulièrement élégante car elle ne nécessite aucun calcul algébrique — elle repose uniquement sur un raisonnement combinatoire.

Cette formule permet de construire le célèbre **triangle de Pascal** ligne par ligne, chaque nombre étant la somme des deux nombres au-dessus de lui :



✓ Propriété | Somme des coefficients binomiaux

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$$

Démonstration | Deux preuves

Preuve combinatoire : 2^n est le nombre total de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments. En effet, pour construire un sous-ensemble, on décide pour chacun des n éléments s'il est « dedans » ou « dehors » : 2 choix par élément, soit 2^n sous-ensembles au total.

Or $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p}$ compte également le nombre total de sous-ensembles, classés par leur taille p (de $p = 0$ à $p = n$). Les deux expressions comptent la même chose, donc elles sont égales. $\square$

Preuve algébrique : Poser $a = 1$ et $b = 1$ dans le binôme de Newton : $(1+1)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \cdot 1^{n-p} \cdot 1^p = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p}$. Donc $2^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p}$. $\square$

3.9 Formule du binôme de Newton

★ Théorème | Binôme de Newton

Pour tous réels a et b et tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

En écrivant tous les termes :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

 Démonstration / Idée de la preuve par récurrence

Initialisation ($n = 0$) : $(a + b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^0 b^0 = 1$. C'est cohérent. ✓

Hérédité : On suppose la formule vraie au rang n . Alors :

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \end{aligned}$$

En changeant l'indice dans la deuxième somme ($j = k + 1$) et en regroupant les termes de même puissance, on fait apparaître $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ (formule de Pascal), ce qui donne la formule au rang $n + 1$. □

 Exemple | Développements classiques à connaître

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(1 + x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

Deux cas particuliers très utiles (retiens-les !) :

— $a = 1, b = 1$: $(1 + 1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ (somme de la ligne n du triangle).

— $a = 1, b = -1$: $(1 - 1)^n = 0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$ (somme alternée nulle).

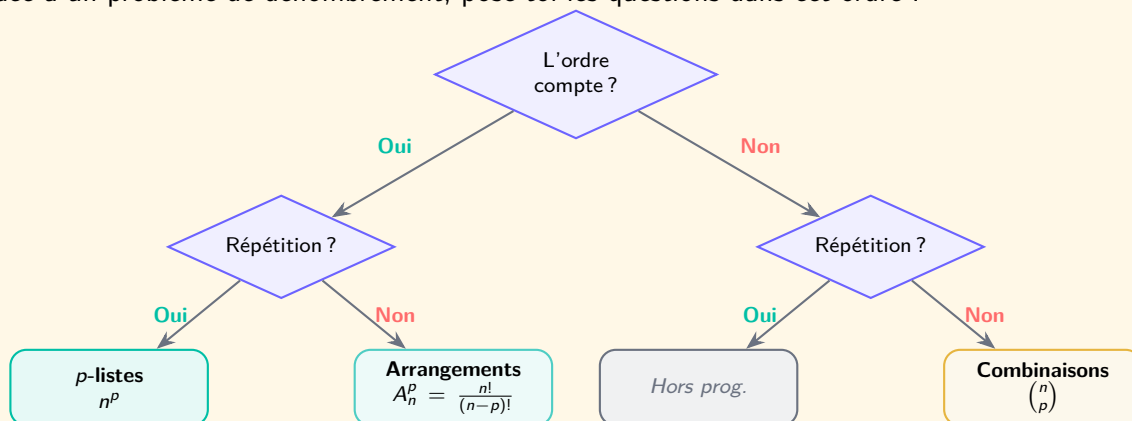
Le deuxième cas nous dit que dans chaque ligne du triangle de Pascal, la somme des termes de rang pair est égale à la somme des termes de rang impair.

4 La boîte à outils — Réflexes pour le bac

Cette section est ta **check-list** avant chaque exercice de dénombrement. Lis-la, relis-la, et apprends-la par cœur.

Méthode | L'arbre de décision du dénombrement

Face à un problème de dénombrement, pose-toi les questions dans cet ordre :



Méthode | Les mots-clés à repérer dans les énoncés

Tu lis dans l'énoncé...

Tu penses à...

code, mot de passe, numéro, plaque, code PIN

p -liste $\Rightarrow n^p$

classement, podium, rang, placer dans des positions, élire un bureau

arrangement $\Rightarrow A_n^p$

ranger, ordonner **tous** les éléments, permuter

permutation $\Rightarrow n!$

choisir, comité, groupe, équipe, main de cartes, lot, délégation

combinaison $\Rightarrow \binom{n}{p}$

« au moins un » / « aucun » / « au plus »

penser au **complémentaire**

condition 1 **ET** condition 2

multiplier les possibilités

condition 1 **OU** condition 2 (cas disjoints)

additionner les possibilités

Attention | Top 5 des erreurs au bac

1. **Confondre comité et bureau.** Un *comité* (pas de rôles) $\Rightarrow$ combinaison. Un *bureau* (président, trésorier...) $\Rightarrow$ arrangement.
2. **Oublier le complémentaire.** Dès que l'énoncé dit « au moins un », calcule le complémentaire (« aucun ») et soustrais du total.
3. **Compter deux fois.** Si les cas ne sont pas disjoints, il faut soustraire l'intersection (formule d'inclusion-exclusion). Vérifie toujours que tes cas sont bien disjoints !

4. **Mélanger les approches.** Un même problème peut combiner une partie « liste » et une partie « combinaison ». Identifie chaque étape séparément, puis multiplie (principe multiplicatif).
5. **Erreur de calcul.** Avec les factorielles, simplifie **toujours avant** de multiplier. Ne calcule jamais $12!$ en entier si tu peux simplifier !

✂ Méthode | Récapitulatif des formules

Situation	Ordre	Rép.	Formule
p -liste	✓	✓	n^p
Arrangement	✓	✗	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Permutation	✓	✗	$n!$
Combinaison	✗	✗	$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Relations clés à retenir :

- $A_n^p = \binom{n}{p} \times p!$ (combinaison $\times$ ordres = arrangement)
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ (symétrie)
- $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ (formule de Pascal)
- $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$ (somme des coefficients binomiaux)
- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ (binôme de Newton)

5 Exercices

Exercice 1 — Échauffement : listes et produit cartésien

- Un mot de passe est formé de 3 lettres majuscules suivies de 2 chiffres. Combien de mots de passe possibles ?
- On lance 4 dés à 6 faces (distinguables). Combien de résultats possibles ?
- Combien de nombres de 4 chiffres (de 1000 à 9999) sont pairs ?
- Un QCM comporte 10 questions, chacune avec 4 réponses possibles (une seule cochée par question). Combien de grilles de réponses possibles ?

Exercice 2 — Calculs de combinaisons

Calculer sans calculatrice :

- | | | |
|-------------------|--------------------|----------------------|
| a) $\binom{6}{2}$ | c) $\binom{10}{4}$ | e) $\binom{12}{11}$ |
| b) $\binom{8}{3}$ | d) $\binom{7}{0}$ | f) $\binom{100}{98}$ |

Exercice 3 — Permutations et anagrammes

- Combien d'anagrammes du mot « LYCEE » peut-on former ? (Attention aux lettres répétées.)
- De combien de manières peut-on ranger 8 livres **tous différents** sur une étagère ?
- 5 personnes s'assoient autour d'une **table ronde**. De combien de façons ? (Deux dispositions identiques par rotation sont considérées comme une seule.)

Exercice 4 — Triangle de Pascal et formule de Pascal

- Construire les lignes $n = 0$ à $n = 8$ du triangle de Pascal.
- Vérifier la formule de Pascal sur l'exemple $\binom{7}{3} = \binom{6}{2} + \binom{6}{3}$.
- Calculer $\sum_{k=0}^6 \binom{6}{k}$ de deux façons (par le triangle, puis par la formule).
- En déduire $\sum_{k=0}^6 (-1)^k \binom{6}{k}$.

Exercice 5 — Binôme de Newton

- Développer $(2x + 1)^4$ à l'aide de la formule du binôme.
- Quel est le coefficient de x^3 dans le développement de $(1 - 3x)^6$?
- Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n$.
- Montrer que $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 3^k = (-2)^n$.

Exercice 6 — Compter par le complémentaire

- Combien de nombres entiers de 1 à 1000 ne sont divisibles ni par 3, ni par 5 ?
- Un mot de passe de 6 caractères est formé de lettres minuscules (26 lettres). Combien de mots de passe contiennent **au moins une** voyelle ?

Exercice 7 ★★☆☆ — **Comités et équipes**

Une classe de 35 élèves comprend 20 filles et 15 garçons.

- De combien de façons peut-on former un comité de 5 élèves ?
- De combien de façons si le comité doit comprendre exactement 3 filles et 2 garçons ?
- De combien de façons si le comité doit comprendre **au moins une fille** ?
- De combien de façons si le comité doit comprendre **au moins une fille et au moins un garçon** ?

Exercice 8 ★★☆☆ — **Chemins sur un quadrillage**

On se déplace sur un quadrillage de $(0, 0)$ à $(5, 3)$ en ne faisant que des pas vers la droite (D) ou vers le haut (H).

- Justifier qu'un chemin est entièrement déterminé par un mot de 8 lettres formé de 5 D et 3 H.
- En déduire le nombre total de chemins.
- Combien de chemins passent par le point $(2, 1)$?
- Combien de chemins **ne passent pas** par le point $(2, 1)$?

Exercice 9 ★★☆☆ — **Jeu de cartes (32 cartes)**

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes (8 cartes par couleur : pique, cœur, carreau, trèfle).

- Combien de mains de 5 cartes peut-on former ?
- Combien de mains contiennent exactement 2 piques ?
- Combien de mains contiennent **au moins une carte de chaque couleur** ?
- Combien de mains contiennent exactement un as ?

Exercice 10 ★★☆☆ — **Diagonales d'un polygone**

- Un polygone convexe a n sommets ($n \geq 3$). Combien de diagonales possède-t-il ?
- Combien de diagonales a un décagone (10 côtés) ?
- Combien de triangles peut-on former en utilisant uniquement des sommets du décagone ?

Exercice 11 ★★★★★ — **Démonstrations de cours**

- Démontrer par récurrence que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ pour tout $n \geq 0$.
- Démontrer l'**identité de Vandermonde** : $\sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}$.

Exercice 12 ★★★★★ — **Tirage et probabilités**

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire 4 boules simultanément.

- Nombre total de tirages possibles ?
- Combien de tirages contiennent la boule 1 ?
- Combien contiennent la boule 1 **et** la boule 2 ?
- Combien contiennent la boule 1 **ou** la boule 2 (ou les deux) ?
- En déduire $P(\text{« le tirage contient au moins l'une des boules 1 ou 2 »})$.

6 🐼 Problème — Les partitions d'un ensemble ★★

🔥 Problème style prépa

Ce problème explore les **nombre de Stirling de seconde espèce** $S(n, k)$, qui comptent le nombre de façons de partitionner un ensemble à n éléments en exactement k parties non vides. Il mêle dénombrement, récurrence et binôme.

Soit E un ensemble fini à n éléments ($n \geq 1$). On appelle **partition** de E en k parties tout ensemble $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ tel que :

- les A_i sont non vides,
- les A_i sont deux à deux disjoints ($A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$),
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = E$.

On note $S(n, k)$ le nombre de telles partitions.

Partie A — Cas particuliers et premières valeurs

1. Justifier que $S(n, 1) = 1$ pour tout $n \geq 1$.
2. Justifier que $S(n, n) = 1$ pour tout $n \geq 1$.
3. Calculer $S(3, 2)$ en listant toutes les partitions de $\{a, b, c\}$ en 2 parties.
4. Calculer $S(4, 2)$ en utilisant la même méthode.
5. Justifier que $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$ pour tout $n \geq 2$.

Partie B — Relation de récurrence

Soit $n \geq 2$ et $2 \leq k \leq n$. On fixe un élément $x \in E$.

6. Supposons que $\{x\}$ forme à lui seul une partie. Montrer que le nombre de telles partitions est $S(n-1, k-1)$.
7. Supposons que x est dans une partie avec d'autres éléments. Montrer que le nombre de telles partitions est $k \cdot S(n-1, k)$.
8. En déduire : $S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$.
9. Construire le tableau de $S(n, k)$ pour $1 \leq n \leq 6$ et $1 \leq k \leq n$.

Partie C — Lien avec les surjections

On note $\text{Surj}(n, k)$ le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à k éléments.

10. Montrer que $\text{Surj}(n, k) = k! \cdot S(n, k)$.
11. Vérifier que le nombre total de fonctions est k^n .
12. **(Bonus)** Montrer par inclusion-exclusion : $\text{Surj}(n, k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$, et en déduire une formule explicite pour $S(n, k)$.

7 Corrigés détaillés

Chaque corrigé est **entièrement rédigé** comme on l'attendrait dans une copie de bac ou de concours.

Corrigé — Exercice 1

- a) **Analyse de la situation.** Un mot de passe est formé de 3 lettres majuscules suivies de 2 chiffres. L'ordre des caractères compte (le mot de passe ABC12 n'est pas le même que BAC12), et les répétitions sont autorisées (on peut avoir AAA11).

On est dans la situation d'un **produit cartésien** de 5 ensembles :

- Les 3 premières positions : chacune choisie dans $\{A, B, \dots, Z\}$ (26 possibilités).
- Les 2 dernières positions : chacune choisie dans $\{0, 1, \dots, 9\}$ (10 possibilités).

Par le principe multiplicatif :

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 = 26^3 \times 10^2 = 17\,576 \times 100 = \mathbf{1\,757\,600}$$

Il y a donc 1 757 600 mots de passe possibles.

- b) **Analyse.** Chaque dé peut donner un résultat parmi $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Les 4 dés étant **distinguables** (on parle du dé n°1, du dé n°2, etc.), le résultat global est un quadruplet (d_1, d_2, d_3, d_4) , c'est-à-dire une 4-liste de $\{1, \dots, 6\}$.

Le nombre de résultats possibles est :

$$6^4 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 = \mathbf{1\,296}$$

- c) **Analyse.** Un nombre de 4 chiffres s'écrit $\overline{abcd}$ où a est le chiffre des milliers, b celui des centaines, c celui des dizaines, d celui des unités.

Pour que ce nombre soit compris entre 1000 et 9999 : $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$ (9 choix, car $a \neq 0$).

Pour b et c : aucune contrainte particulière, donc $b, c \in \{0, 1, \dots, 9\}$ (10 choix chacun).

Pour que le nombre soit **pair**, il faut que le dernier chiffre soit pair : $d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ (5 choix).

Par le principe multiplicatif :

$$9 \times 10 \times 10 \times 5 = \mathbf{4\,500}$$

Il y a 4 500 nombres de 4 chiffres qui sont pairs.

- d) **Analyse.** Pour chaque question, l'élève coche exactement une réponse parmi 4. Les 10 questions sont indépendantes. Une grille de réponses est donc une 10-liste de $\{A, B, C, D\}$ (ou $\{1, 2, 3, 4\}$, peu importe).

Le nombre de grilles possibles est :

$$4^{10} = \mathbf{1\,048\,576}$$

C'est plus d'un million de grilles ! Cela montre qu'en répondant au hasard, la probabilité d'avoir tout juste est $\frac{1}{1\,048\,576} \approx 0,000\,001$, soit quasiment nulle.

Corrigé — Exercice 2

Pour chaque calcul, on utilise la formule $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$ en choisissant le plus petit entre p et $n-p$.

a) $\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = \frac{30}{2} = \mathbf{15}$

Vérification : les sous-ensembles à 2 éléments de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sont $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{5, 6\}$. On peut les compter : il y en a bien 15.

- b) $\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = \frac{336}{6} = \mathbf{56}$
 c) $\binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{5040}{24} = \mathbf{210}$
 d) $\binom{7}{0} = \mathbf{1}$

Justification : il n'y a qu'une seule façon de choisir 0 éléments dans un ensemble : ne rien choisir.
 Par la formule : $\binom{7}{0} = \frac{7!}{0! \cdot 7!} = \frac{1}{1} = 1$.

- e) $\binom{12}{11} = \binom{12}{1} = \mathbf{12}$

Justification : par la propriété de symétrie, $\binom{12}{11} = \binom{12}{12-11} = \binom{12}{1} = 12$. Intuitivement : choisir 11 éléments parmi 12 revient à choisir le seul élément qu'on **ne prend pas**. Il y a 12 façons de faire.

- f) $\binom{100}{98} = \binom{100}{2} = \frac{100 \times 99}{2 \times 1} = \frac{9900}{2} = \mathbf{4\,950}$

On a utilisé la symétrie ($\binom{100}{98} = \binom{100}{2}$) pour simplifier considérablement le calcul. Sans cette astuce, il aurait fallu manipuler $\frac{100!}{98! \cdot 2!}$, ce qui est beaucoup plus lourd.

Corrigé — Exercice 3

- a) **Anagrammes de LYCEE.** Le mot LYCEE comporte 5 lettres : L, Y, C, E, E. Toutes les lettres sont distinctes **sauf** la lettre E qui apparaît **2 fois**.

Si toutes les lettres étaient distinctes, le nombre d'anagrammes serait $5! = 120$. Mais puisque la lettre E est répétée 2 fois, chaque anagramme est comptée $2! = 2$ fois (car échanger les deux E entre eux donne le même mot visible). On divise donc par $2!$:

$$\frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = \mathbf{60}$$

Le mot LYCEE admet 60 anagrammes.

- b) **Ranger 8 livres.** Ranger 8 livres tous différents sur une étagère revient à choisir un **ordre** pour ces 8 livres. C'est une **permutation** de 8 éléments :

$$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \mathbf{40\,320}$$

- c) **Table ronde.** Pour 5 personnes autour d'une table ronde, on considère que deux dispositions obtenues l'une de l'autre par **rotation** sont identiques.

Méthode : On fixe une personne à une place (par exemple Alice reste en haut de la table). Les 4 personnes restantes occupent les 4 places restantes, d'où $4!$ dispositions.

Justification formelle : En ligne, il y aurait $5! = 120$ dispositions. Mais chaque disposition circulaire correspond à 5 dispositions en ligne (une pour chaque rotation). Donc le nombre de dispositions circulaires est :

$$\frac{5!}{5} = (5 - 1)! = 4! = \mathbf{24}$$

De manière générale, le nombre de façons de placer n personnes autour d'une table ronde est $(n - 1)!$.

Corrigé — Exercice 4

- a) Le triangle de Pascal de $n = 0$ à $n = 8$, construit grâce à la formule de Pascal ($\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$) :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Chaque nombre est la somme des deux nombres situés juste au-dessus de lui (un à gauche, un à droite). Les bords sont toujours égaux à 1.

b) On vérifie : $\binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 15 + 20 = 35$. D'autre part, $\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = \frac{210}{6} = 35$. On a bien $\binom{7}{3} = \binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 35$. ✓

c) **Première méthode (par le triangle) :** On lit la ligne $n = 6$ et on additionne :

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$$

Deuxième méthode (par la formule) : On sait que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$. Pour $n = 6$:

$$\sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} = 2^6 = 64 \quad \checkmark$$

Les deux méthodes donnent bien le même résultat.

d) On utilise le binôme de Newton avec $a = 1$ et $b = -1$:

$$(1 + (-1))^6 = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} \cdot 1^{6-k} \cdot (-1)^k = \sum_{k=0}^6 (-1)^k \binom{6}{k}$$

Or $(1 - 1)^6 = 0^6 = 0$. Donc :

$$\sum_{k=0}^6 (-1)^k \binom{6}{k} = 0$$

Cela signifie que la somme des coefficients de rang pair ($\binom{6}{0} + \binom{6}{2} + \binom{6}{4} + \binom{6}{6} = 1 + 15 + 15 + 1 = 32$) est égale à la somme des coefficients de rang impair ($\binom{6}{1} + \binom{6}{3} + \binom{6}{5} = 6 + 20 + 6 = 32$). Leur différence vaut bien 0.

Corrigé — Exercice 5

a) On applique la formule du binôme de Newton à $(2x + 1)^4$ avec $a = 2x$ et $b = 1$:

$$\begin{aligned} (2x + 1)^4 &= \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} (2x)^{4-k} \cdot 1^k \\ &= \binom{4}{0} (2x)^4 + \binom{4}{1} (2x)^3 + \binom{4}{2} (2x)^2 + \binom{4}{3} (2x)^1 + \binom{4}{4} (2x)^0 \\ &= 1 \cdot 16x^4 + 4 \cdot 8x^3 + 6 \cdot 4x^2 + 4 \cdot 2x + 1 \cdot 1 \\ &= 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1 \end{aligned}$$

b) On développe $(1 - 3x)^6$ avec $a = 1$ et $b = -3x$:

$$(1 - 3x)^6 = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} \cdot 1^{6-k} \cdot (-3x)^k = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} (-3)^k x^k$$

Le coefficient de x^3 correspond au terme $k = 3$:

$$\binom{6}{3}(-3)^3 = 20 \times (-27) = -540$$

c) On veut montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n$.

On applique le binôme de Newton à $(1+2)^n$ avec $a = 1$ et $b = 2$:

$$(1+2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot 2^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$$

Or $(1+2)^n = 3^n$. Donc $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n$. □

d) On veut montrer que $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 3^k = (-2)^n$.

On applique le binôme à $(1+(-3))^n$ avec $a = 1$ et $b = -3$:

$$(1-3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot (-3)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \cdot 3^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 3^k$$

Or $(1-3)^n = (-2)^n$. D'où le résultat. □

Corrigé — Exercice 6

a) **Énoncé** : combien d'entiers de 1 à 1000 ne sont divisibles ni par 3, ni par 5 ?

On note A l'ensemble des multiples de 3 dans $\{1, \dots, 1000\}$ et B l'ensemble des multiples de 5.

Calcul des cardinaux :

— $\text{Card}(A) = \lfloor 1000/3 \rfloor = 333$ (le plus grand multiple de 3 inférieur ou égal à 1000 est $333 \times 3 = 999$).

— $\text{Card}(B) = \lfloor 1000/5 \rfloor = 200$ (le plus grand multiple de 5 est $200 \times 5 = 1000$).

— $A \cap B =$ multiples de 15 (car $\text{ppcm}(3, 5) = 15$) : $\text{Card}(A \cap B) = \lfloor 1000/15 \rfloor = 66$.

Application de l'inclusion-exclusion :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) = 333 + 200 - 66 = 467$$

$A \cup B$ est l'ensemble des entiers divisibles par 3 **ou** par 5 (ou les deux). Le complémentaire de $A \cup B$ est l'ensemble des entiers qui ne sont divisibles ni par 3, ni par 5 :

$$1000 - 467 = 533$$

b) **Énoncé** : mot de passe de 6 lettres minuscules, combien contiennent au moins une voyelle ?

Stratégie : on utilise le complémentaire. « Au moins une voyelle » est le complémentaire de « aucune voyelle » (c'est-à-dire uniquement des consonnes).

Calculs :

— Nombre total de mots de passe de 6 lettres : $26^6 = 308\,915\,776$.

— Nombre de mots de passe sans aucune voyelle : les 5 voyelles (a, e, i, o, u) étant exclues, il reste 21 consonnes. Chaque position a 21 choix : $21^6 = 85\,766\,121$.

Résultat :

$$26^6 - 21^6 = 308\,915\,776 - 85\,766\,121 = 223\,149\,655$$

Corrigé — Exercice 7

Rappel : classe de 35 élèves, 20 filles (F) et 15 garçons (G).

- a) On forme un comité de 5 élèves. Un comité est un **sous-ensemble** de la classe (l'ordre ne compte pas, pas de répétition). C'est une **combinaison** :

$$\binom{35}{5} = \frac{35 \times 34 \times 33 \times 32 \times 31}{5!} = \frac{35 \times 34 \times 33 \times 32 \times 31}{120} = \mathbf{324\,632}$$

- b) On veut **exactement 3 filles ET 2 garçons**. On décompose en deux choix indépendants :

— Choisir 3 filles parmi 20 : $\binom{20}{3} = \frac{20 \times 19 \times 18}{6} = 1\,140$ façons.

— Choisir 2 garçons parmi 15 : $\binom{15}{2} = \frac{15 \times 14}{2} = 105$ façons.

Par le principe multiplicatif (les deux choix sont indépendants) :

$$\binom{20}{3} \times \binom{15}{2} = 1\,140 \times 105 = \mathbf{119\,700}$$

- c) On veut **au moins une fille**. Le complémentaire est « **aucune fille** », c'est-à-dire un comité de 5 garçons :

$$\binom{15}{5} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11}{120} = 3\,003$$

Donc le nombre de comités avec au moins une fille est :

$$\binom{35}{5} - \binom{15}{5} = 324\,632 - 3\,003 = \mathbf{321\,629}$$

- d) On veut **au moins une fille ET au moins un garçon**. On retire du total les comités « que des filles » et « que des garçons » :

— Comités de 5 filles : $\binom{20}{5} = 15\,504$.

— Comités de 5 garçons : $\binom{15}{5} = 3\,003$.

Ces deux cas sont disjoints (un comité ne peut pas être « que des filles » et « que des garçons » en même temps). Donc :

$$324\,632 - 15\,504 - 3\,003 = \mathbf{306\,125}$$

Corrigé — Exercice 8

- a) Pour aller de (0, 0) à (5, 3) en ne se déplaçant que vers la **droite** (D) ou vers le **haut** (H), on doit effectuer exactement **5 pas vers la droite** (pour passer de l'abscisse 0 à l'abscisse 5) et **3 pas vers le haut** (pour passer de l'ordonnée 0 à l'ordonnée 3), soit **8 pas au total**.

Un chemin est entièrement déterminé par l'ordre dans lequel on effectue ces 8 pas. C'est donc un mot de 8 lettres composé de 5 lettres D et 3 lettres H.

Exemple : DDHDDHHD signifie « droite, droite, haut, droite, droite, haut, haut, droite ».

- b) Le nombre de tels mots est le nombre de façons de choisir les **3 positions** des H parmi les 8 positions (les positions restantes seront automatiquement des D). C'est une combinaison :

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = \frac{336}{6} = \mathbf{56} \text{ chemins}$$

(On aurait également pu choisir les 5 positions des D : $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$.)

- c) Un chemin passant par (2, 1) se décompose en :

« Compter, c'est choisir. »

- Un chemin de $(0, 0)$ à $(2, 1)$: il faut 2 pas D et 1 pas H, soit 3 pas. Nombre de chemins : $\binom{3}{1} = 3$.
- Un chemin de $(2, 1)$ à $(5, 3)$: il faut 3 pas D et 2 pas H, soit 5 pas. Nombre de chemins : $\binom{5}{2} = 10$.

Par le principe multiplicatif (les deux portions sont indépendantes) :

$$3 \times 10 = \mathbf{30} \text{ chemins passant par } (2, 1)$$

- d) Les chemins ne passant **pas** par $(2, 1)$ sont les chemins totaux moins ceux passant par $(2, 1)$:

$$56 - 30 = \mathbf{26} \text{ chemins}$$

Corrigé — Exercice 9

- a) Un tirage simultané de 5 cartes parmi 32 est un sous-ensemble à 5 éléments (l'ordre ne compte pas) :

$$\binom{32}{5} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{120} = \mathbf{201\,376}$$

- b) On veut **exactement 2 piques**. On décompose le choix :

- 2 cartes parmi les 8 piques : $\binom{8}{2} = 28$ façons.
- 3 cartes parmi les $32 - 8 = 24$ non-pires : $\binom{24}{3} = \frac{24 \times 23 \times 22}{6} = 2\,024$ façons.

Total : $28 \times 2\,024 = \mathbf{56\,672}$.

- c) **Au moins une carte de chaque couleur**. Avec 5 cartes et 4 couleurs, cela signifie qu'exactement **une** couleur est représentée par 2 cartes et les trois autres par 1 carte chacune.

- Choix de la couleur « doublée » : 4 façons.
- 2 cartes dans cette couleur : $\binom{8}{2} = 28$ façons.
- 1 carte dans chacune des 3 autres couleurs : $8 \times 8 \times 8 = 8^3 = 512$ façons.

Total : $4 \times 28 \times 512 = \mathbf{57\,344}$.

- d) **Exactement un as**. Il y a 4 as dans le jeu de 32 cartes (un par couleur).

- 1 as parmi 4 : $\binom{4}{1} = 4$ façons.
- 4 cartes parmi les $32 - 4 = 28$ non-as : $\binom{28}{4} = 20\,475$ façons.

Total : $4 \times 20\,475 = \mathbf{81\,900}$.

Corrigé — Exercice 10

- a) Un polygone convexe à n sommets possède des **diagonales** (segments reliant deux sommets **non consécutifs**) et des **côtés** (segments reliant deux sommets consécutifs).

Le nombre total de segments reliant 2 sommets quelconques parmi n est $\binom{n}{2}$ (on choisit 2 sommets, l'ordre ne compte pas).

Parmi ces segments, n sont des côtés du polygone. Les autres sont des diagonales. Donc :

$$\text{Nombre de diagonales} = \binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

- b) Pour un décagone ($n = 10$) : $\frac{10 \times (10-3)}{2} = \frac{10 \times 7}{2} = \mathbf{35}$ diagonales.

- c) Le nombre de triangles dont les sommets sont des sommets du décagone est le nombre de façons de choisir 3 sommets parmi 10 (trois points non alignés d'un polygone convexe forment toujours un triangle) :

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = \mathbf{120}$$

Corrigé — Exercice 11

a) **Démontrons par récurrence sur n que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ pour tout $n \geq 0$.**

Initialisation ($n = 0$) : $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} = \binom{0}{0} = 1$. D'autre part, $2^0 = 1$. Donc la propriété est vraie au rang 0. ✓

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Supposons que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ (hypothèse de récurrence). Montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}$.

On sépare le premier et le dernier terme, puis on applique la formule de Pascal aux termes centraux :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{n+1} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] + 1 \quad (\text{formule de Pascal}) \end{aligned}$$

On développe la somme en séparant les deux termes :

$$= 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} + 1$$

Dans la première somme, on pose $j = k - 1$ (quand k va de 1 à n , j va de 0 à $n - 1$) :

$$= 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} + 1$$

Or $\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} - \binom{n}{n} = 2^n - 1$ (par HR).

Et $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - \binom{n}{0} = 2^n - 1$ (par HR).

Donc :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 1 + (2^n - 1) + (2^n - 1) + 1 = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : par le principe de récurrence, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ pour tout $n \geq 0$. □

b) **Identité de Vandermonde — Preuve combinatoire.**

Considérons un ensemble E de $m + n$ éléments, partitionné en deux sous-ensembles disjoints : A contenant m éléments et B contenant n éléments.

On veut choisir p éléments dans E . Le nombre de façons de le faire est $\binom{m+n}{p}$.

Comptons autrement, en distinguant selon le nombre k d'éléments pris dans A :

- Si on prend k éléments dans A : $\binom{m}{k}$ façons.
- Il faut alors prendre $p - k$ éléments dans B : $\binom{n}{p-k}$ façons.
- Le nombre de choix avec exactement k éléments dans A est $\binom{m}{k} \binom{n}{p-k}$.

En sommant sur toutes les valeurs possibles de k (de 0 à p), et comme ces cas sont disjoints :

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} \quad \square$$

(Convention : $\binom{m}{k} = 0$ si $k > m$, et $\binom{n}{p-k} = 0$ si $p - k > n$, ce qui gère automatiquement les cas où k serait trop grand ou trop petit.)

Corrigé — Exercice 12

- a) Un tirage simultané de 4 boules parmi 10 est un sous-ensemble de $\{1, \dots, 10\}$ à 4 éléments :

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{5\,040}{24} = \mathbf{210}$$

- b) On veut les tirages contenant la boule 1. Si la boule 1 est dans le tirage, il reste à choisir 3 boules parmi les 9 restantes :

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{6} = \mathbf{84}$$

- c) On veut les tirages contenant les boules 1 **et** 2. Si les boules 1 et 2 sont fixées, il reste à choisir 2 boules parmi les 8 restantes :

$$\binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = \mathbf{28}$$

- d) On note $A =$ « la boule 1 est tirée » et $B =$ « la boule 2 est tirée ». On cherche $\text{Card}(A \cup B)$.

Par la formule d'inclusion-exclusion :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) = 84 + 84 - 28 = \mathbf{140}$$

(Remarque : $\text{Card}(A) = \text{Card}(B) = 84$ par symétrie, car les boules 1 et 2 jouent des rôles symétriques.)

- e) On est en situation d'équiprobabilité (tirage simultané). La probabilité de l'événement « au moins l'une des boules 1 ou 2 est tirée » est :

$$P(A \cup B) = \frac{\text{Card}(A \cup B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{140}{210} = \frac{2}{3} \approx \mathbf{0,667}$$

Il y a donc environ 2 chances sur 3 de tirer au moins l'une des deux boules.

Corrigé — Problème (Les partitions d'un ensemble)

Partie A — Cas particuliers

- $S(n, 1)$ est le nombre de partitions de E en **1 seule** partie non vide. La seule possibilité est de prendre E tout entier : la partition est $\{E\}$. Donc $S(n, 1) = 1$ pour tout $n \geq 1$.
- $S(n, n)$ est le nombre de partitions de E en n parties non vides. Comme $|E| = n$, chaque partie doit contenir exactement 1 élément (sinon on ne pourrait pas avoir n parties non vides). La seule partition possible est $\{\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_n\}\}$. Donc $S(n, n) = 1$ pour tout $n \geq 1$.

3. On liste toutes les partitions de $E = \{a, b, c\}$ en 2 parties non vides :

- $\{\{a\}, \{b, c\}\}$
- $\{\{b\}, \{a, c\}\}$
- $\{\{c\}, \{a, b\}\}$

Il y en a exactement 3, donc $S(3, 2) = \mathbf{3}$.

4. Partitions de $\{a, b, c, d\}$ en 2 parties non vides. Classons par tailles :

Type 1+3 : une partie à 1 élément, l'autre à 3. On choisit l'élément isolé : 4 choix. Partitions : $\{\{a\}, \{b, c, d\}\}, \{\{b\}, \{a, c, d\}\}, \{\{c\}, \{a, b, d\}\}, \{\{d\}, \{a, b, c\}\}$.

Type 2+2 : deux parties à 2 éléments. Le nombre de façons de partitionner en deux paires est $\frac{1}{2} \binom{4}{2} = \frac{6}{2} = 3$ (on divise par 2 car les deux parties ne sont pas ordonnées). Partitions : $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$, $\{\{a, c\}, \{b, d\}\}$, $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$.

Total : $S(4, 2) = 4 + 3 = 7$.

5. Une partition de E en 2 parties est de la forme $\{A, E \setminus A\}$ avec $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$. Le nombre de sous-ensembles A vérifiant ces conditions est $2^n - 2$ (on retire l'ensemble vide et E lui-même des 2^n sous-ensembles de E). Mais chaque partition est comptée **deux fois** car $\{A, E \setminus A\} = \{E \setminus A, A\}$. On divise par 2 :

$$S(n, 2) = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$$

Vérification : $S(3, 2) = 2^2 - 1 = 3 \checkmark$ $S(4, 2) = 2^3 - 1 = 7 \checkmark$

Partie B — Relation de récurrence

6. On fixe $x \in E$ et on suppose que $\{x\}$ forme à lui seul une des k parties de la partition. Les $n - 1$ éléments restants ($E \setminus \{x\}$) doivent alors être partitionnés en $k - 1$ parties non vides. Le nombre de façons de le faire est, par définition, $S(n - 1, k - 1)$.

7. Supposons que x appartient à une partie contenant au moins un autre élément. Si on **retire** x de cette partie, la partie reste non vide (elle avait au moins 2 éléments), et on obtient une partition de $E \setminus \{x\}$ ($n - 1$ éléments) en k parties non vides. Il y a $S(n - 1, k)$ telles partitions.

Réciproquement, à chaque partition de $E \setminus \{x\}$ en k parties, on peut réinsérer x dans l'une des k parties. Il y a donc k façons de le réinsérer, ce qui donne $k \cdot S(n - 1, k)$ partitions de ce type.

8. Les deux cas (question 6 et question 7) sont **disjoints** (soit $\{x\}$ est une partie, soit x est avec d'autres éléments) et **exhaustifs** (il n'y a pas d'autre possibilité). En les additionnant :

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + k \cdot S(n - 1, k) \quad \square$$

9. Tableau construit ligne par ligne grâce à la récurrence, avec $S(n, 1) = 1$ et $S(n, n) = 1$ comme conditions initiales :

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	3	1			
4	1	7	6	1		
5	1	15	25	10	1	
6	1	31	90	65	15	1

Vérification : $S(5, 3) = S(4, 2) + 3 \cdot S(4, 3) = 7 + 3 \times 6 = 25 \checkmark$

Partie C — Lien avec les surjections

10. Une surjection $f : E \rightarrow \{1, \dots, k\}$ définit une partition de E en k parties **étiquetées** : $A_i = f^{-1}(\{i\})$. Les A_i sont non vides (car f est surjective), disjoints, et recouvrent E . Réciproquement, toute partition $\{A_1, \dots, A_k\}$ **non ordonnée** peut être étiquetée de $k!$ façons (une par bijection de $\{A_1, \dots, A_k\}$ vers $\{1, \dots, k\}$), donnant $k!$ surjections distinctes. Donc :

$$\text{Surj}(n, k) = k! \cdot S(n, k) \quad \square$$

11. Le nombre total de fonctions de E (n éléments) vers F (k éléments) est k^n . En effet, pour chaque élément de E , on choisit son image parmi les k éléments de F : c'est une n -liste de F , il y en a k^n . $\checkmark$

12. Soit B_i l'ensemble des fonctions $f : E \rightarrow \{1, \dots, k\}$ telles que $i \notin \text{Im}(f)$ (la valeur i n'est jamais atteinte). Les fonctions **non surjectives** sont exactement celles de $B_1 \cup \dots \cup B_k$.

Par inclusion-exclusion, pour calculer $\text{Card}(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_j})$: ce sont les fonctions dont l'image évite les valeurs $i_1, \dots, i_j$, donc l'image est dans un ensemble à $k - j$ éléments. Le nombre de telles fonctions est $(k - j)^n$. Il y a $\binom{k}{j}$ façons de choisir les j valeurs évitées.

Par la formule d'inclusion-exclusion généralisée :

$$\text{Card}(B_1 \cup \dots \cup B_k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \binom{k}{j} (k - j)^n$$

Donc :

$$\text{Surj}(n, k) = k^n - \text{Card}(B_1 \cup \dots \cup B_k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k - j)^n \quad \square$$

(Le terme $j = 0$ donne $\binom{k}{0} k^n = k^n$, qui correspond au total.)

En combinant avec la question 10 :

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k - j)^n$$

Fin de la Fiche 1 — Dénombrement

Tu maîtrises maintenant les outils fondamentaux du dénombrement : produit cartésien, listes, permutations, arrangements, combinaisons, et binôme de Newton.

Ces notions seront essentielles pour le chapitre sur les probabilités (schéma de Bernoulli, loi binomiale).

→ Prochaine fiche : Vecteurs de l'espace.