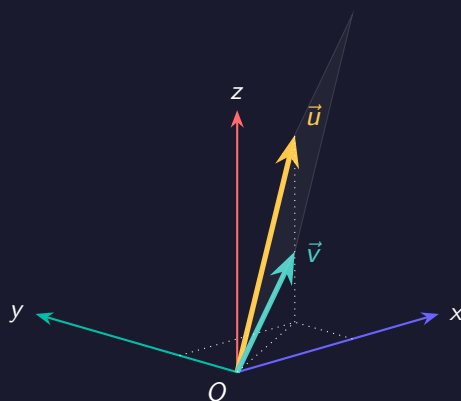


Calcul vectoriel dans l'espace

Translation ■ Combinaison linéaire ■ Colinéarité & coplanarité ■ Droites & plans



Terminale — Spécialité Mathématiques — Programme officiel



Table des matières

1	 Pourquoi étudier les vecteurs dans l'espace ?	3
1.1	Du plan à l'espace	3
1.2	Les applications concrètes	3
1.3	Ce que tu vas apprendre	3
2	 L'idée avant la formule	4
2.1	Qu'est-ce qu'un vecteur, au fond ?	4
2.2	Passer de 2D à 3D : qu'est-ce qui change ?	4
2.3	La combinaison linéaire : l'idée maîtresse	5
3	 Le cours formel	6
3.1	Rappels et généralisation : vecteurs de l'espace	6
3.2	Opérations sur les vecteurs	7
3.3	Translation	7
3.4	Combinaison linéaire	8
3.5	Colinéarité	9
3.6	Coplanarité et indépendance linéaire	10
3.7	Familles libres, bases et repères	11
3.8	Directions de droites et de plans	12
4	 La boîte à outils — Réflexes pour le bac	15
5	 Exercices	17
6	 Problème — Barycentres et coordonnées ★★ ★	19
7	 Corrigés détaillés	20

1 ? Pourquoi étudier les vecteurs dans l'espace ?

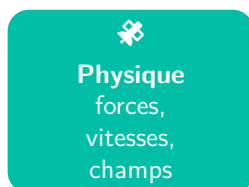
1.1 Du plan à l'espace

En Première, tu as travaillé avec des vecteurs **dans le plan** : des flèches vivant dans un monde à deux dimensions, repérées par deux coordonnées (x, y) . Tu as appris à les additionner, les multiplier par un scalaire, calculer le milieu d'un segment, et vérifier si des points sont alignés.

En Terminale, on passe à la **troisième dimension**. Le monde réel est en 3D : les bâtiments, les planètes, les molécules, les personnages de jeux vidéo — tout vit dans l'espace. Les vecteurs de l'espace sont l'outil fondamental pour décrire et manipuler cette géométrie tridimensionnelle.

La bonne nouvelle : **presque tout ce que tu sais déjà se généralise directement**. Un vecteur a maintenant 3 coordonnées au lieu de 2, et les formules sont les mêmes — avec une coordonnée supplémentaire. Les nouvelles notions spécifiques à l'espace sont essentiellement la **coplanarité** (est-ce que des vecteurs sont dans un même plan ?) et la **décomposition dans une base de l'espace** (3 vecteurs au lieu de 2).

1.2 Les applications concrètes



1.3 Ce que tu vas apprendre

Dans cette fiche, tu vas maîtriser :

- Les **opérations sur les vecteurs** de l'espace (addition, multiplication par un scalaire) et leurs coordonnées.
- La **translation** comme application géométrique des vecteurs.
- La notion de **combinaison linéaire** — la clé de voûte de tout le chapitre.
- La **colinéarité** (deux vecteurs dans la même direction) et la **coplanarité** (trois vecteurs dans un même plan).
- Les **bases** de l'espace et les **repères**.
- Les **directions de droites et de plans**, et comment vérifier qu'un point appartient à une droite ou un plan.

2 L'idée avant la formule

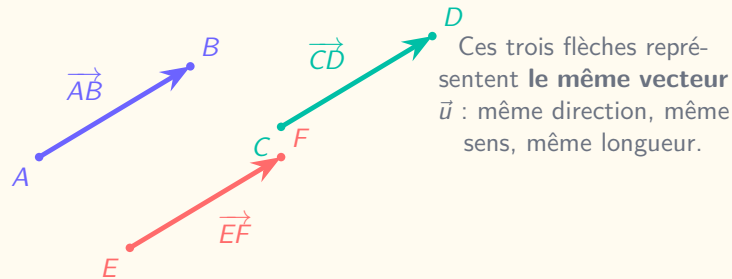
2.1 Qu'est-ce qu'un vecteur, au fond ?

Intuition | Un vecteur, c'est un déplacement

Oublie un instant les coordonnées et les formules. Un vecteur, dans sa signification la plus profonde, c'est un **déplacement** : une instruction qui dit « va de tel endroit à tel autre ». Plus précisément, un vecteur a trois caractéristiques :

- Une **direction** (horizontale, verticale, en diagonale...).
- Un **sens** (vers la droite ou vers la gauche, vers le haut ou le bas...).
- Une **norme** (la longueur du déplacement).

Ce qui est fondamental : un vecteur **n'a pas de point d'attache**. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ représente le déplacement de A vers B , mais le **même déplacement** peut être appliqué à n'importe quel point de l'espace. C'est la différence entre un vecteur (un déplacement libre) et un bipoint (un segment orienté fixé).



2.2 Passer de 2D à 3D : qu'est-ce qui change ?

Intuition | La troisième coordonnée

Dans le plan, un vecteur $\vec{u}$ a deux coordonnées : $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Cela signifie que $\vec{u}$ se décompose en x fois le vecteur horizontal $\vec{i}$ et y fois le vecteur vertical $\vec{j}$.

Dans l'espace, on ajoute un **troisième axe** (l'axe z , souvent orienté vers le haut ou vers l'avant) et un troisième vecteur de base $\vec{k}$. Un vecteur $\vec{u}$ a alors trois coordonnées :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

La coordonnée z indique le déplacement le long de ce nouvel axe. **C'est la seule vraie nouveauté** par rapport à ce que tu connaissais en Première. Toutes les formules se généralisent en ajoutant simplement la troisième composante.

2.3 La combinaison linéaire : l'idée maîtresse



Intuition | Fabriquer des vecteurs à partir d'autres

La notion de **combinaison linéaire** est l'idée la plus importante de tout le chapitre (et même de toute l'algèbre linéaire, que tu découvriras en études supérieures).

L'idée est simple : à partir de vecteurs donnés, on peut en « fabriquer » de nouveaux en les **ajoutant** et en les **étirant/compressant** (c'est-à-dire en les multipliant par des nombres réels).

Par exemple, si tu as deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur $3\vec{u} - 2\vec{v}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. C'est le vecteur obtenu en prenant 3 fois $\vec{u}$ et en retranchant 2 fois $\vec{v}$.

La question fondamentale du chapitre est : **quels vecteurs peut-on fabriquer à partir d'un ensemble de vecteurs donnés ?** C'est cette question qui mène aux notions de colinéarité, coplanarité, indépendance linéaire et base.

3 Le cours formel

3.1 Rappels et généralisation : vecteurs de l'espace

Définition | Vecteur de l'espace

On travaille dans l'espace euclidien à trois dimensions. Un **vecteur** de l'espace est caractérisé par une direction, un sens et une norme. Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont même direction, même sens et même norme.

À tout couple de points (A, B) de l'espace, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$, qui représente le déplacement de A vers B .

Le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$, est le vecteur de norme nulle. Il vérifie $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ pour tout point A .

Définition | Coordonnées d'un vecteur dans un repère

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de manière **unique** :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Les réels x, y, z sont les **coordonnées** (ou **composantes**) de $\vec{u}$ dans ce repère. On note $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ sont deux points, alors :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Autrement dit, pour trouver les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, on fait **arrivée moins départ** coordonnée par coordonnée.

Exemple

Soient $A(1, 3, -2)$ et $B(4, 1, 5)$. Alors :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 1 - 3 \\ 5 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ce vecteur signifie : pour aller de A à B , on se déplace de 3 unités selon $\vec{i}$, de -2 unités selon $\vec{j}$ (donc 2 unités dans le sens opposé), et de 7 unités selon $\vec{k}$.

Attention | Sens de la soustraction

Pour $\overrightarrow{AB}$, c'est toujours **B - A** (point d'arrivée - point de départ), et non l'inverse ! Si tu te trompes de sens, ton vecteur sera l'opposé du bon : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

3.2 Opérations sur les vecteurs

Toutes les opérations sur les vecteurs se font **coordonnée par coordonnée**. Rien de compliqué, il suffit de tout traiter composante par composante.

✓ Propriété | Opérations en coordonnées

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs, et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire.

— **Addition** : $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$

— **Multiplication par un scalaire** : $\lambda \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$

— **Soustraction** : $\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{pmatrix}$

— **Vecteur opposé** : $-\vec{u} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$

— **Égalité** : $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x = x'$ **et** $y = y'$ **et** $z = z'$ (les trois coordonnées coïncident).

💡 Exemple

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 + (-1) \\ -1 + 4 \\ 3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$3\vec{u} - 2\vec{v} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - (-2) \\ -3 - 8 \\ 9 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3.3 Translation

📖 Définition | Translation

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. La **translation de vecteur** $\vec{u}$ est l'application qui, à tout point M de l'espace, associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

On note cette translation $t_{\vec{u}}$: $t_{\vec{u}}(M) = M'$ où $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

En coordonnées : si $M(x, y, z)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors $M'(x + a, y + b, z + c)$.

Intuition

La translation est le déplacement le plus simple qui existe : on « glisse » chaque point de l'espace de la même manière, sans rotation ni déformation. C'est comme si tu déplaçais un objet 3D sans le tourner.

Propriété essentielle : une translation conserve les distances, les angles, les droites parallèles, et le parallélisme des plans. Elle transforme tout segment $[AB]$ en un segment $[A'B']$ de même longueur et parallèle à $[AB]$.

Propriété | Propriétés de la translation

Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$, et soient $A' = t_{\vec{u}}(A)$, $B' = t_{\vec{u}}(B)$.

- $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ (la translation conserve les vecteurs).
- $A'B' = AB$ (elle conserve les distances).
- $[A'B'] \parallel [AB]$ (elle conserve le parallélisme).
- $ABB'A'$ est un parallélogramme (éventuellement aplati si $\vec{u} \parallel \overrightarrow{AB}$).

Exemple

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $A(2, 5, -1)$. L'image de A par la translation $t_{\vec{u}}$ est :

$$A' = (2 + 1, 5 + (-2), -1 + 3) = (3, 3, 2)$$

3.4 Combinaison linéaire

Définition | Combinaison linéaire

Soient $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ des vecteurs de l'espace et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ des réels. Le vecteur :

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p$$

est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ avec les coefficients (ou scalaires) $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

En d'autres termes, on « fabrique » le vecteur $\vec{v}$ en prenant un peu de chaque vecteur $\vec{u}_i$, avec des proportions données par les coefficients λ_i .

Exemple

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculons $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$:

$$\vec{w} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - (-3) \\ 0 - 9 \\ 4 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ avec les coefficients 2 et -3 .

3.5 Colinéarité

Définition | Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, ou bien s'il existe un réel μ tel que $\vec{u} = \mu\vec{v}$.

Autrement dit, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si l'un est un **multiple scalaire** de l'autre.

Convention : le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur (car $\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}$).

Intuition | Interprétation géométrique

Deux vecteurs colinéaires ont la **même direction** (ou des directions opposées). Géométriquement, ils sont « parallèles » : si on les place bout à bout, ils restent sur une même droite.

Conséquence capitale : trois points A, B, C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires**.

Propriété | Critère de colinéarité en coordonnées

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y, \quad z' = \lambda z$$

Cela revient à vérifier que les **rapports** des coordonnées sont tous égaux (quand c'est défini) :

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \lambda$$

Condition équivalente (plus pratique quand des coordonnées sont nulles) : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si les trois « déterminants 2×2 » suivants sont tous nuls :

$$xy' - x'y = 0 \quad \text{et} \quad xz' - x'z = 0 \quad \text{et} \quad yz' - y'z = 0$$

 Exemple

$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. On vérifie : $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}$ car $-1 = -\frac{1}{2} \times 2$, $3 = -\frac{1}{2} \times (-6)$, $-2 = -\frac{1}{2} \times 4$.

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**.

$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. On teste : $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{4}{2} = 2$, mais $\frac{5}{3} \neq 2$. Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont **pas** colinéaires.

 Attention | Piège quand une coordonnée est nulle

Si une coordonnée de $\vec{u}$ est nulle, il faut que la coordonnée correspondante de $\vec{v}$ soit aussi nulle pour qu'ils puissent être colinéaires.

Exemple : $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$. La première coordonnée de $\vec{u}$ est 0, mais celle de $\vec{v}$ est $1 \neq 0$. Ils ne sont **pas** colinéaires (aucun réel λ ne vérifie $1 = \lambda \times 0$).

3.6 Coplanarité et indépendance linéaire

C'est la grande nouveauté de la Terminale par rapport à la Première.

 Définition | Vecteurs coplanaires

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont **coplanaires** s'il existe un plan contenant des représentants de ces trois vecteurs. Autrement dit, ils sont coplanaires si l'un d'entre eux peut s'écrire comme combinaison linéaire des deux autres :

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

Attention : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont déjà colinéaires, alors $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont automatiquement coplanaires si $\vec{w}$ est aussi colinéaire à $\vec{u}$, ou si $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$. La condition est plus subtile dans ces cas dégénérés, mais au bac on travaille généralement avec des vecteurs non colinéaires.

 Intuition | Comprendre la coplanarité

Pense à trois flèches dans l'espace. Si elles sont toutes « à plat » dans un même plan, elles sont coplanaires. Si l'une d'elles « sort » du plan formé par les deux autres, elles ne sont pas coplanaires.

Analogie 2D/3D :

- En 2D, deux vecteurs sont **colinéaires** si l'un est multiple de l'autre (même direction) $\Rightarrow$ ils ne « couvrent » qu'une droite.
- En 3D, trois vecteurs sont **coplanaires** si l'un est combinaison linéaire des deux autres $\Rightarrow$ ils ne « couvrent » qu'un plan.

Quand trois vecteurs ne sont **pas** coplanaires, ils « couvrent » tout l'espace : on peut fabriquer n'importe quel vecteur de l'espace comme combinaison linéaire de ces trois-là. C'est le concept de **base**.

✂ Méthode | Vérifier la coplanarité en coordonnées

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si le **déterminant** suivant est nul :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Le calcul de ce déterminant 3×3 se fait par la **règle de Sarrus** ou par développement :

$$\det = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1)$$

Si $\det \neq 0$, les vecteurs ne sont **pas** coplanaires (ils forment une base de l'espace).

💡 Exemple | Trois vecteurs coplanaires ?

$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det &= 1 \times (1 \times 1 - 3 \times 5) - 0 \times (2 \times 1 - (-1) \times 5) + 2 \times (2 \times 3 - (-1) \times 1) \\ &= 1 \times (1 - 15) - 0 + 2 \times (6 + 1) = 1 \times (-14) + 2 \times 7 = -14 + 14 = 0 \end{aligned}$$

Le déterminant est nul, donc $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont **coplanaires**. Cela signifie qu'on peut écrire $\vec{w}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Vérifions : $\vec{w} = 2\vec{u} + 1 \cdot \vec{v}$ donne $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$

3.7 Familles libres, bases et repères

📖 Définition | Famille libre (linéairement indépendante)

Des vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ sont **linéairement indépendants** (ou forment une **famille libre**) si la seule combinaison linéaire nulle est la combinaison triviale :

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p = \vec{0} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$$

En termes concrets :

- Deux vecteurs sont linéairement indépendants $\Leftrightarrow$ ils ne sont **pas** colinéaires.
- Trois vecteurs sont linéairement indépendants $\Leftrightarrow$ ils ne sont **pas** coplanaires.

📖 Définition | Base de l'espace

Une **base** de l'espace est un triplet $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de vecteurs **linéairement indépendants** (non coplanaires).

Tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace s'écrit alors de manière **unique** comme combinaison linéaire de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$:

$$\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \quad (\text{décomposition unique})$$

Les réels (x, y, z) sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Définition | Repère de l'espace

Un **repère** de l'espace est la donnée d'un point O (l'**origine**) et d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On le note $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Un point M a pour coordonnées (x, y, z) dans ce repère si et seulement si $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Propriété | Milieu d'un segment

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$. Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées :

$$I \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

C'est la moyenne des coordonnées de A et B .

Propriété | Relation de Chasles

Pour tous points A, B, C de l'espace :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Cette relation est fondamentale et se généralise : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$, etc. Elle permet de décomposer n'importe quel vecteur en passant par des points intermédiaires.

3.8 Directions de droites et de plans

Définition | Vecteur directeur d'une droite

Un vecteur $\vec{u}$ (non nul) est un **vecteur directeur** de la droite d si $\vec{u}$ a la même direction que d .

Si A et B sont deux points distincts de d , alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d . Tout multiple non nul de $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur directeur de d .

Un point M appartient à la droite (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est **colinéaire** à $\overrightarrow{AB}$:

$$M \in (AB) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$$

Définition | Représentation paramétrique d'une droite

Soit d la droite passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Un point $M(x, y, z)$ appartient à d si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Le réel t est le **paramètre**. Quand t varie dans $\mathbb{R}$, le point M parcourt toute la droite d .

Exemple

Droite d passant par $A(1, 2, -3)$ avec vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$:

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Par exemple, pour $t = 0$ on retrouve $A(1, 2, -3)$. Pour $t = 1$ on obtient le point $(3, 1, 1)$.

Le point $B(5, 0, 5)$ est-il sur d ? On cherche t tel que $5 = 1 + 2t$, soit $t = 2$. Vérifions les autres : $y = 2 - 2 = 0 \checkmark$ et $z = -3 + 8 = 5 \checkmark$. Donc $B \in d$.

Définition | Direction d'un plan

Un plan $\mathcal{P}$ est déterminé par un point A et deux vecteurs **non colinéaires** $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On dit que $(\vec{u}, \vec{v})$ est un **couple de vecteurs directeurs** du plan $\mathcal{P}$.

Un point M appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$M \in \mathcal{P} \iff \exists (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v}$$

Définition | Représentation paramétrique d'un plan

Le plan $\mathcal{P}$ passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigé par $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ (non colinéaires) admet la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_A + sa + ta' \\ y = y_A + sb + tb' \\ z = z_A + sc + tc' \end{cases}, \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2$$

✓ Propriété | Parallélisme de droites et plans

- Deux droites sont **parallèles** $\Leftrightarrow$ leurs vecteurs directeurs sont **colinéaires**.
- Une droite est **parallèle** à un plan $\Leftrightarrow$ son vecteur directeur est **combinaison linéaire** des vecteurs directeurs du plan.
- Deux plans sont **parallèles** $\Leftrightarrow$ les vecteurs directeurs de l'un sont combinaisons linéaires de ceux de l'autre (même direction).

★ Théorème | Points coplanaires

Quatre points A, B, C, D sont **coplanaires** (contenus dans un même plan) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sont **coplanaires** :

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$$

4 La boîte à outils — Réflexes pour le bac

Méthode | Check-list vecteurs de l'espace

Je veux. . .	J'utilise. . .
Trouver $\overrightarrow{AB}$	$B - A$ coordonnée par coordonnée
Vérifier que 3 points sont alignés	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires ?
Vérifier que 4 pts sont coplanaires	$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$?
Trouver le milieu de $[AB]$	Moyenne des coordonnées
Représenter une droite	Point + vecteur directeur $\rightarrow$ repr. paramétrique
Représenter un plan	Point + 2 vecteurs directeurs non colinéaires
Vérifier si M est sur une droite/plan	Substituer dans la repr. paramétrique, vérifier
Droites parallèles ?	Vecteurs directeurs colinéaires ?
Droite parallèle à un plan ?	Vect. dir. de la droite = CL des vect. dir. du plan ?

Attention | Erreurs fréquentes au bac

1. **Inverser le sens de $\overrightarrow{AB}$.** C'est $B - A$, pas $A - B$!
2. **Oublier de vérifier les trois coordonnées.** Pour la colinéarité, il faut que le rapport soit le même pour les trois composantes, pas juste deux.
3. **Confondre « non colinéaires » et « non coplanaires ».** Deux vecteurs non colinéaires sont toujours coplanaires (ils définissent un plan). Il faut trois vecteurs pour parler de non-coplanarité.
4. **Oublier la condition « non colinéaires » pour les vecteurs directeurs d'un plan.** Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, ils ne définissent qu'une droite, pas un plan.
5. **Se tromper dans le déterminant.** Attention aux signes ! Le terme central a un signe $-$, pas $+$.

Méthode | Récap des formules

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

$$\text{— Milieu de } [AB] : I \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

$$\text{— Colinéarité de } \vec{u} \text{ et } \vec{v} : \exists \lambda, \vec{v} = \lambda \vec{u}$$

$$\text{— Coplanarité : } \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$$

$$\text{— } \det = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1)$$

$$\text{— Droite : } \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

$$\text{— Plan : } \begin{cases} x = x_A + sa + ta' \\ y = y_A + sb + tb' \\ z = z_A + sc + tc' \end{cases}$$

5 Exercices

Exercice 1 — Coordonnées de vecteurs et opérations

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne $A(2, -1, 3)$, $B(5, 2, -1)$, $C(0, 4, 1)$.

- Calculer les coordonnées de $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, et $\vec{BC}$.
- Vérifier la relation de Chasles : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.
- Calculer $2\vec{AB} - 3\vec{AC}$.
- Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$ et du milieu J de $[AC]$.

Exercice 2 — Translation

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et les points $A(4, 1, -2)$, $B(0, 5, 3)$, $C(-2, 2, 1)$.

- Déterminer les images A' , B' , C' de A , B , C par la translation $t_{\vec{u}}$.
- Vérifier que $\vec{A'B'} = \vec{AB}$.
- Quel vecteur de translation transforme A' en A ?

Exercice 3 — Colinéarité et alignement

- Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?
- Les points $A(1, 2, 3)$, $B(3, 6, 7)$, $C(5, 10, 11)$ sont-ils alignés ?
- Trouver k tel que $\vec{u} \begin{pmatrix} k \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$ soient colinéaires.

Exercice 4 — Coplanarité

- Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?
- Les points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $D(1, 1, 1)$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 5 — Représentation paramétrique de droites

- Écrire la représentation paramétrique de la droite d passant par $A(1, -2, 5)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- Le point $M(7, 0, 1)$ appartient-il à d ?
- Le point $N(4, -1, 4)$ appartient-il à d ?
- Écrire la représentation paramétrique de la droite (BC) avec $B(2, 3, -1)$ et $C(5, 0, 2)$.

Exercice 6 — Représentation paramétrique de plans

- Écrire la représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(2, 0, 1)$, dirigé par $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Le point $M(3, 4, -1)$ appartient-il à $\mathcal{P}$?
- Le point $N(1, -1, 2)$ appartient-il à $\mathcal{P}$?

Exercice 7 ★★☆☆ — **Parallélisme**

On donne les droites : d_1 : passant par $A(1, 0, 2)$, vecteur directeur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. d_2 : passant par $B(3, 1, -1)$, vecteur directeur $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$. d_3 : passant par $C(0, 1, 1)$, vecteur directeur $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?
- d_1 et d_3 sont-elles parallèles ?
- d_1 et d_2 sont-elles confondues ?

Exercice 8 ★★☆☆ — **Décomposition dans une base**

On considère $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Vérifier que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de l'espace (i.e. que $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \neq 0$).
- Décomposer $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: trouver α, β, γ tels que $\vec{w} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3$.

Exercice 9 ★★☆☆ — **Intersection de droites**

On donne $d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x = 3 - s \\ y = s \\ z = 7 - 2s \end{cases}$.

- Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?
- Déterminer leur point d'intersection (s'il existe).

Exercice 10 ★★☆☆ — **Application : parallélogramme dans l'espace**

Soient $A(1, 2, 3)$, $B(4, 1, 5)$, $C(6, 3, 4)$.

- Déterminer D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme (dans cet ordre).
- Calculer les coordonnées du centre du parallélogramme.
- Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ? Justifier.

Exercice 11 ★★★ — **Points alignés et paramètre**

Soient $A(1, 2, 3)$, $B(3, a, 7)$, $C(5, 10, 11)$ où a est un réel.

- Pour quelle valeur de a les points A, B, C sont-ils alignés ?
- Pour cette valeur de a , écrire la représentation paramétrique de la droite (AC) .
- Le point $D(9, 18, 19)$ est-il sur cette droite ?

Exercice 12 ★★★ — **Intersection droite/plan**

On considère le plan $\mathcal{P} : \begin{cases} x = 1 + s + 2t \\ y = 2s - t \\ z = 2 + s + 3t \end{cases}$ et la droite $d : \begin{cases} x = -1 + 3u \\ y = 1 - u \\ z = 4 + u \end{cases}$.

- Déterminer le point d'intersection de d et $\mathcal{P}$ (s'il existe).
- Le vecteur directeur de d est-il coplanaire avec les vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$?

6 🐼 Problème — Barycentres et coordonnées ★★

🔥 Problème style prépa

Ce problème introduit le concept de **barycentre**, généralisation du milieu d'un segment. On étudie ses propriétés vectorielles et son lien avec les combinaisons linéaires et la coplanarité.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.

Partie A — Barycentre de deux points

Soient A et B deux points, et α, β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un unique point G tel que $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}$.
2. En déduire que $\vec{OG} = \frac{\alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB}}{\alpha + \beta}$.
3. Vérifier que pour $\alpha = \beta = 1$, on retrouve le milieu de $[AB]$.
4. Application : $A(1, 3, 2)$, $B(5, -1, 6)$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$. Calculer les coordonnées de G .
5. Montrer que G appartient à la droite (AB) . Où se situe-t-il sur cette droite ?

Partie B — Barycentre de trois points et coplanarité

Soient A, B, C trois points non alignés, et α, β, γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

6. Par analogie, montrer qu'il existe un unique point G tel que $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} = \vec{0}$, et exprimer $\vec{OG}$.
7. Montrer que G appartient au plan (ABC) .
8. Application : $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Calculer G (c'est le **centre de gravité** du triangle ABC).
9. Démontrer que le centre de gravité d'un triangle est situé au tiers de chaque médiane à partir du sommet.

Partie C — Barycentre de quatre points et tétraèdre

Soient A, B, C, D quatre points non coplanaires.

10. Définir le barycentre G de (A, α) , (B, β) , (C, γ) , (D, δ) avec $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$.
11. Pour $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$, montrer que $G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}, \dots \right)$ est le centre de gravité du tétraèdre $ABCD$.
12. Application numérique avec $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $D(0, 0, 0)$.
13. **(Bonus)** Montrer que les quatre médianes du tétraèdre (segments joignant chaque sommet au centre de gravité de la face opposée) sont concourantes en G , et que G divise chaque médiane dans le rapport 3 : 1.

7 Corrigés détaillés

Corrigé — Exercice 1

a) On calcule chaque vecteur en faisant **arrivée** — **départ** :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 2 - (-1) \\ -1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ 4 - (-1) \\ 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 - 5 \\ 4 - 2 \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) On vérifie $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 5 \\ 3 + 2 \\ -4 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \quad \checkmark$$

La relation de Chasles est bien vérifiée.

$$\text{c) } 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 6 \\ 6 - 15 \\ -8 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) Milieu } I \text{ de } [AB] : I \left(\frac{2+5}{2}, \frac{-1+2}{2}, \frac{3+(-1)}{2} \right) = I \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right)$$

$$\text{Milieu } J \text{ de } [AC] : J \left(\frac{2+0}{2}, \frac{-1+4}{2}, \frac{3+1}{2} \right) = J \left(1, \frac{3}{2}, 2 \right)$$

Corrigé — Exercice 2

a) La translation $t_{\vec{u}}$ ajoute les coordonnées de $\vec{u}$ à chaque point :

$$A' = (4 - 1, 1 + 3, -2 + 2) = \mathbf{(3, 4, 0)}$$

$$B' = (0 - 1, 5 + 3, 3 + 2) = \mathbf{(-1, 8, 5)}$$

$$C' = (-2 - 1, 2 + 3, 1 + 2) = \mathbf{(-3, 5, 3)}$$

$$\text{b) } \overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} -1 - 3 \\ 8 - 4 \\ 5 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 - 4 \\ 5 - 1 \\ 3 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

On a bien $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ $\checkmark$. La translation conserve les vecteurs.

$$\text{c) Pour transformer } A' \text{ en } A, \text{ il faut la translation de vecteur } \overrightarrow{A'A} = -\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Corrigé — Exercice 3

a) On cherche λ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$. Première coordonnée : $-3 = \lambda \times 2 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{2}$. Vérifions : $\lambda \times (-4) = -\frac{3}{2} \times (-4) = 6 \checkmark$ et $\lambda \times 6 = -\frac{3}{2} \times 6 = -9 \checkmark$. Les trois coordonnées donnent le même λ , donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**.

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}. \text{ On vérifie : } \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} \text{ (chaque coordonnée est le double). Donc } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires.}$$

$\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, ce qui signifie que A, B, C sont **alignés**.

- c) Pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires, il faut $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ pour un certain λ . De la deuxième coordonnée : $6 = \lambda \times (-9) \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$. Troisième : $-4 = \lambda \times 6 = -\frac{2}{3} \times 6 = -4 \checkmark$. Première : $k = \lambda \times 3 = -\frac{2}{3} \times 3 = -2$.

Corrigé — Exercice 4

- a) On calcule le déterminant $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$:

$$\begin{aligned} \det &= 1 \times (1 \times 3 - (-1) \times 1) - 0 \times (0 \times 3 - (-1) \times 2) + 2 \times (0 \times 1 - 1 \times 2) \\ &= 1 \times (3 + 1) - 0 + 2 \times (0 - 2) = 4 - 4 = 0 \end{aligned}$$

Le déterminant est nul, donc $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont **coplanaires**.

Vérification : $\vec{w} = 2\vec{u} + 1 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \checkmark$.

- b) On calcule $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det &= (-1)(0 \times 1 - 1 \times 1) - (-1)(1 \times 1 - 0 \times 1) + 0 \\ &= (-1)(-1) - (-1)(1) + 0 = 1 + 1 = 2 \neq 0 \end{aligned}$$

Le déterminant est non nul, donc A, B, C, D ne sont **pas coplanaires**. Ils forment un tétraèdre.

Corrigé — Exercice 5

a) $d : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \\ z = 5 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

- b) $M(7, 0, 1) \in d$? On cherche $t : 7 = 1 + 3t \Rightarrow t = 2$. Vérification : $y = -2 + 2 = 0 \checkmark$, $z = 5 - 4 = 1 \checkmark$. Donc $M \in d$.

- c) $N(4, -1, 4) \in d$? On cherche $t : 4 = 1 + 3t \Rightarrow t = 1$. Vérification : $y = -2 + 1 = -1 \checkmark$, $z = 5 - 2 = 3 \neq 4$. Le système est **incompatible**, donc $N \notin d$.

d) Vecteur directeur : $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$. On peut simplifier par 3 : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(BC) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Corrigé — Exercice 6

a) $\mathcal{P} : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = s + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}, (s, t) \in \mathbb{R}^2$

- b) $M(3, 4, -1) \in \mathcal{P}$? On résout : $x : 3 = 2 + s \Rightarrow s = 1$. $z : -1 = 1 - t \Rightarrow t = 2$. Vérifions $y : s + 2t = 1 + 4 = 5 \neq 4$. **Incompatible**, donc $M \notin \mathcal{P}$.

- c) $N(1, -1, 2) \in \mathcal{P}$? $x : 1 = 2 + s \Rightarrow s = -1$. $z : 2 = 1 - t \Rightarrow t = -1$. Vérifions $y : s + 2t = -1 - 2 = -3 \neq -1$. **Incompatible**, donc $N \notin \mathcal{P}$.

Corrigé — Exercice 7

a) $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -2\vec{u}_1$. Donc $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires : $d_1 \parallel d_2$.

b) $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On teste : $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{-1}$. Les rapports ne sont pas égaux, donc d_1 et d_3 ne sont **pas** parallèles.

c) Deux droites parallèles sont confondues si et seulement si un point de l'une appartient à l'autre. $B(3, 1, -1) \in d_1$? On cherche t : $3 = 1 + 2t \Rightarrow t = 1$. Alors $y = 0 + (-1) \times 1 = -1 \neq 1$. Donc $B \notin d_1$ et $d_1 \neq d_2$: elles sont **parallèles et distinctes**.

Corrigé — Exercice 8

a) $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1(1 \times 1 - (-1) \times 0) - 0(1 \times 1 - (-1) \times 1) + 1(1 \times (-1) - 1 \times 1)$
 $= 1 \times 1 - 0 + 1 \times (-2) = 1 - 2 = -2 \neq 0$. Donc c'est bien une **base**.

b) On résout $\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 = \vec{w}$:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Système :
$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 2 \\ \alpha + \beta = 3 \\ \beta + \gamma = 1 \end{cases}$$

De (1) : $\gamma = 2 - \alpha$. Dans (3) : $\beta = 1 - \gamma = 1 - (2 - \alpha) = \alpha - 1$. Dans (2) : $\alpha + (\alpha - 1) = 3 \Rightarrow 2\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 2$.

Donc $\beta = 1$ et $\gamma = 0$. Vérification : $2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{w} \checkmark$.

Corrigé — Exercice 9

a) Vect. dir. de d_1 : $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Vect. dir. de d_2 : $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\vec{u}_1$. Ils sont colinéaires, donc $d_1 \parallel d_2$.

Mais attention, parallèles ne signifie pas forcément distinctes ! Vérifions si un point de d_2 est sur d_1 . Pour $s = 0$, d_2 passe par $(3, 0, 7)$. On cherche t sur d_1 : $3 = 1 + t \Rightarrow t = 2$. Vérifions : $y = 2 - 2 = 0 \checkmark$, $z = 3 + 4 = 7 \checkmark$. Donc $(3, 0, 7) \in d_1$ et d_1 et d_2 sont **confondues**.

b) Comme $d_1 = d_2$, tout point de l'une est aussi sur l'autre. Tous les points d'intersection forment la droite elle-même.

Corrigé — Exercice 10

a) $ABCD$ est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ce qui donne $C - D = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, soit $D = C - \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 - 3 \\ 3 + 1 \\ 4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Vérification : $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 6-3 \\ 3-4 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \checkmark$.

- b) Le centre du parallélogramme est le milieu de $[AC]$ (ou de $[BD]$, c'est le même point) : $I = \left(\frac{1+6}{2}, \frac{2+3}{2}, \frac{3+4}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

Vérification avec $[BD]$: $\left(\frac{4+3}{2}, \frac{1+4}{2}, \frac{5+2}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right) \checkmark$.

- c) Quatre points d'un parallélogramme sont toujours coplanaires car ils appartiennent au plan défini par A , $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. On peut aussi vérifier : $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, et $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ avec $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\det = 3(1 \times (-1) - 1 \times 2) - (-1)((-1) \times (-1) - 1 \times 2) + 2((-1) \times 2 - 1 \times 5) = 3(-3) + 1(-1 - 2) + 2(-7) = -9 - 3 - 14 \neq 0 \dots$$

Attendons — vérifions avec $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}$. En fait, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} - \dots$

Utilisons la propriété directe : dans un parallélogramme, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \dots$ Non. L'argument est plus direct : D est construit pour que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{AD}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. En effet $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \dots$ Recalculons D .

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ et on veut } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}. D = (6-3, 3+1, 4-2) = (3, 4, 2), \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AD} \text{ est-il CL de } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} ? \text{ On résout } \overrightarrow{AD} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC} : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 3\alpha + 5\beta = 2 \\ -\alpha + \beta = 2 \\ 2\alpha + \beta = -1 \end{cases} \quad . \text{ De (2) : } \alpha = \beta - 2. \text{ Dans (3) : } 2(\beta - 2) + \beta = -1 \Rightarrow 3\beta = 3 \Rightarrow \beta = 1, \alpha = -1.$$

Vérif (1) : $-3 + 5 = 2 \checkmark$.

Donc $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$: les trois vecteurs sont coplanaires, et les quatre points sont **coplanaires**. C'est toujours le cas pour un parallélogramme.

Corrigé — Exercice 11

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Pour que A, B, C soient alignés, il faut $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$. Comme $\overrightarrow{AC} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, on doit avoir $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$.

Première coordonnée : $2 = 4\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$. Troisième : $4 = 8 \times \frac{1}{2} = 4 \checkmark$. Deuxième : $a-2 = 8 \times \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow a = 6$.

b) Vecteur directeur : $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$, qu'on simplifie par 4 : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$(AC) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

c) $D(9, 18, 19) \in (AC)$? On cherche t : $9 = 1 + t \Rightarrow t = 8$. Vérifions : $y = 2 + 16 = 18 \checkmark$, $z = 3 + 16 = 19 \checkmark$. Donc $D \in (AC)$.

Corrigé — Exercice 12

a) On cherche (s, t, u) tels que les coordonnées coïncident :

$$\begin{cases} 1 + s + 2t = -1 + 3u \\ 2s - t = 1 - u \\ s + 3t = 4 + u - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s + 2t - 3u = -2 \\ 2s - t + u = 1 \\ s + 3t - u = 2 \end{cases}$$

De (1) : $s = -2 - 2t + 3u$. Dans (2) : $2(-2 - 2t + 3u) - t + u = 1 \Rightarrow -4 - 4t + 6u - t + u = 1 \Rightarrow -5t + 7u = 5$.

Dans (3) : $(-2 - 2t + 3u) + 3t - u = 2 \Rightarrow t + 2u = 4 \Rightarrow t = 4 - 2u$.

Substitution dans $-5t + 7u = 5$: $-5(4 - 2u) + 7u = 5 \Rightarrow -20 + 10u + 7u = 5 \Rightarrow 17u = 25 \Rightarrow u = \frac{25}{17}$.

Alors $t = 4 - \frac{50}{17} = \frac{18}{17}$, $s = -2 - \frac{36}{17} + \frac{75}{17} = \frac{-34 - 36 + 75}{17} = \frac{5}{17}$.

Point d'intersection : $M = \left(-1 + \frac{75}{17}, 1 - \frac{25}{17}, 4 + \frac{25}{17}\right) = \left(\frac{58}{17}, -\frac{8}{17}, \frac{93}{17}\right)$.

b) Vect. dir. de d : $\vec{u}_d = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vect. dir. de $\mathcal{P}$: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_d) = 1(-1 \times 1 - 3 \times (-1)) - 2(2 \times 1 - 3 \times 3) + 3(2 \times (-1) - (-1) \times 3)$$

$$\begin{aligned} \text{Recalculons proprement : } \det &= 1((-1)(1) - (3)(-1)) - 2((2)(1) - (3)(3)) + 3((2)(-1) - (-1)(3)) \\ &= 1(-1 + 3) - 2(2 - 9) + 3(-2 + 3) = 2 - 2(-7) + 3(1) = 2 + 14 + 3 = 19 \neq 0. \end{aligned}$$

Comme le déterminant est non nul, $\vec{u}_d$ n'est **pas** coplanaire avec $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Cela confirme que d n'est pas parallèle au plan $\mathcal{P}$ et le coupe en exactement un point.

Corrigé — Problème (Barycentres)

Partie A

1. On cherche G tel que $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$. En utilisant un point O quelconque et la relation de Chasles : $\alpha(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}) + \beta(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0}$, soit $\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} - (\alpha + \beta) \overrightarrow{OG} = \vec{0}$.

Comme $\alpha + \beta \neq 0$, on peut isoler : $\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}}{\alpha + \beta}$. Cette expression détermine un unique point G . $\square$

2. C'est exactement ce qu'on vient de montrer : $\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}}{\alpha + \beta}$.

3. $\alpha = \beta = 1$: $\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$. En coordonnées : $G = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$, c'est bien le milieu de $[AB]$. $\checkmark$

4. $\alpha = 3, \beta = 1$: $G = \frac{3A + 1 \cdot B}{4} = \left(\frac{3+5}{4}, \frac{9-1}{4}, \frac{6+6}{4}\right) = (2, 2, 3)$.

5. $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\overrightarrow{AG}$. Donc $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$: G est sur (AB) , situé au quart de $[AB]$ à partir de A .

Partie B

6. Même raisonnement : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ donne, via Chasles :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}}{\alpha + \beta + \gamma}$$

7. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = \frac{\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}}{\alpha + \beta + \gamma} - \overrightarrow{OA} = \frac{\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}}{\alpha + \beta + \gamma}$, qui est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Donc G est dans le plan (ABC) . $\square$

8. $G = \frac{A+B+C}{3} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

9. La médiane issue de A rejoint le milieu M de $[BC]$. $M = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On vérifie : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. Donc G est situé au **tiers** de la médiane $[AM]$ à partir de A , c'est-à-dire au $\frac{2}{3}$ en partant de A . Par symétrie du raisonnement, c'est vrai pour les trois médianes. $\square$

Partie C

10. G est l'unique point vérifiant $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} + \delta\overrightarrow{GD} = \vec{0}$, soit $\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} + \delta\overrightarrow{OD}}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$.

11. Pour $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$: $G = \frac{A+B+C+D}{4}$.

12. $G = \frac{1}{4} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

13. Soit G'_{BCD} le centre de gravité de la face BCD : $G'_{BCD} = \frac{B+C+D}{3} = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. La médiane issue de A est $[AG'_{BCD}]$. On vérifie : $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG'_{BCD}}$, donc G divise $[AG'_{BCD}]$ dans le rapport 3 : 1 (3 parts de A vers G'_{BCD} , 1 part de G'_{BCD}). Par symétrie du raisonnement, c'est vrai pour les 4 médianes : elles sont concourantes en G . $\square$

Fin de la Fiche 2 — Calcul vectoriel dans l'espace

Tu maîtrises maintenant : les opérations vectorielles, la translation, la combinaison linéaire, la colinéarité, la coplanarité, les bases, les représentations paramétriques de droites et plans.

La fiche suivante (Produit scalaire dans l'espace) utilisera intensivement ces notions.

→ Prochaine fiche : Produit scalaire dans l'espace.